بسم الله الرحمن الرحيم

ديناميكيات الموائع الحسابية (د.م.ح.)

Computational Fluid Dynamics (CFD)

Samir Mourad — سمير مراد

Fatima Hamed — فاطمة حامد

Banan Kerdi — بنان الكردي

Ahlam Houda — احلام هدى

هذا الاصدار ليس بكامل. آخر تعديل: الإثنين، 31 آب، 2015

AECENAR
Association for Economical and Technological Cooperation in the Euro-Asian and North-African Region
www.aecenar.com

الفهرس

تمهيد:بعض ميادين تستخدم فيه ديناميكيات الموائع الحسابية (CFD)

لا بد ان تستخدم محاكاة في ميادين صعوبة المنال لمعطيات من اختبارات. و بالتالي بعض الامثلة:

- علم الفلك
- محارق مثلا لنفايات: المحاكاة CFD: توزيع درجة الحرارة في محرقة / CFD (Computational Fluid Dynamics) simulations: temperature distribution in an incinerator

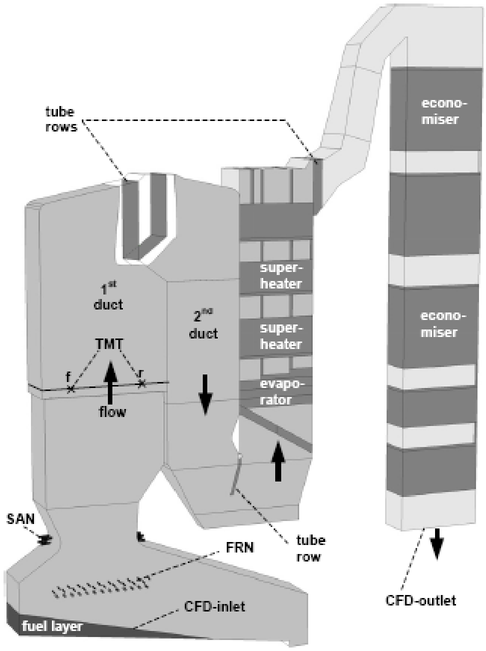
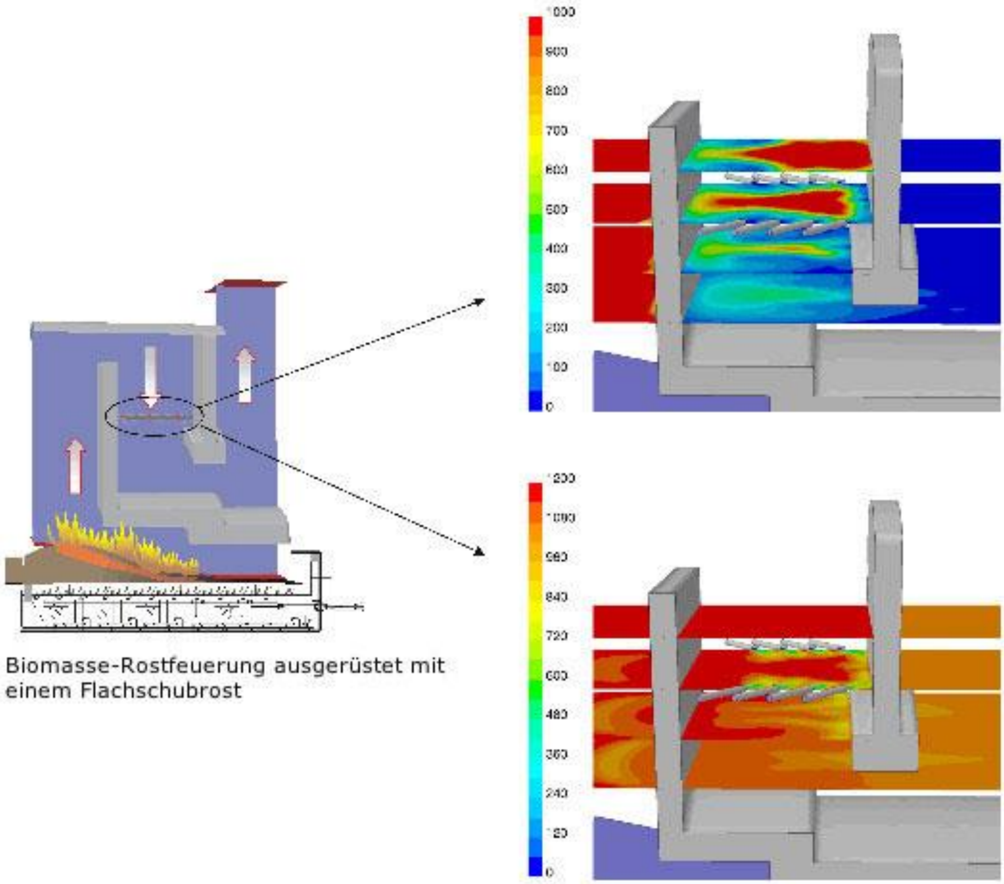


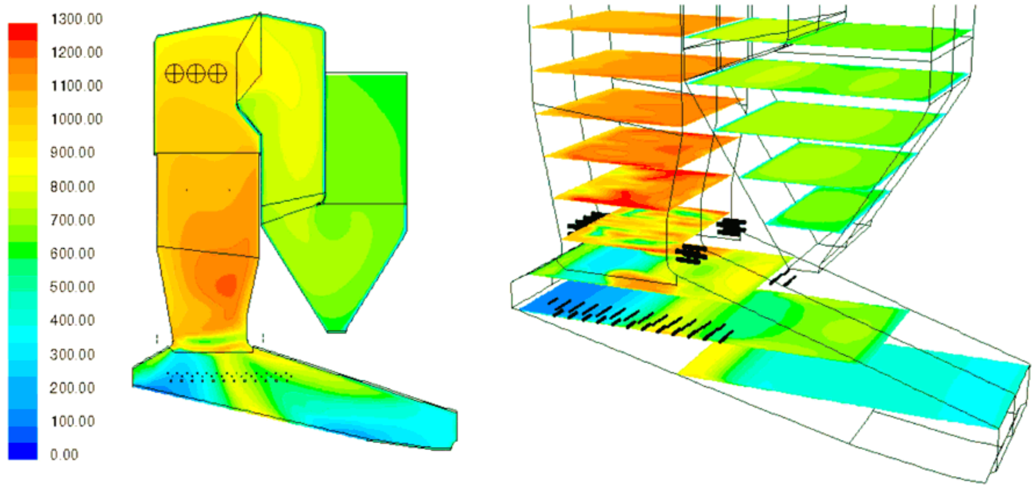
Figure 1: CFD model of the biomass furnace and boiler
Explanations: modeled tube bundles and rows are pictured dark gray; SAN…secondary air nozzles, FRN…flue gas recirculation nozzles, TMT… suction pyrometer temperature measurement traverses

From: Scharler et. al. 2004, Advanced CFD analysis of large fixed bed biomass boilers …, 2nd World Conf…., Rome, 2004



Biomasse-Rostfeuerung ausgerüstet mit einem Flachschubrost

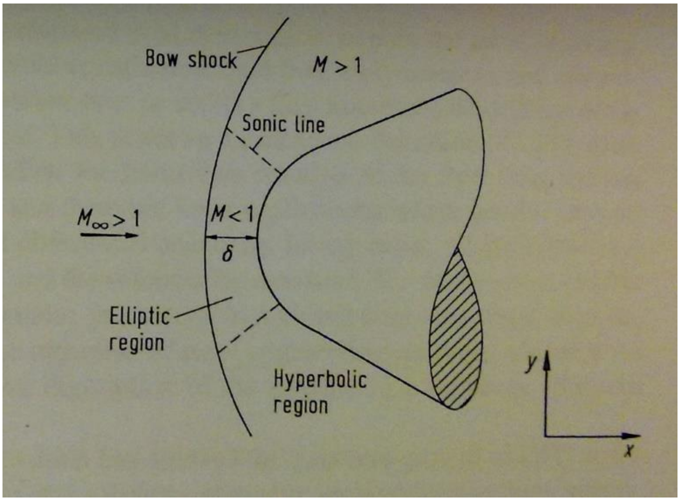
CO-Konzentrationen [v-ppm] (oben) und Temperaturverteilung [°C] (unten) in verschiedenen Querschnitten um die Sekundärluftdüsen



Isoflächen der Rauchgastemperatur [°C] in der Symmetrieebene der Feuerung (links) und in horizontalen Schnittebenen (rechts). Aus: http://www.bios-bioenergy.at/de/cfd-simulationen.html

- محاكات لمحارق صواريخ

- محاكات لاعادة لمركبات فضائية



1 مدخل الى ديناميكيات الموائع والغازات (fluid and gas dynamics)

ديناميك الغازات (gas dynamics) هو علم سريان لغازات و لخليط من الغازات. و بشكل اساسي يتعامل هذا العلم بسريان الهواء. ومن اهم التطبيقات هو آروديناميك الطياران (plane aerodynamics) و آروديناميك لمحركات الطياران.

1.1 تعريفات اساسية[1]

ميكانيكا الموائع (Fluid Mechanics) هو تخصص فرعي من ميكانيكا المواد المتصلة (Mechanics Continuum) وهو معني أساسا **بالموائع**، التي هي أساسا السوائل والغازات، ويدرس هذا التخصص السلوك الفيزيائي الظاهر الكلي لهذه المواد، ويمكن تقسيمه من ناحية إلى إستاتيكا الموائع- أو دراستها في حالة عدم الحركة، أو ديناميكا الموائع أو دراستها في حالة الحركة، ويندرج تحتها تخصصات أخرى معينة، فهناك الديناميكيات الهوائية (**أيروديناميك**) والديناميكيات المائية (**هيدروديناميك**). يسعى هذا التخصص إلى تحديد الكميات الفيزيائية الخاصة بالموائع، وذلك مثل السرعة، الضغط، الكثافة، ودرجة الحرارة، **واللزوجة** ومعدل التدفق، وقد ظهرت تطبيقات حسابية حديثة لإيجاد حلول للمسائل المتصلة بميكانيكا الموائع، ويسمى التخصص المعني بذلك ديناميكيات الموائع الحسابية (بالإنجليزية: Computational FluidDynamics) (CFD).

[1] من http://ar.wikipedia.org/wiki ولكن محقق من الكاتب

1.2 نظام الوحدات

النظام المستخدم هنا هو النظام العالمي للوحدات (SI).

القائمة أدناه تبين وحداته الاساسية:

الطول	الكتلة	الزمن	درجة الحرارة	القوة	الطاقة	القدرة	الضغط
m	kg	s	K	N	J	W	Pa
متر	كيلو غرام	ثانية	كلفن	نيوتن	جول	وات	باسكال

1.3 مضمون القسم الاول من الكتاب

في الجزء الاول من هذا الكتيب يتناول ان شاء الله التالى:

a) تلخيص لميكانيكا الموائع (بالإنجليزية: Fluid Mechanics)

b) مدخل ملخص للتحليل عددي (بالإنجليزية: Numerics / Numerical Computation)

c) اساليب ديناميكيات الموائع الحسابية (بالإنجليزية:Computational FluidDynamics)

يوجد بالغة العربية مرجع في المادة ميكانيكا الموائع و هو كتاب **ميكانيك الموائع** من محمد هاشم صديق[2].

1.4 الموائع (fluids)

[2] [Siddiq]

الموائع كجمع لكلمة مائع (fluid) تشكل مجموعة من أطوار المادة، وهي أي مادة قابلة للانسياب تحت تأثير إجهاد القص وتأخذ شكل الإناء الحاوي لها. تتضمن الموائع كلً من السوائل، الغازات، البلازما وأحيانا الأصلاب اللدنة plastic solids.

تصنف الموائع عادة إلى:

- **موائع قابلة للانضغاط (compressible fluids)** وهي الموائع التي تتغير كثافتها بتغير الضغط الواقع عليها مثل الغازات. و يسم ايضاً السريان الانضغاطي.
- **موائع غير قابلة للانضغاط (incompressible fluids)** وهي الموائع التي لا تتغير كثافتها بتغير الوضع الواقع عليها مثل السوائل. و يسم ايضاً السريان اللا انضغاطي.
- موائع نيوتنية: **المائع النيوتني** هو مائع تكون فيه علاقة الإجهاد[3] – الانفعال (تشوه المواد نتيجة الإجهاد) علاقة خطية أي على شكل مستقيم يمر من مبدأ الإحداثيات، ويعرف اسم ثابت التناسب باللزوجة. سمي هذا المائع على اسم العالم اسحق نيوتن[4].

[3] engl. stress

4 (بالإنجليزية: Isaac Newton إسحق "نيوتن" (4 يناير 1643 -31 مارس 1727) من) ويناذي بالسير إسحق نيوتن رجال الجمعية الملكية كان فيزيائي إنجليزي وعالم رياضيات وعالم فلك وفيلسوف بعلم الطبيعة وكيميائي وعالم باللاهوت وواحدًا من أعظم الرجال تأثيرًا في تاريخ البشرية. ويعد كتابه كتاب الأصول الرياضية للفلسفة الطبيعية والذي نشر عام 1687 من أكثر الكتب تأثيرًا في تاريخ العلم واضعًا أساس لمعظم نظريات الميكانيكا الكلاسيكية. في هذا الكتاب، وصف "نيوتن" الجاذبية العامة وقوانين الحركة الثلاثة

- موائع غير نيوتنية: **مائع لا نيوتوني** هو مائع لا يمكن وصف جريانه باستخدام ثابت اللزوجة. تعتبر أغلب المحاليل البوليميرات والبوليمرات الذائبة من الموائع اللانيوتونية والكثير من السوائل الشائعة مثل الكتشب، ذائب النشا، الدم والشامبو.

1.5 الكمية المتصلة

يمكن اعتبار المائع كمية متصلة إذا كانت أصغر مسافة في التحليل أكبر من المتوسط المسار الحر للجزئيات.

L >> l

1.6 الكثافة

والتي سيطرت على النظرة العلمية إلى العالم المادي للقرون الثلاثة القادمة ووضح "نيوتن" أن حركة الأجسام على كوكب الأرض والتي لها أجرام سماوية تحكمها مجموعة القوانين الطبيعية نفسها عن طريق إثبات الاتساق بين قوانين "كبلر" الخاصة بالحركة الكوكبية ونظريته الخاصة بالجاذبية؛ ومن ثم إزالة الشكوك المتبقية التي ثارت حول نظرية مركزية الشمس مما أدى إلى تقديم الثورة العلمية. وفيما يتعلق بالميكانيكا، أعلن "نيوتن" مبادئ بقاء الطاقة الخاصة بكل من كمية الحركة وكمية الحركة الزاوية. وفي علم البصريات، اخترع "نيوتن" أول تلسكوب عاكس[3] عملي. وكذلك أيضًا طور نظرية الألوان (لون) معتمدًا على ملاحظة أن المنشور يحلل الضوء الأبيض إلى العديد من الألوان التي تشكل الطيف المرئي. وبالإضافة إلى ذلك، صاغ قانون نيوتن للتبريد ودرس سرعة الصوت. وبالنسبة لعلم الرياضيات، يشارك "نيوتن" "جوتفريد لايبنتز" في شرف تطوير حساب التكامل والتفاضل. وكذلك أيضًا، أثبت النظرية ذات الحدين المعممة وطور ما يسمى بـ "طريقة نيوتن" الخاصة بتقريب الأصفار الموجودة بالدالة وساهم في دراسة متسلسلة القوى. تظل مكانة "نيوتن" الرفيعة بين العلماء في أعلى مرتبة الأمر الذي أثبته استطلاع رأي أجري عام 2005 فيما يتعلق بعلماء المجتمع الملكي البريطاني وكان السؤال الذي طرحه هذا الاستطلاع هو من كان له أعظم تأثير على تاريخ العلم "نيوتن" أم "ألبرت آينشتاين". وكانت نتيجة الاستطلاع هي أن "نيوتن" هو يعتبر الأكثر تأثيرًا.[4] علاوةً على ذلك، كان "نيوتن" تقيًا للغاية (على الرغم من أنه لم يكن متفقًا مع الأعراف الدينية القائمة) ومنتجًا للعديد من الأعمال في تفسيرات الكتاب المقدس أكثر مما أنتجه في العلوم الطبيعية التي لم ينس العالم إسهاماته به حتى الآن.

باعتبار أن الحجم V_0 هو مكعب أصغر مسافة ترد عي التحليل وتستوفي شرط الكمية المتصلة فإن الكثافة ρ تعرف كما يلي: $\rho = \lim_{\Delta V \to V_0}\left(\frac{\Delta m}{\Delta V}\right)$

حيث m الكتلة بالكيلوغرام و V الحجم بالمتر المكعب و وحدة الكثافة kg/m^3 .

1.7 الكثافة النسبية

هي كثافة المادة منسوبة الى الكثافة المعيارية للماء، و هي $1000\, kg / m^3$

$$s = \rho / \rho_w$$

1.8 قنون الغاز الكامل (ideal gas)

$$p = R\rho T$$

حيث يربط الضغط المطلق للغاز p بالدرحة المطلقة للحرارة والكثاف ρ. R ثابت الغاز و قيمته للهواء 287 J/(K kg).

1.9 السريان الرتيب (steady flow)

هو السريان الذي لا تتغير صفاته مع الزمن عند أي موضع محدد.

1.10 السريان المنتظم (uniform flow)

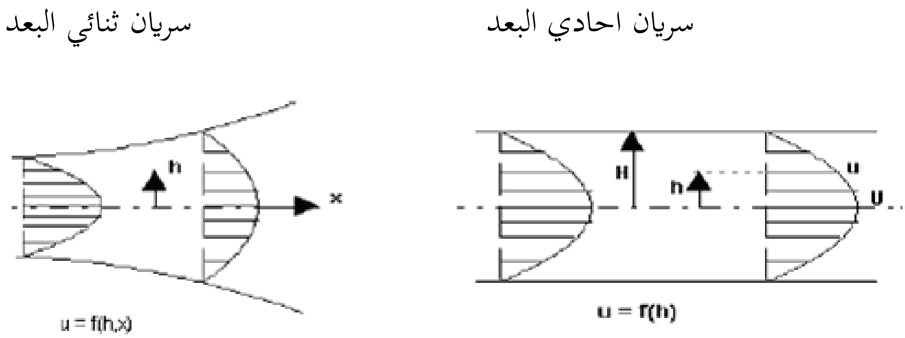
يوصف السريان بأنه منتظم عند مقطع إذا كانت قيمة كل من خواصه ثابتة في كل نقاط المقطع.

1.11 خط الانسياب (streamline)

يعرف خط الانساب بأنه الخط الذي تشكل المماسات له في كل أجزائه اتجاهات السرعة في وقت محدد.

1.12 أبعاد السريان (dimensions of flow)

يوصف السريان بانه **أحادي، ثنائي او ثلاثي** البعد بناءً على العدد الأدنى من الإحداثيات المكانية التي يمكن ان يوصف بها. الشكل 1.2 يعطي مثالا لسريان احادي البعد وآخر ثنائي البعد.



الشكل 1.2

1.13 الاجهاد (stress)

الاجهاد هو القوة السطحية العاملة علي وحدة مساحة $\sigma = \lim\limits_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$

و للآجهاد مركبتين إحداهما عمودية والأخرى مماسة $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_n + \underline{\sigma}_t$

ويفضّل في منكانيك الموائع في استخدام تعبير الضغط p في الاتجاه المتعامد حيث

$$\underline{\sigma}_n = -p\underline{n}$$

و يستخدم تعبير الإجهاد القصي τ في الاتجاه المماس حيث $\underline{\sigma}_t = \underline{\tau}$

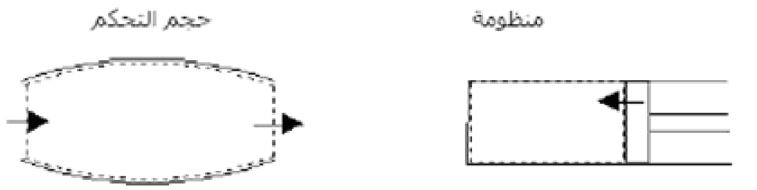
وبذالك $\underline{\sigma} = -p\underline{n} + \underline{\tau}$

1.14 *السريان الصفائحي (laminar flow) السريان المائر (turbulent flow)*

يتصف السريان الصفائحي بثبات الشكل الانسيابية بحيث يمكن اعتبار طبقاته تنزلق فوق بعضها البعض في شكل صفائح او رقائق، بينما يتصف السريان المائر بالعنف الاضطراب.

و يمكن إثبات ان التحول من الحالة الصفائحية إلى الحالة المائرة عند معدل سريان ثابت يحدث بزيادة السرعة او زيادة القطر (diameter) او إنقاص اللزوجة. ويجمع المتغيرات الثلاثة مقدار لأُبعدي يعرف بعدد رينلز(Reynolds number) Re يحكم التحول المذكور. ويحدث هذا التحول للسريان في الانابيب في المدى $4000 \geq \mathrm{Re} \geq 2000$. ويسمى عدد رينولز الذي يحدث عنده التحول **عدد رينولز الحرج** Re_c .

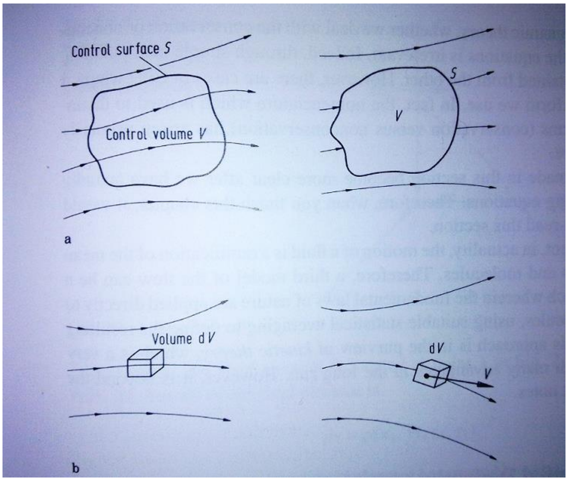
1.15 *المنظومة (system) وحجم التحكم (control volume) و موحل في الصغر.عضو مائعي (infinitesimal fluid element)*



الشكل 1.3

المنظومة معنية بكمية محددة من المادة يحدها عن بقية المائع جدار تخيلي او حقيقي و يمكن ان يعتبر موقعها وشكلها مع الوقت. حجم التحكم منطقة محددة وثابتة في المكان، ويمكن ان تتغير المادة دخل حجم التحكم مع الزمن. هذا الحجم التحكم مرسوم في الشكل (1.3.1 a)

على اليسار ولكن ايضاً يمكن ان ننظر الى حجم التحكم كما هو في الشكل (1.3.1 b) على اليمين و هو حجم التحكم يتحرك مع السريان.



الشكل (1.3.1 a and b)
([Wendt 2009], Fig. 2.1)

Fig. 1.3.1 a, left side: *finite control volume* V, an a finite control surface S *fixed in space*:

The fluid equations that we *directly* obtain by applying the fundamental physical principles to a finite control volume are in *integral form*.

These integral forms of the governing equations can be manipulated to *indirectly* obtain partial differential equations. The equations so obtained, in either integral or partial differential form, are

الشكل (**1.3.1 a**), الجهة اليسرى:حجم التحكم المحدود V؛سطح التحكم المحدود S ثابت في المساحة:

معادلات الموائع التي نحصل عليها مباشرة بتطبيق قواعد الفيزياء الاساسية الى حجم التحكم المحدود الذي يكون في شكل تكاملي.

هذه الاشكال التكاملية من المعادلة الاساسية تستطيع ان تُعالج بطريقة غير مباشرة للحصول على المعادلات التفاضلية الجزئية. المعادلات التي تم الحصول عليها، سواء في شكل تكاملي أو تفاضلي جزئي، تسمى الشكل التحفظي (*conservation form*) للمعادلات الاساسية.

المعادلات التي تم الحصول عليها عبر حجم التحكم المحدود تتحرك مع المائع (الشكل 1.3.1 الجانب الأيمن)، سواء في شكل تكاملي أو تفاضلي جزئي ، ويطلق عليه الشكل الغير تحفظي (*non-conservation form*) من المعادلات الاساسية.

called the *conservation form* of the governing equations.

The equations obtained from the finite control volume moving with the fluid (**Fig. 1.3.1 a, right side**), in either integral or partial differential form, are called the *non-conservation form* of the governing equations.

إذا أخذنا في الاعتبار عضو مائع متناهي الصغر، فهو ثابت في المساحة (الشكل **1.3.1 b** ، الجانب الأيسر) ، يمكن أن نشتق مباشرة المعادلات التفاضلية الجزئية. هذا هو ايضاً الشكل التحفظي.

If we consider an infinitesimal fluid element, which is fixed in space (**Fig. 1.3.1 b, left side**), we can *directly* derive the partial differential equations. This is again the conservation form.

إذا أخذنا في الاعتبار عنصر مائع متناهي الصغر ، والذي يتحرك في المساحة (الشكل **1.3.1 b** ، الجانب الأيمن) ، يمكن أن نشتق بشكل مباشر المعادلات التفاضلية الجزئية. ، هذا هو ايضاً النموذج الغير تحفظي.

If we consider an infinitesimal fluid element, which is moving in space (**Fig. 1.3.1 b, right side**), we can *directly* derive the partial differential equations. This is again the non-conservation form.

من الناحية النظرية الأيرودينامية العامة ، سواء نحن نتعامل مع أشكال التحفظي أو غير التحفظي

In general aerodynamic theory, whether we deal with the conservation or non conservation forms of equations

المعادلات هو سواء. ومع ذلك ، هناك حالات في ال CFD حيث المهم اي شكل نستخدم.

is irrelevant. However, there are cases in CFD where it is important which form we use.

1.16 الضغط المقياسي

الضغط المقياسي = الضغط المطلق – الضغط الجوي

1.17 القوة الجسمية والقوة السطحية

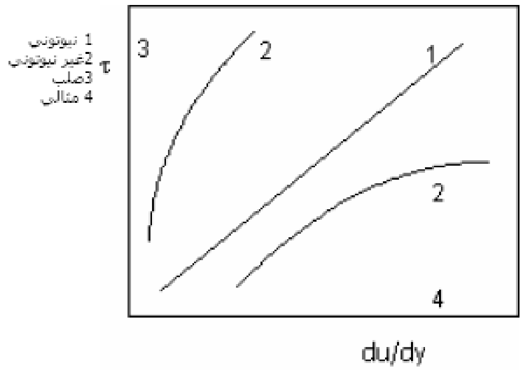
القوة الجسمية هي التي تنشأ عن كتلة الجسم مثل قوة الجاذبية والقوة السطحية هي تلك التي تعمل على سطح المادة وتنحصر في الضغط والقص.

1.18 الاجهاد القصي

تنسب الى نيوتن العلاقة النظرية بين الاجهاد القصي τ وممال السرعة في الاتجاه المتعامد $\frac{\partial u}{\partial y}$ للسريان الصفائحي و هي:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad ...(1.3)$$

وقد أجريت تجارب للتحقق من المعادلة معملياً و عُلم أنها صحيحة لمعظم الموائع المستخدمة في التطبيقات الهندسية مثل الماء والهواء و الوقود النفطي. و سُمي ثابت المعادلة μ باللزوجة أو اللزوجة المطلقة أو اللزوجة الحركية، ووحدتها Pa.s . وتعرف الموائع التي تستجيب لهذه العلاقة عند درجة حرارة ثابتة بالموائع **النيوتونية** - الشكل (1.4).



الشكل (1.4)

تُسمى فصيلة الموائع التي لا تُعطي علاقة خطية بين القص ومعدل السرعة موائع **لانيوتونية**. أمثلةٌ لها البوية و النفط الشمعي.

تؤثر درجة الحرارة في قيمة اللزوجة حيث تنقص مع ازدياد الحرارة للسوائل وتزيد مع ازدياد الحرارة للغازات .

تُعرف اللزوجة الكينماتية ν كما يلي: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ووحدتها m^2/s .

2 المعادلات الاساسية في ميكانيك الموائع (Governing Equations of Fluid Dynamics)

التالي منبني على [صديق]، فصل 2 و [Anderson 1991].

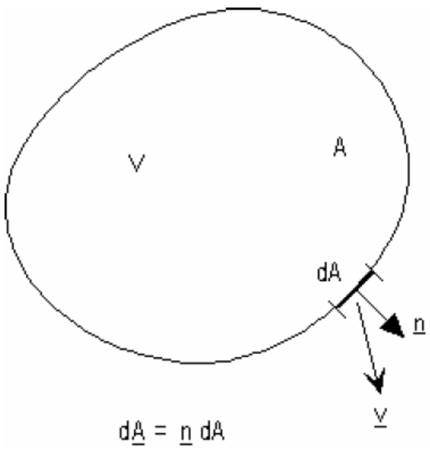
2.1 مدخل

الاساس في CFD هو المعادلات الاساسية في ميكانيك الموائع و هي معادلات الحفظ الثلاث:

حفظ الكتلة(mass conservation) وحفظ الطاقة (energy conservation) وحفظ كمية التحرك (momentum conservation). و قدم لذلك بتعريف متجه السريان الذي يشكل عنصراً مشتركاً في كل معادلات الحفظ.

2.1.1 متجه السريان

الشكل 2.1



الحجم التحكمي الموضح في الشكل (2.1) حجمه V و مساحته A. بالتركيز على المساحة التفاضلية dA فان الكتلة الخارجة عبرها هي dm في الوقت dt ليصبح معدل السريان $d\dot{m}$.

سرعة السريان في الموضع هي المتجه **v** بزاوية α مع المتجه أحادي الطول $\underline{n}$ المتعامد على المساحة dA حيث

$$d\underline{A} = \underline{n}\, dA$$

$$d\dot{m} = \rho d\dot{V} = \rho \underline{v} d\,\underline{A}$$

$\dot{m}$ = معدل سريان الكتلة عبر كل السطح A هو:

$$\dot{m} = \oiint_A \rho \underline{v} \cdot d\,\underline{A} \quad \text{.......................................}(2.1)$$

نعرف متجه سريان الكتلة كما يلي:

متجه سريان الكتلة = (متجه السرعة)(الكتلة في وحدة حجمية) = $\rho \underline{v}$

وبالمثل:

متجه سريان الطاقة = (متجه السرعة)(الطاقة في وحدة حجمية) = $\rho(e + \frac{v^2}{2} + gz)\underline{v}$

وبالمثل:

متجه سريان كمية التحرك = (متجه السرعة)(كمية التحرك في وحدة حجمية) = $\rho u \underline{v}, \rho v \underline{v}, \rho w \underline{v}$ في الاتجاهات x, y, z على التوالي.

و بذلك فان معدل سريان الطاقة عبر السطح A =

$$\oiint_A \rho(e + \frac{v^2}{2} + gz)\underline{v} \cdot d\,\underline{A} \quad \text{................................}(2.2)$$

و معدل سريان كمية التحرك عبر السطح A =

$$\oiint_A \rho \underline{v}(\underline{v} \cdot d\underline{A}) \qquad (2.3)$$

2.2 الاشتقاق الكبير (The Substantial Derivate)

As a model for the flow, we will adopt the picture shown at the right of Fig. 1.3.1 (b).

Namely that of an **infinitesimally small fluid element moving with the flow**. The motion of the fluid element is shown in detail in Fig. 2.2.1.

Here, the fluid element is moving through Cartesian space. The unit vectors along the x, y, z axis are $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

The vector velocity field in this Cartesian space is given by

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Where the components of velocity are given respectively by

$$u = u(x, y, z, t)$$
$$v = v(x, y, z, t)$$
$$w = w(x, y, z, t)$$

Note that we are considering in general an *unsteady flow,* where u, v, and w are functions of both (space and time, t). In addition the

كنموذج للسريان، سوف نعتمد على الصورة المعروضة على يمين الشكل (b) 1.3.1. ألا وهو عنصر من الموائع المتناهي الصغر تتحرك مع السريان. حركة عنصر السريان معروضة بالتفصيل في الشكل. 2.2.1.

هنا ، العنصر المائع يتحرك عبر الفضاء الديكارتي Cartesian space. وحدة المتجهات على طول المحور x, y, z، تكون $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

يتم اعطاء مجال متجهات السرعة في هذا المجال من قبل ديكارت Cartesian space عبر:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

حيث يتم إعطاء مكونات السرعة على التوالي

$$u = u(x, y, z, t)$$
$$v = v(x, y, z, t)$$
$$w = w(x, y, z, t)$$

علما أننا ناخذ بعين الاعتبار بالعموم سريان غير رتيب، حيث u, v و w هي وظائف المكان والزمان

scalar density field is given by $\rho = \rho(x, y, z, t)$.

t. على حدٍّ سواء، بالإضافة إلى ذلك هو إعطاء مقدار الكثافة العددية من قبل

. $\rho = \rho(x, y, z, t)$

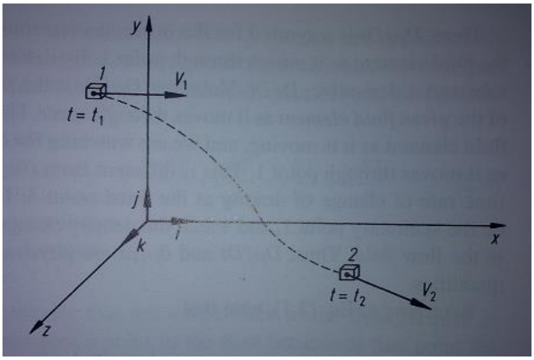


Fig. 2.2.1 ([Wendt 2009], Fig. 2.2)

الشكل (2.2.1) ([Wendt 2009], Fig. 2.2)

At the time t_1 the fluid element is located at point 1 in Fig. 2.2.1. At this point and time, the density of the fluid element is $\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$

At a later time t_2 the fluid element has moved to the point 2 where the density is $\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2)$

Since $\rho = \rho(x, y, z, t)$, we can expand this function in a Taylor's series about point 1 as follows:

في الوقت t_1 حيث يكون العنصر المائع موجود في النقطة 1 على الشكل. 2.2.1. عند هذه النقطة والوقت ، وكثافة العنصر المائع $\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$

في وقت لاحق t_2 انتقل العنصر المائع إلى نقطة 2 حيث الكثافة هي $\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2)$

بما ان $\rho = \rho(x, y, z, t)$ ، يمكننا توسيع نطاق هذه المهمة في سلسلة تايلور Taylor's series حول النقطة 1 على النحو التالي:

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 (x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 (y_2 - y_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 (z_2 - z_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 (t_2 - t_1)$$

+(higher order terms)

With ignoring the higher order terms we obtain

مع تجاهل مصطلحات التراتبية الأعلى لكي نحصل على

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{t_2-t_1}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_1\left(\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\right)+\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_1\left(\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}\right)+\left(\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_1+\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1 \qquad (2.1.1)$$

Eq. (2.1.1) is physically the average time-rate-of-change in density of the fluid element as it moves from point 1 to point 2. In the limit, as t_2 approaches t_1, this term becomes

المعادلة. (2.1.1) فيزيائياً هي متوسط الوقت لمعدل التغير في كثافة العنصر المائع وهي تنتقل من النقطة 1 إلى النقطة 2. في الحد، t_2 مثل نهج t_1 ، يصبح هذا المصطلح

$$\lim_{t_2\to t_1}\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{t_2-t_1}\right)\equiv\frac{D\rho}{Dt}$$

$\frac{D\rho}{Dt}$ Is a symbol for the *instantaneous* time rate of change of density.

By definition, this symbol is called the substantial derivate, D/Dt.

$\frac{D\rho}{Dt}$ هو رمز لحظية معدل الوقت لتغيير الكثافة.

وفقاً للتعريف ، هذا ما يسمى رمز الاشتقاق الكبير ، D/Dt.

$\frac{D\rho}{Dt}$ is the time rate of change of density of the *given fluid element*. Our eyes are locked with the fluid element, not with the point in the space. So $\frac{D\rho}{Dt}$ is different physically and numerically from $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1$ which is physically the time

$\frac{D\rho}{Dt}$ هو معدل الوقت لتغيير كثافة عنصر مائع معين. ونثبت أعيننا مع العنصر المائع، وليس مع نقطة في الفضاء.

كذلك $\frac{D\rho}{Dt}$ تختلف فيزيائياً وعدديا من $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1$ التي هي فيزيائياً المعدل الزمني لتغير الكثافة في نقطة ثابتة 1.

rate of change of density at the fixed point 1.

بالعودة الى المعادلة. (2.1.1) ، نلاحظ أنَّ

Returning to Eq. (2.1.1), note that

$$\lim_{t_2 \to t_1}\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right) \equiv u$$

$$\lim_{t_2 \to t_1}\left(\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\right) \equiv v$$

$$\lim_{t_2 \to t_1}\left(\frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}\right) \equiv w$$

Thus, taking the limit of Eq.(2.1.1) as $t_2 - t_2$, we obtain

وهكذا، بأخذ الحد للمعادلة (2.1.1) عندما $t_2 - t_2$ ، لنحصل

$$\frac{D\rho}{Dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} \qquad (2.1.2)$$

From (2.1.2) we obtain an expression for the substantial derivate in Cartesian coordinates

من (2.1.2) نحصل على التعبير عن الاشتقاق الكبير في الإحداثيات الديكارتية

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \qquad (2.1.3)$$

In cartesian coordinates the vector operator ∇ is defined as

في الإحداثيات الديكارتية يتم تعريف عامل المتجه ∇

$$\nabla \equiv \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \qquad (2.1.4)$$

Hence Eq.(2.1.3) can be written as

وبالتالي يمكن أن تكون المعادلة (2.1.3) مكتوبة

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \qquad (2.1.5)$$

Eq.(2.1.5) represents a definition of the substantial derivative operator in vector notation; thus it is valid for any coordinate system.

المعادلة (2.1.5) تمثل تعريف عامل الاشتقاق الكبير في تدوين المتجهات، وبالتالي يصح لأي نظام احداثيات.

$\frac{\partial}{\partial t}$ is called the ***local derivative*** which is physically the time rate of change at a fixed point; $\vec{V}\cdot\nabla$ is called the *consecutive derivative,* which is physically the time rate of cange due to the movement of the fluid element from one location to another in the flow field where the flow properties are spatially different. The substantial derivative applies to any flow-field variable, for example, Dp/Dt, DT/Dt, …, where p and T are static pressure and temperature respectively.

$\frac{\partial}{\partial t}$ تسمى **المشتقات المحلية** التي هي فعليا المعدل الزمني للتغيير في نقطة ثابتة، ويسمى الاشتقاق المتتالي، وهو فعليا معدل الوقت للتغيير بسبب حركة العنصر السائل من مكان إلى آخر في حقل السريان حيث خصائص السريان هي مختلفة مكانياً. الاشتقاق الكبير ينطبق على أي متغير في ميدان التدفق ، على سبيل المثال، Dp/Dt DT/Dt، حيث p و T هي الضغط ودرجة الحرارة على التوالي.

The substantial derivative is essentially the same as the total differential from calculus. Therefore, the substantial derivative is nothing more than a total derivative with respect to time.

الاشتقاق الكبير هو اساساً نفس مجموع التفاضل من حساب التفاضل و التكامل. لذلك ، الاشتقاق الكبير ليس أكثر من مجرد مجموع المشتقات مع احترام الوقت.

2.3 المعنى الفيزيائية من تباعد السرعة (divergence of velocity) $\nabla\cdot\vec{V}$

تباعد السرعة (divergence of velocity) $\nabla\cdot\vec{V}$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt} \quad \text{...(2.4)}$$

$\nabla \vec{V}$ is physically the time rate of change of the volume of a moving fluid element, per unit volume.

$\nabla \vec{V}$ هو التغيير الزمني لحجم التحكمي (control volume) من عضو مائع (fluid element) جارٍ (moving) و ذلك حسب الحجم التحكمي (per control volume)

2.4 حفظ الكتلة (mass conservation)

صيغة قانون حفظ الكتلة مطبقاً على سريان المائع:

"معدل تراكم الكتلة داخل الحجم التحكمي مضافاً إليه خالص معدل سريان الكتلة إلى خارج الحجم التحكمي يساوي صفر.

$$\oiiint_V \rho dV = \text{الكتلة الكلية داخل الحجم التحكمي}$$

معدل ازدياد الكتلة داخل الحجم التحكمي (control volume):

$$\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_V \rho dV = \oiiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

لأن حدود التكامل لا تعتمد على الوقت.

من المعادلة (2.1) خالص سريان الكتلة إلى خارج الحجم التحكمي

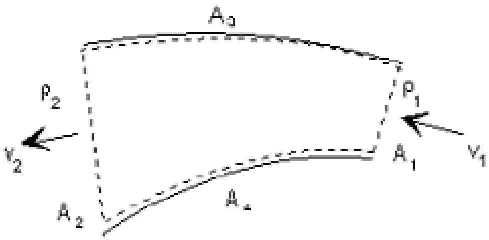
$$= \oiint_A \rho \underline{v} . d\underline{A}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oiint_A \rho \underline{v} . d\underline{A} = 0 \qquad \text{..................(2.4)}$$

المادلة (2.4) هي معادلة حفظ الكتلة في الصورة التكاملية (integral form).

تطبيق على سريان احادي البعد (الشكل 2.2):

الحد الاول في المعادلة (2.4) يساوي صفر نسبةً لرتابة السريان. السطحان (3) و (4) لا يعتبرهما كتلة. ولذلك يصير فيهما تكامل الحد الثاني و معادلة الكتلة صفراً.



الشكل 2.2

تختزل الكتلة بذلك الى الصورة:

$$\iint_{A_1} \rho \underline{v}_1 \cdot d\,\underline{A}_1 + \iint_{A_2} \rho \underline{v}_2 \cdot d\,\underline{A}_2 = 0$$

وبلاحظة ان المتجه $\underline{A}$ يتجه إلى خارج الحجم التحكمي

$$-\iint_{A_1} \rho v_1 \cdot dA_1 + \iint_{A_2} \rho v_2 \cdot dA_2 = 0$$

$$-\rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2 = 0$$

$$\rho v A = \text{ثابت} \quad \text{.......................................(2.5)}$$

2.4.1 معادلة الاستمرارية (continuity equation)

يطلق هذا الاسم عامةً على معادلة حفظ الكتلة في صورتها التفاضلية. بدءً من المعادلة (2.4) يمكن تحويل الحد الثاني من صورة التكامل السطحي الى صورة التكامل الحجمي باستخدام نظرية التباعد (divergence theorem).

للحصول على المعادلات الأساسية لحركة الموائع، يجب دائما اتباع الطريقة التالية :

- اختيار المبادئ الفيزيائية الأساسية المناسبة من الفيزياء
- تطبيق هذه المبادئ الفيزيائية لنموذج سريان مناسب.
- من هذا التطبيق، استخراج المعادلات الرياضية التي تتضمن المبادئ الفيزيائية.

لذا، في حالتنا الفيزيائية المبدأ هو : "الكتلة هي المحفوظة" ("Mass is Conserved").

To obtain the basic equations of fluid motion, always the following way is followed:

- Choose the appropriate fundamental physical principles from physics
- Apply these physical principles to a suitable model of the flow.
- From this application, extract the mathematical equations which embody such physical principles.

So, in our case the physical principle is: "Mass is Conserved".

$$\oiiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oiiint_V (\nabla . \rho \underline{v}) dV = 0$$

$$\oiiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \rho v \right) dV = 0$$

تبعاً لقوانين التكامل تكون قيمة المكامَل صفراً إذا كانت قيمة التكامل صفراً و كانت حدود التكامل اختياريةً.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \rho \underline{v} = 0 \ldots\ldots (2.6a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \ldots\ldots (2.6b)$$

حيث u ,v ,w هي مركبات السرعة في الاتجاهات x , y , z . و في حال ان السريان لا انضغاطي (incompressible flow)

$$\ldots\ldots \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

Divergence Theoreme:

اذا كانت $f = f(x, y, z)$
ل f هو المتجه:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{k} \ldots\ldots$$

اذا كانت $\underline{\varphi}$ متجه ذا مركبات مطلقة φ_x و φ_y و φ_z في الاتجاهات x و y و z ، على ، فان التباعد ل$\underline{\varphi}$

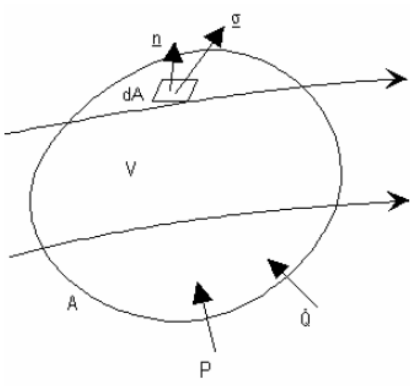
$$\nabla . \underline{\varphi} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \ldots\ldots$$

تربط نظرية التباعد التكامل الحجمي و التكامل السطحي بالعلاقة

$$\iiint_V \left(\nabla . \underline{\varphi}\right) dV = \iint_A \underline{\varphi} . d\underline{A} \ldots\ldots$$

2.5 حفظ الطاقة (energy conservation)

الشكل 2.5



تستمد معادلة حفظ الطاقة من القانون الاول للحركية الحرارية مطبقاً على حجم تحطمي:

"معدل تراكم الطاقة داخل الحجم التحكمي مضافاً اليه خالص معدل سريان الطاقة الى خارج الحجم التحطمي بانتقال الكتلة يعادل القدرة المبذولة على المائع داخل الحجم التحكمي مضافاً اليها خالص معدل سريان الحرارة إلى داخل الحجم التحكمي".

$$\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_V \rho(e+\frac{v^2}{2}+gz)dV+\oiint_A \rho(e+\frac{v^2}{2}+gz)\underline{v}.d\underline{A}=\oiint_A(\underline{\sigma}.\underline{v})dA+P+\dot{Q}$$

الحدان الاوليان في جانب المعادلة الأيمن يعبران عن القدرة المبذولة على المائع داخل الحجم التحكمي، و $\dot{Q}$ معدل سريان الحرارة إلى داخل الحجم التحكمي. **بتجاهل اللزج** (viscosity) يصبح الإجهاد (stress) σ:

$$\underline{\sigma}=-p\underline{n}$$

<-

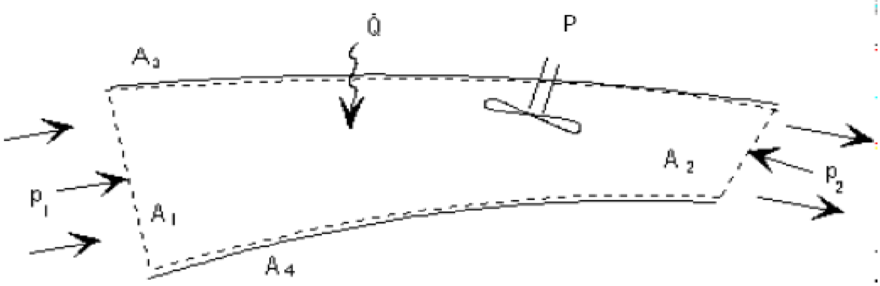
$$\oiiint_V \frac{\partial}{\partial t}[\rho(e+\frac{v^2}{2}+gz)]dV+\oiint_A \rho(e+\frac{v^2}{2}+gz)\underline{v}\cdot d\underline{A}=-\oiint_A p\underline{v}\cdot d\underline{A}+P+\dot{Q}$$

$$\oiiint_V \frac{\partial}{\partial t}[\rho(e+\frac{v^2}{2}+gz)]dV+\oiint_A \rho(e+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gz)\underline{v}\cdot d\underline{A}=P+\dot{Q}\text{..........}(2.8)$$

تطبيق على سريان رتيب أحادي البعد:

رتابة السريان تعني أن الحد الأول في المعادلة (2.8) يساوي صفر، و لا انتقال للكتلة عبر الأسطح (3) و (4).

وبذلك تُختزل المعادلة إلى الصورة



الشكل 2.5

$$-\rho_1(e_1+\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{v_1^2}{2}+gz_1)v_1A_1+\rho_2(e_2+\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{v_2^2}{2}+gz_2)v_2A_2=P+\dot{Q}$$

بالاستعانة بمعادلة حفظ الكتلة للسريان الرتيب أحادي البعد (2.5)

$$\rho_1 \boldsymbol{v}_1 A_1 = \rho_2 \boldsymbol{v}_2 A_2 = \dot{m}$$

$$\dot{m}(e_1+\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{v_1^2}{2}+gz_1)+P+\dot{Q}=\dot{m}(e_2+\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{v_2^2}{2}+gz_2)$$

$$\frac{e_1}{g}+\frac{p_1}{\rho_1 g}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1+\frac{P}{\dot{m}g}+\frac{\dot{Q}}{\dot{m}g}=\frac{e_2}{g}+\frac{p_2}{\rho_2 g}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2.9)$$

في كثير من التطبيقات الهندسية يمكن تجاهل انتقال الحرارة $\dot{Q}=0$

و تجاهل التغير في درجة الحرارة $T_1 = T_2\,,\quad e_1 = e_2$

ويمكن اعتبار السريان لا انضغاطي $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

فتصبح المعادلة (2.9)

$$\frac{p_1}{\rho_1 g}+\frac{v_1^{\,2}}{2g}+z_1+\frac{P}{\dot{m}\,g}=\frac{p_2}{\rho_2 g}+\frac{v_2^{\,2}}{2g}+z_2 \quad\ldots\ldots\ldots(2.10)$$

في حال أن القدرة P موجبة فإنها تمثل مضخة و إذا كانت سالبة فتمثل عنّفة.

في حال عدم وجود مضخة أو عنفة بين المقطعين (1) و (2) تصبح المعادلة (2.10)

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^{\,2}}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^{\,2}}{2g}+z_2 = \text{السمت الكلي} \quad\ldots\ldots(2.11)$$

أي: السمت الكلي = سمت الرفع + سمت السرعة + سمت الضغط

مثال

يُعرّف الآتي عن وحدة ضخ ترفع الماء من النيل إلى أعلى الجرف:

الرفع: 8m

معدل السريان الحجمي 15 l/s

قطر الأنبوب صعيد المضخة: 154mm

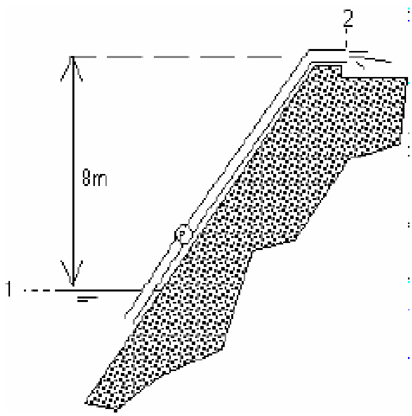
قطر الأنبوب سافل المضخة: 102mm

كثافة الماء: $1000 kg\backslash m^3$

المطلوب حساب:

(أ) السرعة صعيد وسافل المضخة

(ب) القدرة الخارجة من المضخة إذا اعتبرنا السريان لا لزجي.



الشكل (2.6)

(أ) معادلة حفظ الكتلة (2.5) للسريان اللاإنضغاطي تُعطي

$$\boldsymbol{v}_u \,.\, A_u = \boldsymbol{v}_d .\, A_d = \dot{V} = 0.015\ m^3/s$$

$$v_u = \frac{0.015}{\frac{\pi}{4}(0.154)^2} = 0.81 m/s$$

$$v_d = \frac{0.015}{\frac{\pi}{4}(0.102)^2} = 1.84 m/s$$

حيث اللاحقة u تعني صعيد المضخة و اللاحقة d تعني سافل المضخة.

(ب) معادلة الطاقة لهذه الحالة (2.10)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^{\,2}}{2g} + z_1 + \frac{P}{\dot{m}\, g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^{\,2}}{2g} + z_2$$

$$P = \dot{m}\, g \left[\frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^{\,2} - v_1^{\,2}}{2g} + \left(z_2 - z_1 \right) \right]$$

المقطعان (1) و (2) مفتوحان للجو و يعني ذلك

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$p_2 - p_1 = 0$$

كما أن $z_2 - z_1 = 8$

السطح (1) سطح النيل: سرعة نقصانه صفر !

$$v_1 = 0 \ , \ v_2 = v_d$$

معدل سريان الكتلة $\dot{m}$

$$\dot{m} = \rho\, \dot{V} = 1000(0.015) = 15.0\ kg/s$$

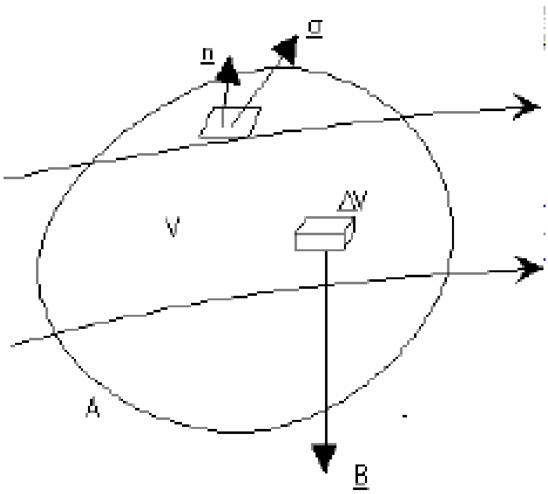
وتصبح المعادلة

$$\mathbf{P = (15.0)(9.81)\ [\ \frac{(1.84)^2}{2(9.81)} + 8\ ] = 1203W}$$

القدرة الخارجة = **1.2 kW**

2.6 حفظ كمية التحرك (momentum conservation)

الشكل 2.6



يستمد هذا القانون من قانون نيوتن الثاني (Second Newtonian Law) للحركة مطابقاً على حخم التحكمي: "معدل تراكم كمية التحرك داخل الحجم التحكمي مضافاً اليه خالص معدل سريان كمية التحرك إلى خارج الحجم التحكمي بإنتقال الكتلة يعادل مجموع القوى المؤثرة على المائع".

$$\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_V (\rho \underline{v}) dV + \oiint_A \rho \underline{v}(\underline{v}.d\underline{A}) = \oiiint_V \underline{B} dV + \oiint_A \underline{\sigma} dA$$

$$\oiiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) dV + \oiint_A \rho \underline{v}(\underline{v}.d\underline{A}) = \oiiint_V \underline{B} dV + \oiint_A \underline{\sigma} dA \quad ....(2.12)$$

نسترجع هنا أن الإجهاد $\underline{\sigma}$ يساوي مجموع المتجهين $p\underline{n}$ - و $\underline{\tau}$. كما أن $\underline{B}$ هي القوة الجسمية على وحدة حجمية و تتمثل في الأحوال الأعم في قوة الجاذبية على وحدة حجمية أي $\underline{B} = -\rho g \underline{k}$.

2.7 تلخيص المعادلات الاساسية (governing equations) لديناميك الموائع مع ملاحظات

2.7.1 معادلات السريان اللزجي (viscous flow) دون النظر الى تفاعلات الكيميائية (without considering chemical reactions)

Viscous flow: a flow which includes the dissipative, transport phenomena of viscosity and thermal conduction. The additional transport phenomenon of mass diffusion is not included because we are limiting our considerations to a homogenous, non-chemically reacting gas. Combustion for example is a flow with a chemical reaction. If diffusion were to be included, there would be additional continuity equations – the species continuity equations involving mass transport of chemical species *i* due to a concentration gradient in the species.

Moreover the energy equation would have an additional term to account for energy transport due to the diffusion of species.

With the above restrictions in mind, the governing equations for an unsteady, three-dimensional, compressible, viscous flow are:

السريان اللزجي هو الذي يتضمن ظواهر التبدد والنقل ، اللزوجة والتوصيل الحراري إضافة لم يتم تضمين ظاهرة النقل لنشر الكتلة لأننا قمنا بتحديد اعتباراتنا إلى تفاعلات غاز متجانسة و غير كيميائيا. الاحتراق على سبيل المثال هو سريان مع تفاعل كيميائي. إذا كان لا بد من شمل النشر، لن يكون هناك معادلات استمرارية إضافية -- أنواع معادلات الاستمرارية التي تنطوي على نقل الكتلة للأنواع الكيميائية i بسبب تدرج التركيز للأنواع.

وعلاوة على ذلك فإن معادلة الطاقة لديها إضافة مدة على حساب نقل الطاقة بسبب انتشار الأنواع.

مع الاخذ في الاعتبار القيود المذكورة أعلاه ، والمعادلات الاساسية لغير ثابت، ثلاثي الأبعاد انضغاطي، ، والسريان اللزج هي :

Continuity equations

معادلات الاستمرارية

(Non-conservation form – [Wendt 2009], Eq.2.18)

(بالشكل الغير محافظي)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

الشكل التحفظي

(Conservation form – [Wendt 2009], Eq. 2.27)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

Equation [Wendt 2009], (2.18) is the continuity equation in non-conservation form. Note that:

1) By applying the model of an *infinitesimal fluid element*, we have obtained Eq. [Wendt 2009], (2.18) *directly* in partial differential form.
2) By choosing the model to be *moving with the flow*, we have obtained the ***non-conservation*** form of the continuity equation, namely Eq. [Wendt 2009], (2.18).

Equation [Wendt 2009], (2.27) is the continuity equation in ***conservation*** form. Note that:

1) By applying the model of a *finite control volume*, we have obtained Eq. [Wendt 2009], (2.23) *directly* in integral form. Only after some manipulation of the integral form the partial differential form, namely Eq. [Wendt 2009], (2.27), is obtained.
2) By choosing the model to be *fixed in space*, we have obtained the conservation form of the continuity equation, namely Eqs. [Wendt 2009], (2.13) and (2.27).

المعادلة Wendt 2009], (2.18) هي معادلة الاستمرارية في **الشكل الغير تحفظي**.

ملاحظة ما يلي :

1) من خلال تطبيق نموذج لعنصر مائع متناهي الصغر، لنحصل على المعادلة. [Wendt 2009], (2.18) مباشرة على شكل تفاضلي جزئي.
2) عن طريق اختيار النموذج الذي يتحرك مع السريان، لقد حصلنا على **الشكل الغير تحفظي** لمعادلة الاستمرارية ، وهي المعادلة. [Wendt 2009]، (2.18).

المعادلة [Wendt 2009]، (2.27) هي معادلة الاستمرارية في **الشكل التحفظي**

ملاحظة ما يلي :

1) من خلال تطبيق نموذج لمراقبة الحجم المحدود، حصلنا على المعادلة. [Wendt 2009]، (2.23) مباشرة في شكل

متكامل. فقط بعد مرور بعض معالجات للشكل التفاضلي الجزئي. اي [Wendt 2009]، (2.27).التي حصلنا عليها

2) عن طريق ختيار نموذج للتثبيت في الفضاء، لنحصل على شكل التحفظي لمعادلة الاستمرارية

معادلات كمية التحرك **Momentum equations**

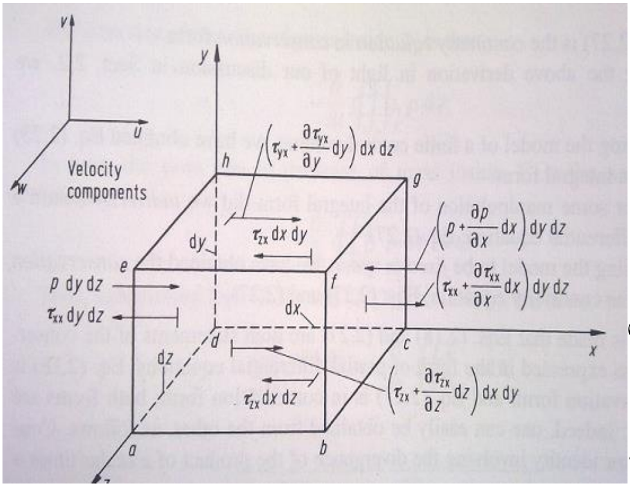
(Non-conservation form – [Wendt 2009], Eqs. 2.36a-c)

$$\text{x-component:}\quad \rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\rho f_x$$

$$\text{y-component:}\quad \rho\frac{Dv}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\rho f_y$$

$$\text{z-component:}\quad \rho\frac{Dw}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}+\rho f_z$$

[Wendt 2009], Fig.2.5: Infinitesimally small, moving fluid element. Only the forces in the x direction are shown.



Wendt] 2009[، الشكل 2.5: تحرك لعنصر مائع متناهي الصغر. لا تظهر إلا للقوات في الاتجاه x.

Total force in the x-direction: F_x

F_x هي القوة الاجمالية في اتجاه x

[Wendt 2009], S.28 Def. of body forces and surface forces:

هناك نوعين من القوة في هذا الايطار:

1) *Body forces*, which act directly on the volumetric mass of the fluid element. **Examples: gravitational,**

1) **قوات جسمية** التي تتفاعل مباشرةً على الكتلة الحجمية للعضو مائعي (fluid

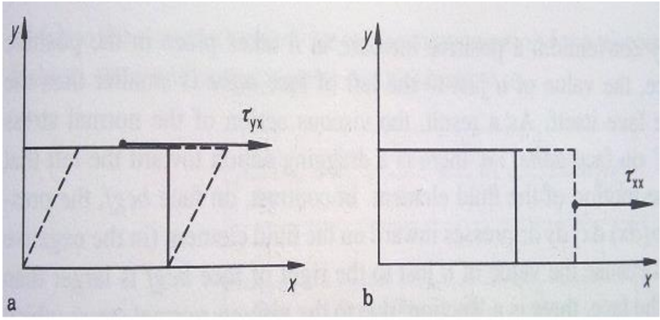
electric and magnetic forces. Def.: body force on the fluid element acting in the x-direction $= \rho f_x (dxdydz)$.

2) *Surface forces*, which act directly on the surface of the fluid element. They are due to only two sources: (a) pressure distribution acting on the surface, imposed by the outside fluid surrounding the fluid element, and (b) the shear and normal stress distributions acting on the surface, also imposed by the outside fluid “tugging” or “pushing” on the surface by means of friction.

element). و امثلة هي: القوة الجاذبية والكهروبائية والمغناطسية.

تعريف: القوة الجسمية على العضو المائع تتمثل في الاتجاه x = $\rho f_x (dxdydz)$

2) **قوات سطحية** التي تتفاعل مباشرة على سطع العضو المائعي.وهو ناشىء من مصدرين اثنين فقط : (a) توزيع الضغط التي تعمل على السطح ,التي يفرضها خارج المائع في المناطق المحيطة بالعنصر المائع، و (b) هي توزيعات الضغط الطبيعي و القص التي تعمل على السطح ، كما فرضت من قبل خارج المائع "التجاذبات" أو "الدفع" على السطح عن طريق الاحتكاك.



[Wendt 2009], Fig.2.6: Illustration of shear and normal stresses

[Wendt 2009], الشكل 2.6: رسم توضيحي للقص و للضغوضات الطبيعية

(Conservation form – [Wendt 2009], Eqs. 2.42a-c)

الشكل التحفظي– [Wendt 2009], Eqs. – 2.42a-c))

x-component: $$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho u\vec{V})=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}-\rho f_x$$

y-component: $$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v\vec{V})=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}-\rho f_y$$

z-component: $$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho w\vec{V})=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}-\rho f_z$$

Energy equation

معادلة الطاقة

(Non-conservation form – [Wendt 2009], Eq. 2.52)

الشكل الغير تحفظي

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$
$$-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}-\frac{\partial(wp)}{\partial z}+\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}+\rho\vec{f}\cdot\vec{V}$$

(Conservation form – [Wendt 2009], Eq. 2.64) الشكل التحفظي

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\vec{V}\right)\right]$$
$$=\rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}-\frac{\partial(wp)}{\partial z}+\frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z}+\rho\vec{f}\cdot\vec{V}$$

2.7.2 معادلات السريان الا لزجي (inviscous flow) دون النظر الى تفاعلات الكيميائية (without considering chemical reactions)

Here are the viscous terms of the above equations dropped.

هنا شروط اللزوجة لمعادلات الإسقاط أعلاه.

2.7.3 تعليقات على المعادلات الاساسية

اذا تأملنا المعادلات الاساسية، نستطيع ان نقول التالي:

1) هي مجموعة مزواجة من المعادلات التفاضلية الجزئية الغير خطية وبالتالي من الصعب جدا حلها تحليلياً, حتى الآن ، لا يوجد اي حل تحليلي لهذه المعادلات.

2) لمعادلات كمية التحرك والطاقة ، الفرق بين الأشكال الغير تحفظية و التحفظية على المعادلة هو مجرد الجانب الأيمن.

3) لاحظ أن شكل التحفظي للمعادلات تحتوي شروط على الجانب الأيمن, التي تشمل بعض الاختلاف في الكمية ، مثل $\nabla\cdot(\rho\cdot\vec{V})$, $\nabla\cdot(\rho u\vec{V})$ وما إلى ذلك. لهذا السبب ، يسمى في بعض الأحيان الشكل التحفظي للمعادلات الاساسية بشكل التباعد.

Surveying the above governing equations, several comments and observations can be made:

1) They are coupled system of non-linear partial differential equations, and hence are very difficult to solve analytically. To date, there is no general closed-form solution to these equations.

2) For the momentum and energy equations, the difference between the non-conservation and conservation forms of the equation is just the left-hand side.

3) Note that the conservation form of the equations contain terms on the left-hand side which include the divergence of some quantity, such as $\nabla\cdot(\rho\cdot\vec{V})$, $\nabla\cdot(\rho u\vec{V})$, etc. For this reason, the conservation form of the governing equations is sometimes called the *divergence form*.

4) The normal and stress terms in these equations are functions of the velocity gradients, as given by [Wendt 2009], Eqs. (2.43a-f).

5) The system contains five equations in terms of six unknown flow-field variables, ρ, p, u, v, w, e. In aerodeynamics, it is generally reasonable to assume the gas is a perfect gas (which assumes that intermolecular forces are negligible). For a perfect gas, the equation of state is $p = \rho RT$, where R is the specific gas constant. This provides a sixth equation, but it also introduces a seventh unknown, namely temperature, T. A seventh equation to close the entire system must be a thermodynamic relation between state variables. For example, e = e(T,p) For a calorically perfect gas (constant specific heats), this relation would be $e = c_v T$

4) الشروط العادية و الضغط، في هذه المعادلات هي دالات من تدرجات السرعة ، كما معطى حسب.[Wendt 2009], Eqs. (2.43a-f)

5) تحتوي المنظومة على خمسة معادلات في المصطلحات لستة متغيرات غير معروفة لحقل سريان ρ, p, u, v, w, e . في الديناميكا الجوية ، من المعقول أن نفترض عموما الغاز هو غاز المثالي (الذي يفترض أن القوات بين الجزيئات تكاد لا تذكر). بالنسبة للغاز مثالي ، المعادلة للحالة هي $p = \rho RT$ حيث R هو الثابت المحدد للغاز. هذا يعطي المعادلة السادسة ، لكنه يقدم أيضا مجهول سابع ، وهي درجة الحرارة ، T .المعادلة السابعة لإغلاق النظام بأكمله يجب أن تكون علاقة حرارية بين متغيرات الحالة. على سبيل المثال ، e = e(T,p) بالنسبة لغاز مثالي بالوحدات الحرارية (تسخين ثابت محدد) ، فسوف تكون

where c_v is the specific heat at constant volume.

هذه العلاقة $e = c_v T$ حيث c_v هي الحرارة النوعية لحجم ثابت.

6) Historically, the momentum equations for a viscous flow are called the ***Navier-Stokes equations***. However, in modern CFD literature, "a Navier-Stokes solution" simply means a solution of a *viscous flow problem* using *full governing equations (including continuity as well as energy and momentum)*.

6) تاريخيا ، وتسمى معادلات كمية التحرك للتدفق اللزج بمعادلات نافيير ستوكس (**Navier-Stokes**). ومع ذلك ، في الأدب ال CFD الحديث "، وهو حل نافيير ستوكس" يعني ببساطة إيجاد حل لمشكلة التدفق اللزج باستعمال المعادلات الاساسية (بما في ذلك الاستمرارية فضلا عن الطاقة وكمية التحرك).

2.7.4 الحالات الجدارية (boundary conditions)

The boundary conditions, and sometimes the initial conditions, dictate the particular solutions to be obtained from the governing equations. (This makes the difference for example between the flow over a Boing 757 or past a wind mill, although the equations are the same). For a viscous fluid, the boundary condition on a surface assumes no relative velocity between the surface and the gas immediately at the

الحالات الجدارية ، وأحيانا الحالات الأولية، تملي حلولا معينة التي يمكن الحصول عليها من المعادلات الاساسية. (وهذا ما يجعل الفرق مثلا بين السريان على ال Boing 757 او طاحونة الرياح السابقة ، على الرغم من ان المعادلات هي نفسها). للمائع اللزج، الحالة الجدارية على السطح لا تتحمل السرعة النسبية بين السطح والغاز مباشرة على السطح. وهذا ما يسمى حالة عدم الانزلاق (*no*-

surface. This is called the *no-slip* condition. If the surface is stationary, then $u = v = w = 0$ at the surface (for a viscous flow).

For an inviscid fluid, the flow slips over the surface (there is no friction to promote its 'sticking' to the surface); hence, at the surface, the flow must be tangent to the surface. $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ at the surface (for a inviscid flow), where $\vec{n}$ is a unit vector perpendicular (that means orthogonal) to the surface. The boundary conditions elsewhere in the flow depend on the type of problem being considered, and usually pertain to inflow and outflow boundaries at a finite distance from the surfaces, or an 'infinity' boundary condition infinitely far from surface.

The boundary conditions discussed above are physically boundary conditions in nature.

In CFD we have an additional concern, namely the proper numerical implementation of the boundary conditions.

(*slip*). إذا كان السطح هو ثابت اذاً $u = v = w = 0$ على السطح (للسريان اللزج)

للسائل الغير لزجي، السريان ينزلق على السطح (لا يوجد احتكاك من أجل تعزيز "اللصق" على السطح)، وبالتالي على السطح، السريان يجب أن يكون مماس الى السطح. $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ على السطح (للسريان الالزجي) حيث $\vec{n}$ هو وحدة متجه عمودي (وهذا يعني متعامد) على السطح. الحالات الجدارية في أماكن أخرى من السريان يعتمد على نوع المشكلة التي يجري النظر فيها، وتتعلق عادة بحدود السريان الداخل و الخارج على مسافة محدودة من السطوح ، أو حالة الحدود "اللانهاية" التي بشكل مطلق بعيدة من السطح. الحالات الجدارية التي نوقشت أعلاه هي فعليا الحالات الجدارية الفيزيائية في الطبيعة. في CFD لدينا قلق إضافي، لمعرفة التنفيذ العددية السليم للحالات الجدارية.

2.8 اشكال للمعادلات الاساسية تلائم مع د.م.ح.: ملاحظات على الشكل التحفظي (conservation form)

نستطيع ان نكتب مجموعة المعادلات الاساسية بالشكل التحفظي (conservation form) بالشكل العام التالي:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}=J} \qquad \text{[Wendt], Eq. 2.65}$$

حيث

$$U=\begin{Bmatrix}\rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho(e+V^2/2)\end{Bmatrix}$$

$$H=\begin{Bmatrix}\rho w \\ \rho u w-\tau_{zx} \\ \rho v w-\tau_{zy} \\ \rho w^2+p-\tau_{zz} \\ \rho(e+V^2/2)w+pw-k\dfrac{\partial T}{\partial z}-u\tau_{zx}-v\tau_{zy}-w\tau_{zz}\end{Bmatrix}$$

$$F=\begin{Bmatrix}\rho u \\ \rho u^2+p-\tau_{xx} \\ \rho v u-\tau_{xy} \\ \rho w u-\tau_{xz} \\ \rho(e+V^2/2)u+pu-k\dfrac{\partial T}{\partial x}-u\tau_{xx}-v\tau_{xy}-w\tau_{xz}\end{Bmatrix}$$

$$J=\begin{Bmatrix}0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho f_z \\ \rho(uf_x+v\rho f_y+w\rho f_z)+p\,\dot{q}\end{Bmatrix}$$

$$G=\begin{Bmatrix}\rho v \\ \rho u v-\tau_{yx} \\ \rho v^2+p-\tau_{yy} \\ \rho w v-\tau_{yz} \\ \rho(e+V^2/2)v+pv-k\dfrac{\partial T}{\partial y}-u\tau_{yx}-v\tau_{yy}-w\tau_{yz}\end{Bmatrix}$$

In [Wendt], Eq. 2.65, the column vectors F, G, and H are called the flux terms (or flux vectors), and J represents a 'source term' (which is zero if body forces are negligible). For an unsteady problem, U is called the solution vector because the elements in $U\ (\rho, \rho u, \rho v, \text{etc.})$ are the dependent variables which are usually solved numerically in steps of time. Please note that, in this formalism, it is the elements of U that are obtained computationally, i.e. numbers are obtained for the products $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$ and $\rho(e+V^2/2)$. Of course, once numbers are known for these dependent variables (which includes ρ by itself), obtaining the primitive variables is simple:

في المعادلة **[Wendt], Eq. 2.65**، الموجهات العمودية F و G و Hتسمى الموجهات السريانية، و J يمثل "مصطلح مصدر" (والذي هو صفر إذا كانت قوى الجسم تكاد لا تذكر). لمشكلة غير رتيبة، تسمى U متجه الحل لان العناصر في $U(\rho, \rho u, \rho v, ...)$ هي التي تعتمد على متغيرات يتم حلها عادة عدديا في خطوات الزمن. يرجى ملاحظة أنه في هذه الشكليات، فإن عناصر U هي التي يتم الحصول عليها حسابياً ،مثلاً الارقام التي يتم الحصول عليها للمنتجات $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$ و $\rho(e+V^2/2)$ بطبيعة الحال،عندما تعرف الارقام لاول مرة لهذه المتغيرات التابعة (التي تضم ρ في حد ذاته)، الحصول على المتغيرات البدائية هي بسيطة :

$$\rho = \rho$$
$$u = \frac{\rho u}{\rho}$$
$$v = \frac{\rho v}{\rho}$$
$$w = \frac{\rho w}{\rho}$$
$$e = \frac{\rho(e + V^2/2)}{\rho} - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$$

For an *inviscid flow*, [Wendt et. al. 2009], Eq.(2.65) remains the same, except the elements of the column vectors are simplified. Examining the conservation form of the inviscid equations summerized in Sect. 2.7.2, we find that

لسريان لا لزجي المعادلة [Wendt et. al., 2009] Eq.(2.65) تبقى كما هي، الا ان الموجهات العامودية اصبحت ابسط.

اذا تأملنا الشكل التحفظي للمعادلات اللا لزجية في باب 2.7.2 نجد ان

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho(e + V^2/2) \end{Bmatrix} \qquad F = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho w u \\ \rho u(e + V^2/2)u + pu \end{Bmatrix}$$

$$G = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho wv \\ \rho v(e+V^2/2) + pv \end{Bmatrix} \qquad H = \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho w(e+V^2/2) + pw \end{Bmatrix}$$

$$J = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho f_z \\ \rho(uf_x + v\rho f_y + w\rho f_z) + p\dot{q} \end{Bmatrix}$$

For the numerical solution of an unsteady inviscid flow, once again the solution vector is U, and the dependent variables for which numbers are directly obtained are products $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$ and $\rho(e+V^2/2)$. For a steady inviscid flow, $\partial U / \partial t = 0$.

Frequently, the numerical solution to such problems takes the form of 'marching' techniques; for example, if the solution is being obtained by marching in the x-direction, then [Wendt et. al.

للحل العددي للسريان اللازجي الغير رتيب، مرة أخرى متجه الحل هو U ، والمتغيرات التابعة لاية ارقام التي يتم الحصول عليها مباشرة من المنتجات $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$ و $\rho(e+V^2/2)$. للسريان اللالزجي الرتيب $\partial U / \partial t = 0$.

في كثير من الأحيان، فإن الحل العددي لهذه المشاكل تأخذ شكل تقنيات "سيرية"('marching')، على سبيل المثال، إذاكان يتم الحصول على حل عن طريق السير في اتجاه x ، ثم [Wendt et. al. 2009], Eq.(2.65) يمكن كتابتها على النحو التالي

2009], Eq.(2.65) can be written as

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = J - \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}}$$ [Wendt], Eq. 2.66

Here, F becomes the 'solution vector', and the dependent variables for which numbers are obtained are $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$ and $\rho(e+V^2/2)$. From these dependent variables, it is still possible to obtain the primitive variables, although the algebra is more complex than in the previously discussed case.

Notice that the governing equations when written in the form of [Wendt et. al. 2009], Eq.(2.65), have no flow variables outside the single x,y,z, and t derivates. Indeed, the terms in [Wendt et. al. 2009], Eq. (2.65) have everything buried inside these derivates. The flow equations in the form of [Wendt et. al. 2009], Eq.(2.65) are said to be in strong conservation form. In contrast, examine the forms [Wendt et. al. 2009], Eq.(2.42a,b and c) and [Wendt et. al. 2009],

هنا F تصبح "متجه المحلول" و المتغييرات التابعة لاية ارقام يمكن الحصول عليها تكون $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$ و $\rho(e+V^2/2)$. من هذه المتغييرات التابعة يمكن دائماً الحصول على المتغييرات الاولية (primitive variables) على الرغم من أن الجبر هو أكثر تعقيدا مما كانت عليه في الحالة التي نوقشت سابقا.نلاحظ أن المعادلات الاساسية عند كتابتها في الشكل من [Wendt et. al. 2009] ، المعادلة (2.65) ، ليس لديهم متغيرات السريان خارج المفرد X ، Yو Z، والمشتقات t. في الواقع ، الشروط في [Wendt et. al. 2009], Eq.(2.65) لديها كل شيء متخفي داخل هذه المشتقات. معادلات السريان في الشكل [Wendt et. Al 2009], Eq. (2.65) تكون معروفة باسم الشكل التحفظي القوي في المقابل ، دراسة أشكال [Wendt et. al. 2009], Eq. (2.42a,b and c)

Eq.(2.64). These equations have a number of x,y and z derivates expliticly appearing on the right –hand side. These are the *weak conservation* form of the equations.

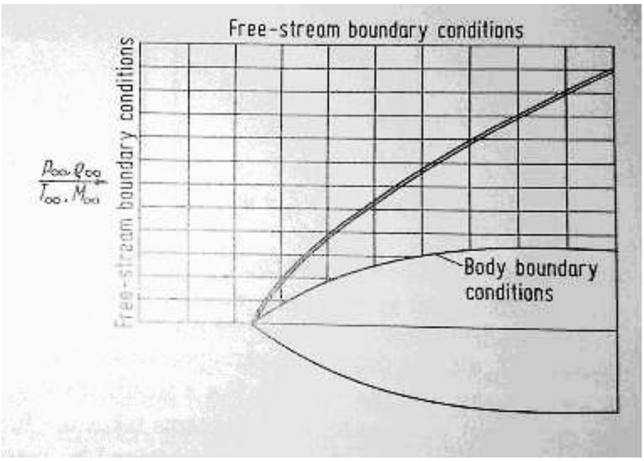
The form of the governing equations giving by Eq. (2.65) is popular in CFD; let us explain why. In flow fields involving shock waves, there are sharp, discontinuous changes in the primitive flow-field variables p, p, u, T, etc., across the shocks. Many computations of flows with shocks are designed to have the shock waves appear naturally within the computational space as a direct result of the overall flow field solution, i.e. as a direct result of the general algorithm, without any special treatment to take care of the shocks themselves. Such approaches are called shock capturing methods. This is in contrast to the alternate approach, where shock waves are explicitly introduced into the

[Wendt et. al. 2009], Eq.(2.64). هذه المعادلات لديها عدد من المشتقات x ، y و z التي تظهر بوضوح على الجانب الأيمن.هذه هي الاشكال التحفظية الضعيفة في المعادلة.

شكل المعادلات الاساسية معطى عبر المعادلة. (2.65) هي معروفة جداً في CFD؛ دعونا نوضح السبب. في مجالات السريان تشمل موجات الصدمة، هناك تكون حادة، التغيرات المتقطعة في متغيرات مجال السريان الاولي (primitive flow-field variables): p, p, u, T, ..., ، عبر الصدمات. صممت العديد من حسابات السريان مع الصدمات هي مصممة لتظهر موجات الصدمة بشكل طبيعي في غضون الحسابية كنتيجة مباشرة من محلول حقل السريان العام، أي كنتيجة مباشرة للخوارزمية العامة، دون أي معالجة خاصة لاخذ الحذر من الصدمات نفسها. ويسمى هذا النهج أساليب التقاط الصدمة. هذا هو النقيض للنهج البديل ، حيث يتم إدخال بوضوح موجات الصدمة

flow-field solution, the exact Rankine-Hugoniot relations for changes across a shock are used to relate the flow immediately ahead of and behind the shock, and the governing flow equations are used to calculate the remainder of the flow field. This approach is called the shock-fitting method. These two different approaches are illustrated in Figs. 2.8 and 2.9. In Fig.2.8, the computational domain for calculating the supersonic flow over the body extends both upstream and downstream of the nose. The shock wave is allowed to form within the computational domain as a consequence of the general flow-field algorithm,

في محلول مجال السريان، يتم استخدام العلاقات الدقيقة Rankine-Hugoniot للتغييرات عبر الصدمة لربط السريان مباشرةً امام و وراء الصدمة ، و معادلات السريان الاساسية تُستخدم لحساب ما تبقى من مجال السريان. وهذا ما يسمى نهج أسلوب الصدمة المناسب (shock-fitting method). ويتضح هذين النهجين المختلفين في الشكل. 2.8 و 2.9. في الشكل 2.8، المجال الحسابي لحساب السريان الفوق الصوتي على أنحاء الجسم تمتد على حد سواء المنبع والمصب من الأنف. موجة الصدمة هي مخصصة للتشكل في المجال الحسابي نتيجة لخوارزمية حقل السريان العام،



[Wendt et.al.2009], Fig.2.8: Mesh for the shock-capturing approach

[Wendt et.al.2009] ، الشكل 2.8 : شبكة لنهج التقاط الصدمة

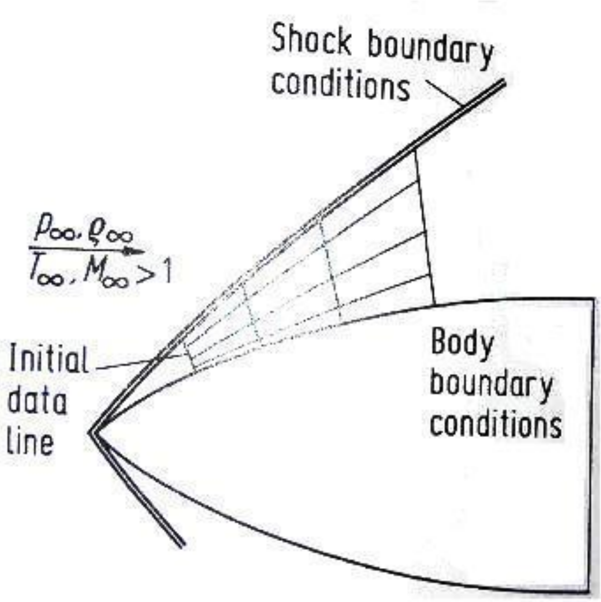
without any special shock relations being introduced. In this manner, the shock wave is captured within the domain by means of the computational solution of the governing partial differential equations. Therefore, Fig. 2.8 is an example of the shock-capturing method. In contrast, Fig. 2.9 illustrates the same flow problem, except that now the computational domain is the flow between the shock and the body. The shock wave is introduced directly into the solution as an explicit discontinuity, and the standard oblique shock relations (the Rankine-Hugoniot relations) are used the free stream supersonic flow ahead of the shock to the flow computed by the partial differential equations downstream of the shock. Therefore, Fig. 2.9 is an example of the shock-fitting method. There are advantages and disadvantages of both methods. For example, the shock-capturing method is ideal for complex flow problems involving shock waves for which we do not know either

دون إدخال أية علاقات لصدمات خاصة. في هذه الطريقة ، يتم التقاط موجة الصدمة داخل المجال عن طريق الحل الحسابي للمعادلات التفاضلية الجزئية الاساسية.ولذلك ، الشكل. 2.8 مثال على أسلوب التقاط الصدمة. في المقابل ، الشكل. 2.9 يوضح مشكلة السريان نفسها ، إلا أن المجال الحسابي الآن هو السريان بين الصدمة والجسم. ادخال موجة الصدمة مباشرةً في المحلول بمثابة انقطاع واضح ، وتستخدم معيار العلاقات المقياسية للصدمة المائلة (العلاقات Rankine-Hugoniot) سريان الانسياب الحر الفوق الصوتي قبل الصدمة لحساب السريان بواسطة المعادلات التفاضلية الجزئية باتجاه الصدمة . ولذلك ، الشكل. 2.9 مثال على أسلوب الصدمة الملائمة. هناك مزايا وعيوب لكل من هذه الأساليب. على سبيل المثال ، الأسلوب التقاط الصدمة الاسلوب الافضل لمشاكل السريان المعقدة التي تنطوي على موجات الصدمة التي لا نعرف

the location or number of shocks. Here, the shocks simply form within the computational domain as nature would have it. Moreover, this takes place without requiring any special treatment of the shock within the algorithm, and hence simplifies the computer programming. However, a disadvantage of this approach is that the shocks are generally smeared over a number of grid points in the computational mesh, and hence the numerically obtained shock thickness bears no relation what-so-ever to the actual physical shock thickness, and the precise location of the shock discontinuity is uncertain within a few mesh sizes. In contrast, the advantage of the shock-fitting method is

مكان أو عدد الصدمات. هنا ،تتشكل الصدمات ببساطة داخل المجال الحسابي كما يكون في الطبيعة. وعلاوة على ذلك ، وهذا يحدث من دون الحاجة إلى أي علاج خاص لحالة الصدمة داخل الخوارزمية ،و بالتالي ييسط برمجة الكمبيوتر. ومع ذلك ، فإن العائق في هذا النهج هو أن الصدمات عموما تلطخ على عدد من النقاط الشبكة في الشبكة الحاسوبية ، وبالتالي الحصول عدديا على سمك الصدمة لا علاقة له على الإطلاق بسمك الصدمة الفيزيائي الفعلي ، و الموقع الدقيق في تقطع الصدمة غير مؤكد ضمن بعض أحجام شبكة. في المقابل ، الفائدة من أسلوب الصدمة المناسبة (shock-fitting) هو

[Wendt et.al.2009] , **Fig.2.9**: Mesh for the shock-fitting approach



[Wendt et.al.2009] :

. الشكل2.9 :

شبكة لنهج الصدمة المناسبة

that the shock is always treated as a discontinuity, and its location is well-defined numerically. However, for a given problem you have to know in advance approximately where to put the shock waves, and how many there are. For complex flows, this can be a distinct disadvantage. Therefore, there are pros and cons associated with both shock-capturing and shock-fitting methods, and both have been employed extensively in CFD. In fact, a combination of these two methods is used to predict the formation and approximate location of shocks,

أن تعامل الصدمة دائما على أنها متقطعة ، وموقعها واضح المعالم من الناحية العددية. ومع ذلك ، لمشكلة معينة يجب أن تعرف سابقاً و لو حتى تقريبياً اين توضع موجات الصدمة، و عددها. لتدفقات معقدة ، يمكن ان يكون هذا عائقاً واضح. لذلك ، هناك إيجابيات وسلبيات على حد سواء مرتبطة بكلا الاسلوبين: التقاط الصدمة (shock-capturing) و الصدمة المناسبة (shock-fitting) ، واستخدم الاسلوبين على نطاق واسع في CFD. في الواقع ، يتم استخدام

and then these shocks are fit with explicitly in those parts of a flow field where you know in advance they occur, and to employ a shock-capturing method for the remainder of the flow field in order to generate shocks that you cannot predict in advance.

مزيج من هاتين الطريقتين للتنبؤ بتشكل والموقع التقريبي للصدمات ، ومن ثم يتم احتواء هذه الصدمات بوضوح مع في أجزاء من حقل السريان حيث نعرف سابقاً أنها تحدث ، واستخدام طريقة التقاط الصدمة لما تبقى من حقل السريان من أجل توليد الصدمات التي لا يمكن التنبؤ بها مسبقا.

Again, what does all of this discussion have to do with the conservation form of the governing equations as given by Eq. (2.65)? Simply this. For the shock-capturing method, experience has shown that the conservation form of the governing equations should be used. When the conservation form is used, the computed flow-field results are generally smooth and stable. However, when the non-conservation form is used for a shock-capturing solution, the computed flow-field results usually exhibit unsatisfactory spatial oscillations (wiggles) upstream and downstream of the shock wave, the shocks may appear in the wrong location and the solution may even become unstable. In contrast, for the shock-

مرة أخرى ، ماذا يعني كل هذا النقاش يجب أن نفعل مع الشكل التحفظي للمعادلات الاساسية تعطي حسب المعادلة. (2.65)؟ هذا ببساطة. لأسلوب التقاط الصدمة ، وقد أثبتت التجربة أنه يجب استخدام النموذج التحفظي للمعادلات الاساسية.،عندما يستخدم الشكل التحفظي عموماً تكون النتائج الحسابية على نحو سلس ومستقر. ومع ذلك ، عندما يتم استخدام شكل غير تحفظي لحلول التقاط الصدمة ، النتائج الحسابية لحقل السريان تظهر عادة المكانية التذبذبات غير مرضية (ملتوية) بعكس او باتجاه موجة الصدمة ، قد تظهر الصدمات في الموقع الخطأ والمحلول قد يصبح ايضاً غير مستقر. في

fitting method, satisfactory results are usually obtained for either form of the equations-conservation or non-conservation.

المقابل ، لأسلوب الصدمة المناسبة ، وعادة ما يتم الحصول على نتائج مرضية لأي شكل من أشكال المعادلات التحفظية أو غير التحفظية.

Why is the use of the conservation form of the equations so important for the shock-capturing method? The answer can be see by considering the flow across a normal shock wave, as illustrated in Fig. 2.10. Consider the density distribution across the shock, as sketched in Fig. 2.10(a). Clearly, there is a discontinuous increase in p across the shock. If the non-conservation from of the governing equations were used to calculate this flow, where the primary dependent variables are the primitive variables such as p and p, then the equations would see a large discontinuity in the dependent variable p. This in turn would compound the numerical errors associated with the calculation of p. On the other hand, recall the continuity equation for a normal shock wave (see Refs.[1,3]):

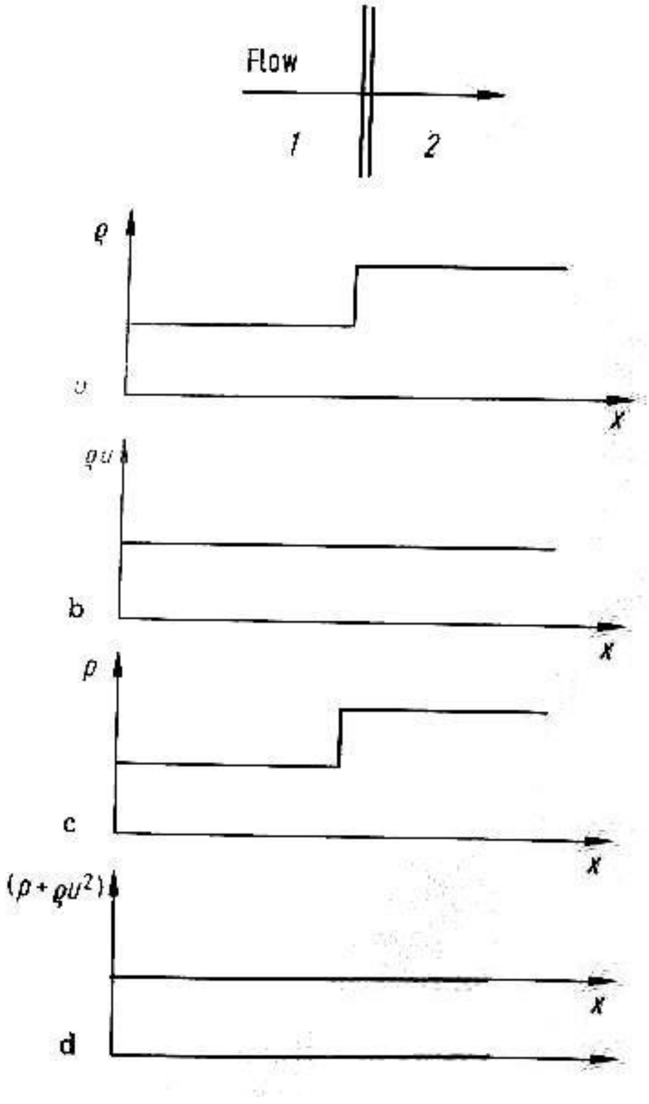
$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \tag{2.67}$$

From Eq. (2.67), the *mass flux*, ρu, is constant across the shock wave, as illustrated in Fig. 2.10(b). The conservation form of the governing equations uses the product ρu as a dependent variable, and hence the conservation form of the equations see no discontinuity in this dependent variable across the shock wave. In turn, the numerical accuracy and stability of the solution should be greatly enhanced. To reinforce this discussion, consider the momentum equation across a normal shock wave [1,3]:

$$\rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2 \tag{2.68}$$

As show in Fig. 2.10(c), the pressure itself is discontinuous across the shock ; however, from Eq. (2.68) the flux variable ($\rho + \rho u^2$) is constant across the shock.

[Wendt et. al. 2009], Fig.2.10: Variation of flow properties through a normal shock wave



This is illustrated in Fig. 2.10(d). Examining the inviscid flow equations in the conservation form given by Eq. (2.65), we clearly see that the quantity ($\rho + \rho u^2$) is one of the dependent variables. Therefore, the conservation form of the equations would see no discontinuity in this dependent variables across the shock. Although this example of the flow across a normal shock wave is somewhat simplistic, it serves to explain why the use of the conservation form of the governing equations are so important for calculations using the shock-capturing method. Because the conservation form uses flux variables as the dependent variables, and because the changes in these flux variables are either zero or small across a shock wave, the numerical quality of a shock-capturing method will be enhances by the use of the conservation form in contrast to the non-conservation form, which uses the primitive variables as dependent variables.

In summary, the previous discussion is one of the primary reasons why CFD makes a distinction between the two forms of the governing equations-conservation and non-conservation. And this is why we have gone to great lengths in this chapter to derive these different forms, and why we should be aware of the differences between the two forms.

2.9 مراجع | References

Anderson, John D., Jr.., *Fundamentals of Aerodynamics*, 2nd Edition McGraw-Hill, New York, 1991.

Liepmann, H.W. and Roshko, A., *Elements of Gasdynamics*, Wiley, New York, 1957.

Anderson, J.D., Jr., *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*, 2nd Edition McGraw-Hill, New York, 1990.

Bird, R.B,. Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N. *Transport Phenomena*, 2nd edition, Wiley, 2004.

Kutler, P., 'Computation of Three-Dimensional, Inviscid Supersonic Flows,' in H.J. Wirz (ed.), *Progress in Numerical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, pp. 293-374.

3 سرايين لا انضفاطية ولا لزجية (Incompressible Inviscid Flows) : طرق حسابية معتمدة على مؤطرات النبع و الدوامة (Source and Vortex Panel Methods)

3.1 مدخل

في هذا الفصال سننظر ان شاء الله الى التحليل العددي (numerical analysis) لسرايين (flows) لا انضغاطية (incompressible) و لا لزجية (inviscid). مبدئياً يمكن ان يستخدم طريقة الفرق المحدود (finite-difference method) – التي ستناقش في ما بعد ان شاء الله– لحل هذا النوع من السرايين. ولكن يوجد طرق اخرى تأدي عدة الى حلول اكثر مناسبة لسرايين لا انضغاطية (incompressible) و لا لزجية (inviscid).

هذا الفصل يناقش احد هذه الطرق — المساة طرق حسابية معتمدة على مؤطرات النبع و الدوامة (Source and Vortex Panel Methods). هذه الطرق اصبحت هي الطرق المقياسية والمعتمد عليها عادة في الشركات التي تصنع الطيارات و هذا منذ العقد 1960

طرق المؤطرات هي طرق حسابية عددية (numerical methods) تحتاج الى قوة حسابية ضخمة و لذلك كومبيوترات سريعة.

3.2 بعض الاوجهة الاساسية لسريان لا انضغاطي و لا لزجي

السريان الغير انضغاطي (incompressible flow) هو سريان بكثافة (density) ثابتة ($\rho = const.$).

تصور عضو مائع (fluid element) بكثلة ثابتة (m = const.) يجري في سريان غير انضغاطي (incompressible flow) في موازاة خط انسياب (streamline). لأن الكثافة ثابتة فبالتالي

الحجم (volume) لهذا العضو مائعي هو ايضا ثابت (V = const.). و لأن $\nabla\vec{V}$ ($\vec{V}$ هي السرعة) يشكل التغيير لحجمي لعضو مائعي على مدار الزمان نستطيع ان نكتب:

$$\nabla\vec{V} = 0 \qquad (3.1)$$

هنا ال ∇ NABLA-Operatorلـ و هو علامة ملخصة و هو الgrad و.gradient

و إلى هذا فاذا العضو مائعي (fluid element) ايضاً لا يدور لما يتحرك في موازاة الخط الانسياب (streamline) فبالتالي هذا السريان (flow) يسم لا دوراني (irrotational). لهاذا النوع من السرايين، يمكن ان يعبر عن السرعة (velocity) كبوتينزيال (potential) – يُعلم بِ ϕ.[5]

$$\vec{V} = \nabla\phi \qquad (3.2)$$

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

إذا جمعنا الآن معادلة (3.1) و (3.2) نصل الى:

---

[5] لمزيد من الشرح انظر ملحق أ و (Anderson 1991.)

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0$$

او،

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0} \qquad (3.3)$$

(3.3) تسمى معادلة Laplace (Laplace's equation)، احد المعادلات المشهورة والمدروسة جيداً في مجال الفيزيك الرياضية (mathematical physics).

من معادلة (3.3) نرى ان سرايين (flows) لا انضغاطية (incompressible) و لا لزجية (inviscid) تُحَكَّم بمعادلة Laplace (Laplace's equation).

و معادلة Laplace (Laplace's equation) هي خطية (linear).

و لذلك كل عدد من حلول خصوصية لمعادلة (3.3) يمكن ان تزاد (added) مع بعض ليستنتج حل آخر.

و هذا يُري فلسفة اساسية لحل من سريان غير انضغاطي (incompressible flow) و هو ان:

تركيب معقد لسريان غير انضغاطي و لا دوراني (incompressible, irrotational flow) يمكن ان يجمع (synthesized) من سرايين اساسية (elementary flows)

بالتالي سننظر إن شاء الله الى بعض السرايين اساسية (elementary flows) التي تلائم (satisfy) مع معادلة Laplace (Laplace's equation).

Uniform flow السريان المتماثل

$$\phi = V_{\infty} x$$

Source flow السريان المصدر

$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r$$

Vortex flow السريان الدوامة

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

In [Wendt et. al. 2009] there are two methods described which use these elementary flows:

- Non-lifting Flows Over Arbitrary Two-Dimensional Bodies: The Source Panel Method
- Lifting Flows Over Arbitrary Two-Dimensional Bodies: The Vortex Panel Method

Also the application "The Aerodynamics of Drooped Leading-Edge Wings Below and Above Stall" is described.

4 الخصوصيات الرياضية (Mathematical Properties) لمعادلات ديناميك الموائع (Fluid Dynamic Equations)

كثير من المضمون مأخوذ من

Chapter 4 (Mathematical Properties of Fluid Dynamic Equations) [Wendt et. al. 2009],

4.1 مدخل

المعادلات الاساسية من ديناميك الموائع التي استخلصت في الباب الثاني من الكتاب هي اما في الشكل التفاضلي (differential form) او الشكل التكاملي (integral form).

امثلة:

الشكل التكاملي لمعادلة الاستمرارية:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} + \iint_{S} \rho \vec{V} \cdot \vec{dS} = 0$$

الشكل تفاضلي الجزئي (Partial differential form) لمعادلات كمية التحرك (Momentum equations):

$$\text{x-component: } \rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

$$\text{y-component: } \rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y$$

$$\text{z-component: } \rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z$$

المعادلات الاساسية في شكل من الاشكال التفاضلية الجزئية مثل المعادلات 2.36 a-c فوق هي الشكل الاكثر شيوعاً و استخداماً في ديناميات الموائع الحسابية (CFD). لذلك قبل ان ندرس الطرق العددية (numerical methods) من اجل حل لهذه المعادلات فمن المفيد معالجة بعض الخصائص الرياضية للمعادلات التفاضلية الجزئية نفسها.و ينبغي لأي حل عددي صحيح للمعادلات ان يحمل خاصية طاعة الخصائص الرياضية العامة للمعادلات الاساسية.

ادرس المعادلات الاساسية لحركت الموائع مثلما استنتج من الفصل الثاني (Chap. 2). لاحظ انه في جميع الحالات المشتقات (derivates) الاعلى ترتيباً تحدث بطريقة خطية (linear). أي لا توجد منتجات (products) او اسِّية (exponentials) للمشتقات (derivates) الاعلى ترتيب – تظهر من تلقاء نفسها, مضروبة بالمعامل (coefficients) التي هي لنفسها دالات (functions) للمتغييرات التابعة (dependent variables)؛ يسمى مثل هذا النظام للمعادلات بالنظام الشبه خطي (*quasilinear system*). على سبيل المثال لسرايين اللالزجية (inviscid flows) نجد عندما ندرس المعادلات الموجودة في القسم 2.7.2 ان المشتقات ذات الترتيب الاعلى (highest order derivates) هي ذات الدرجة الاولى (first order) وكلها تظهر خطياً (linearly).

ولسرايين اللزجية (viscid flows) نجد عندما ندرس المعادلات الموجودة في القسم 2.7.1 ان المشتقات ذات الترتيب الاعلى هي ذات الدرجة الثانية (second order) وكلها تظهر خطياً (linearly).

لهذا السبب في المقطع التالي سندرس بعض الخصائص لنظام (system) شبه خطي للمعادلات التفاضلية الجزئية (quasilinear partial differential equations). في هذه العملية سوف نقوم بوضع تصنيف لثلاثة انواع من المعادلات التفاضلية الجزئية– و كل من الثلاثة تلاقت في ميكانيكا الموائع (fluid dynamics).

4.2 بعض المعادلات التفاضلية الجزئية

التالي مؤخوذ من كتاب [1]:

1- معادلة التوصيل الحراري في البعد الواحد :

$$u_t = u_{xx}$$

2- معادلة التوصيل الحراري في البعدين :

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

3- معادلة لابلاس بالإحداثيات القطبية :

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

4- معادلة الموجة في الأبعاد الثلاثة :

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

5- معادلة الإرسال البرقي :

$$u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u$$

4.3 تصنيف (Classification) المعادلات التفاضلية الجزئية (Partial Differential Eq.s)

للتبسيط لنعتبر نظام (system) بسيط نسبياً لمعادلات الشبه خطية. فهي لن تكون معادلات السريان لكنها تشبهها في بعض النواحي. فان هذا القسم هو مثال مبسط. لنعتبر نظام المعادلات الشبه خطي الواردة ادناه:

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} + d_1 \frac{\partial v}{\partial y} = f_1 \qquad (4.1a)$$

$$a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 \frac{\partial v}{\partial x} + d_2 \frac{\partial v}{\partial y} = f_2 \qquad (4.1b)$$

حيث u و v هي المتغيرات التابعة، الدالات لِ (functions of) x و y.

و المعامل (coefficients) $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, f_1$ و f_2 تستطيع ان تكون دالات ل x, y, u و v.

لنعتبر اي نقطة في مستو xy . دعونا نبحث عن خطوط (او اتجاهات) من خلال هذه النقطة (ان وجدت) حيث المشتقات لِ (*derivates of*) u و v تكون غير محددة (indeterminant) على طول هذه الخطوط (او اتجاهات). و عبرها ربما تكون متقطعة (discontinuous).

هذه الخطوط تسمى **الخطوط الخصائصية** (**characteristic lines**).

Quasilineare partielle Differentialgleichungen 2.Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen können in drei Typen unterteilt werden: hyperbolisch, parabolisch und elliptisch. Diese Einteilung basiert auf Eigenschaften von Charakteristiken-Linien, entlang welcher sich die Informationen über die Lösung ausbreiten. Jede derartige Gleichung hat zwei Sätze von Charakteristiken . Die verschiedenen Eigenschaften der Gleichungen können verschiedenen Strömungstypen zugeordnet werden. [3], p.20

للعثور على هذه **الخطوط الخصائصية** نفترض ان u و v مستمرة (continuous)؛ و بالتالي:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \; : \; u = u(x,y) \tag{4.2a}$$ لأن

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \; : \; v = v(x,y) \tag{4.2b}$$ لأن

المعادلات (4.1) و (4.2) تشكل نظاماً من اربعة معادلات خطية (linear) مع اربعة مجهولات ($\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$ و $\partial v/\partial y$). يمكن كتابة هذه المعادلات بشكل مصفوفة (matrix form) على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x \\ \partial v/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ du \\ dv \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

دعونا نرمز ب $[A]$ مصفوفة المعامل (coefficient matrix):

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix}$$

علاوة على ذلك ترك $|A|$ تكون المحددة (determinant) لِ $[A]$..من قاعدة كرامر (Cramer's rule)، اذا كانت $|A| \neq 0$، عندها نستطيع الحصول على حلول وحيدة (unique) لِ $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$ و $\partial v/\partial y$.

و من ناحية اخرى، اذا كانت $|A|=0$ ، عندها تكون $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$ و $\partial v/\partial y$ في الحالة الافضل، غير محددة (indeterminant). نحن نبحث عن اتجاهات محددة (particular) في المستو (plane) xy التي على طولها المشتقات لِ u و v هي غير محددة لذلك دعونا نجعل $|A|=0$، و ننظروا ماذا سسيجري.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0$$

لذلك

$$(a_1c_2 - a_2c_1)(\mathrm{d}y)^2 - (a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)(\mathrm{d}x)(\mathrm{d}y) + (b_1d_2 - b_2d_1)(\mathrm{d}x)^2 = 0 \quad (4.4)$$

اقسم المعادلة (4.4) على $(dx)^2$:

$$(a_1c_2 - a_2c_1)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - (a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (b_1d_2 - b_2d_1) = 0 \quad (4.5)$$

المعادلة (4.5) هي معادلة من الدرجة الثانية (quadratic equation) في dy/dx .

لأية نقطة في المستو xy، حل المعادلة (4.5) ستعطي الانحدارات (slopes) على طول الخطوط تلك المشتقات (derivatives) لِ u و v هي غير محددة. هذه الخطوط في الفضاء xy على طولها تسمى مميزات الخطوط (characteristic lines) لنظام المعادلات الذي قدمت بِ (4.1a) و (4.1b)

في المعادلة (4.5) دع

$$a = (a_1c_2 - a_2c_1)$$
$$b = -(a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)$$
$$c = (b_1d_2 - b_2d_1)$$

و من ثم يمكن كتابة المعادلة (4.5) كما يلي:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = 0 \qquad (4.6)$$

لهذا السبب من الصيغة التربيعية (quadratic formula):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (4.7)$$

المعادلة (4.7) تعطي اتجاه الخطوط المميزة (characteristic lines) خلال النقطة معينة (given) في مستو xy . هذه الخطوط لها طبيعة مختلفة، تعتمد على قيمة المتميّز (discriminant) في المعادلة (4.7). ندل على المتميز بِ D .

$$D = b^2 - 4ac \qquad (4.8)$$

قد تكون الخطوط المميزة (characteristic lines) حقيقية (real) و مختلفة، او حقيقية و متساوية، او تخيلية (imaginary)، اعتماداً على قيمة D. خصوصاً:

اذا كانت $D > 0$:

يوجد خطان حقيقيان و متختلفين خلال كل نقطة في المستو xy. عندما يكون في هذه الحالة، فان نظام المعادلات المقدم من (4.1 a, b) يسمى قطعي زائدي (*hyperbolic*)

اذا كانت D = 0:

يوجد خاصة (characteristic) حقيقية واحددة. عندما يكون في هذه الحالة، فان نظام المعادلات المقدم من (4.1 a, b) يسمى تسمى قطعي مكافئي (*parabolic*)

اذا كانت D < 0:

الخطوط المميزة هي خيالية. يكون في هذه الحالة، فان نظام المعادلات المقدم من (4.1 a, b) يسمى الاهليجية / بيضاوي الشكل (*elliptic*).

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الشبه خطية بأنها الاهليجية (*elliptic*)، قطعية مكافئة (*parabolic*) او قطعية زائدة (*hyperbolic*) هو تنصيف عام في هذا النوع من المعادلات. هذه الفئات الثلاثة من المعادلات لديها سلوك مختلف تماماً. أصل الكلمات: الاهليجي (*elliptic*)، قطعي مكافىء (*parabolic*) و قطعي زائد (*hyperbolic*) هو ببساطة تشابه مباشر مع الحالة للاقسام المخروطية (conic sections).

المخروط (cone):

شكل ثلاثي الأبعاد له قاعدة دائرية ورأس واحد. ويصل بالرأس سطح منحن.

المعادلات العامة للاقسام المخروطية من الهندسة التحليلية (analytic geometry) هي:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

حيث اذا

$b^2-4ac>0$، القسم المخروطي هو قطع زائد (hyperbola)

$b^2-4ac=0$، القسم المخروطي هو قطع مكافئ (parabola)

$b^2-4ac<0$، القسم المخروطي هو قطع ناقص (ellipse)

التالي مؤخوذ من كتاب [1]:

$$u_t=u_{xx} \qquad (1)$$

(1) هي معادلة تفاضلية جزئية تصف التوصيل الحراري (heat transfer) في البعد الواحد.

كل معادلة تفاضلية جزئية خطية مثل (1) تمثل أحد الأنماط الآتية :

أ- القطع المكافئ .
ب- القطع الزائد .
ج- القطع الناقص .

فمعادلات القطع المكافئ تصف سريان الحرارة وعمليات الانتشار وتحقق الخاصية :

$$b^2-4ac=0$$

ومعادلات القطع الزائد تصف حركات الاهتزاز وحركات الموجة وتحقق الخاصية :

$$b^2-4ac>0$$

ومعادلات القطع الناقص تصف ظواهر الحالة المستقرة وتحقق الخاصية :

$$b^2 - 4ac < 0$$

أمثلة

أ- $u_t = u_{xx}$ معادلة قطع مكافئ لأن : $B^2 - 4AC = 0$

ب- $u_{tt} = u_{xx}$ معادلة قطع زائد لأن : $B^2 - 4AC = 4$

ج- $u_{\zeta\eta} = 0$ معادلة قطع زائد لأن : $B^2 - 4AC = 1$

د- $u_{xx} + u_{yy} = 0$ معادلة قطع ناقص لأن $B^2 - 4AC = -4$

هـ - $y_{xx} + u_{yy} = 0 \quad B^2 - 4AC = -4y \begin{cases} y > 0 & \text{عندما يكون قطع ناقص} \\ y = 0 & \text{عندما يكون قطع مكافئ} \\ y < 0 & \text{عندما يكون قطع زائد} \end{cases}$

(في حالة المعاملات المتغيرة يتغير الوضع من نقطة إلى أخرى) .

ملاحظات

1- بصورة عامة يكون $B^2 - 4AC$ دالة بدلالة المتغيرات المستقلة وعليه تتغير المعادلة من نمط لآخر تبعاً لمجال المتغيرات (ولو أن ذلك غير مألوف) .

2- إن المعادلة الخطية العامة (1) قد صيغت بدلالة المتغيرات المستقلة $x\,y$. في معظم المسائل يمثل أحد المتغيرين الزمن وعندئذ يمكن كتابة المعادلة بدلالة x,t .

3- يمكن توضيح مخطط التصنيف العام كما في شكل (1-2) .

الخطية	غير خطية			خطية			
الرتبة	m	$\cdots$	5	4	3	2	1
معاملات (المعادلات الخطية)	معاملات متغيرة			معاملات ثابتة			
التجانس (المعادلات الخطية)	غير متجانسة			متجانسة			
عدد المتغيرات	n	$\cdots$	5	4	3	2	1
الأنماط الأساسية	قطع ناقص		قطع مكافئ		قطع زائد		

نلاحظ بالنسبة للمعادلات التفاضلية الجزئية القطع الزائد (hyperbolic PDEs)، ان يكون هناك الميزتين (characteristics) حقيقية (real) و مختلفة (distinct)، تتيح طوير طريقة الحل تصل الى حل جاهز لهذه المعادلات. اذا عدنا الى المعادلة (4.3) حاولنا حَلَّها لِ $\partial u / \partial y$ باستخدام طريقة كرامر (Cramer's rule)، نصل الى:

$$\partial u / \partial y = \frac{|N|}{|A|} = \frac{0}{0}$$

حيث محددة العداد (numerator determinant) هي:

$$|N| = \begin{vmatrix} a_1 & f_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & f_2 & c_2 & d_2 \\ dx & du & 0 & 0 \\ 0 & dv & dx & dy \end{vmatrix} \tag{4.9}$$

السبب لماذا $|N|$ يجب ان تكون صفر هو ان $\partial u / \partial y$ غير محدد، بالشكل 0/0. بما ان $|A|$ هي مسبقاً وصلت الى صفر, اذاً $|N|$ يجب ان تكون صفر للسماح بان تكون $\partial u / \partial y$ غير محددة.

ان توسيع (expansion) المعادلة (4.9) ستؤدي الى معادلات التي تنطوي على متغييرات مجال السريان (flow field variables) التي هي معادلات تفاضلية عادية (*ordinary differential equations*)، و في بعض الحالات هي معادلات جبرية (algebraic equations). هذه المعادلات التي تتم الحصول عليها من (4.9) تسمى بمعادلات التوافق (*compatibility* equations) و هي تستمر فقط على الخطوط المميزة (characteristic lines). هذا هو جوهر من حل المعادلة التفاضلية القطع الزائد الاصلية (original hyperbolic PDE):

فقط ضع معادلات ابسط – معادلات تفاضلية عادية (*ordinary differential equations*) (و هي معادلات التوافق (*compatibility* equations)) – على طول الخطوط المميزة في المستو xy.هذه الطريقة تسمى طريقة الخصائص (*method of characteristics*). هذه الطريقة تطورت بدرجة عالية لحل السريان اللا لزجي الفوق صوتي (inviscid supersonic flows). لهذا النوع من السريان العادلات الاساسية تكون من نوع المعادلات التفاضلية القطع الزائد. طريقة الخصائص هي اسلوب كلاسيكي من اجل حل السريان اللا لزجي الفوق صوتي.

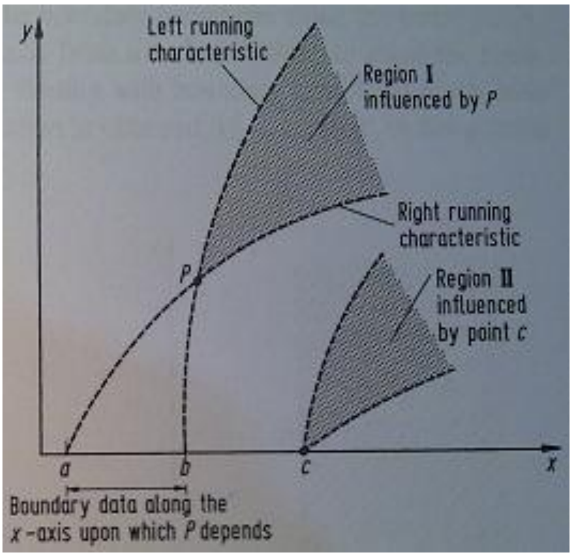
4.4 السلوك العام للاصناف المختلفة من المعادلات التفاضلية الجزئية و علاقتها بديناميات الموائع

في هذا القسم، نناقش ببساطة ودون براهين رياضية، بعض من سلوك المعادلات تفاضلية القطع الزائد (*hyperbolic*)، القطع المكافئ (*parabolic*) والقطع الناقص (*elliptic*)، و سنعلق هذا السلوك بحل مشاكل من ميدان ديناميات الموائع.

4.4.1 المعادلات القطع الزائد (Hyperbolic Equations)

للمعادلات القطع الزائد المعلومات في نقطة معيينة P تؤثر فقط على تلك المناطق بين الخصائص التي تتقدكم (advancing characteristics). على سبيل المثال، دراسة الرسمة 4.1، التي رسمت لمشكلة ثنائية الابعاد (two-dimensional) مع اثنين من المتغييرات المستقلة الفضائية (independent space variables).

النقطة P تقع في مكان معيين (x,y). لنتأمل الخصائص التي تجري الى اليمين و الى الشمال (right running and left running characteristic) كما يبين الرسم 4.1



الشكل 4.1: مجال (domain) و حدود لحل المعادلات القطع الزائد (hyperbolic equations). سريان ثابت (steady) ثنائي الابعاد (Two-dimensional).

الرسم مأخوذ من [2].

المعلومات عند النقطة P لا تؤثر (influences) الا على المنطقة المظللة – المنطقة المصنفة ب I بين الخصائص الاثنين التي تتقدم (two advancing characteristics) خلال نقطة P. و هذا له تأثير مباشر على شروط الحدود (boundary conditions) للمعادلات القطع الزائد. لنفترض ان المحور x (x-axis) هو شرط حدودي (boundary condition) للمشكلة، يعني المتغييرات التابعة u و v معروفة على طول المحور x. هنالك الحل ممكن الحصول عليه عبر "السير الى الامام" ('marching forward') في المسافة y، بداءً من حدود معيينة. و مع ذلك، فان الحل لِ u و v في النقطة P تعتمد فقط على جزء من الحدود بين a و b , كما نبين في الرسم 4.1.

المعلومة عند النقطة c التي هي خارج الفاصل (interval) ab، هي تنتشر على طول الخصائص الى c، و تُأَثِّر فقط على المنطقة II. النقطة P هي خارج المنطقة II، و بالتالي لا تلمس معلومات من النقطة c. لهذا السبب النقطة P تعتمد فقط على الجزء من الحدود الذي يتم حصره بين الخصائص الاثنين التي تذهب من خلال النقطة P و تعترض الحدود لتحدد الفاصل ab.

في ديناميكية الموائع,الانواع التالية من السريان هي محددة من المعادلات التفاضلية الجزئية القطع الزائد (hyperbolic PDEs), و بالتالي يعرض السلوك المذكور آنفاً:

السريان الثابت اللالزجي الفوق الصوتي (*Steady, inviscid supersonic flow*).

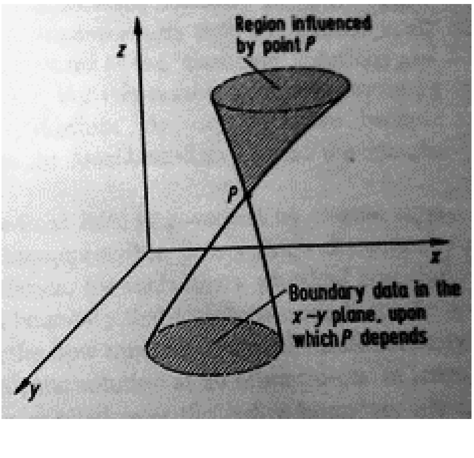
اذا كان السريان في ثنائي الابعاد (two-dimensional) فبالتالي السلوك هو مثل المعروض في الشكل 4.1.

اذا كان السريان ثلاثي الابعاد، هناك مساحات مميزة في المستوى xyz، كما رسمت في الشكل 4.2.

لنعتبر النقطة P في مكان محدد في المستوى (x,y,z).المعلومات عند P تؤثر على الحجم المظلل في المساحة المميزة التي تتوسع. بالاضافة الى ذلك، اذا كان المستوى xy هو سطح جداري (boundary surface)، عندها فقط ذلك الجزء من الجدار المحصورة من قبل السطح المميز المتراجع، الذي يؤثر على P.

في الشكل 4.2، تُحَل المتغييرات التابعة من خلال البدء بالمعطياتر (data) في المستوى xy، و بالتالي بِ"السير" في الاتجاه z.

لمشكلة سريان الفوق الصوتي لا لزجي (inviscid supersonic flow problem) , الاتجاه العام للسريان يكون ايضاً الاتجاه z.



الشكل 4.2:

المجال و الحدود (Domain and boundaries) لحل المعادلات القطع الزائد.

سريان ثابت ثلاثي الابعاد

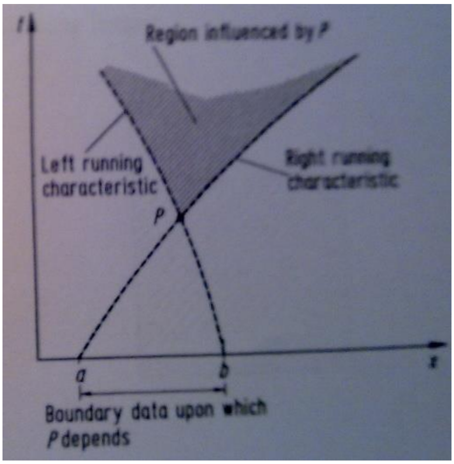
(Three-dimensional steady flow)

سريان متغيير انضغاطي لا لزجي (*Unsteady inviscid compressible flow*).

لتغيير سريان لا لزجي من بعد واحد او ثنائي الابعاد, المعادلات الاساسية هي من نوف القطع الزائد، لا يهم ما اذا كان السريان هو محلياً (locally) تحت سرعة الصوت (subsonic) او فوق صوتي (supersonic). هنا الوقت هو اتجاه سير الحساب (marching direction).

) المبين في الشكل x,t من المستوى (Pللسريان اللا لزجي من بعد واحد ، لننظر الى النقطة 4.3.

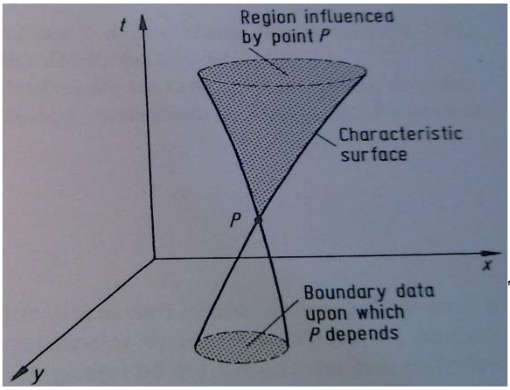
مرة اخرى، المنطقة المتاثرة بالنقطة P هي المنطقة المظللة الواقعة بين اثنين من الخصائص التي تتقدم من خلال P، و الفاصل *ab* هو الجزء الوحيد من الحدود على طول المحور x الذي يعتمد عليه الحل في النقطة P.



الشكل 4.3:

المجال (Domain) و الحدود من اجل حل المعادلات القطع الزائد. سريان متغير من بعد واحد (One-dimensional unsteady flow).

للسريان اللا لزجي الثنائي الابعاد (two-dimensional)، لنعتبر النقطة P في المستوى (x,y,t) كما هو مبين في المشكل 4.4. بدءاً بالبيانات الاولية المعروفة في المستوى x,y، الحل "يسير" ('marches') الى الامامً في الوقت (time).



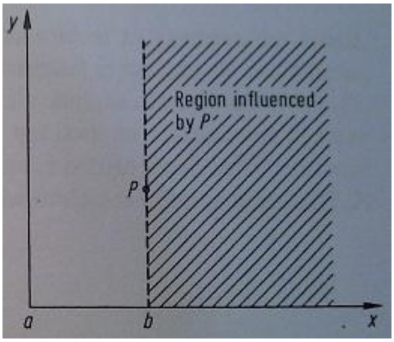
الشكل 4.4:

المجال و الحدود لحل المعادلات القطع الزائد. سريان غير ثابت ثنائي الابعاد (Two-dimensional unsteady flow)

4.4.2 معادلات القطع مكافئة / Parabolic Equations

للمعادلات القطع المكافئة، المعلومات عند النقطة P في المستوى xy تؤثر على كل المنطقة من المستوى الى جهة واحدة من P. هذا هو مرسوم في الشكل 4.5، حيث تمّ رسم خط مميز واحد من خلال النقطة P.

لنفترض ان المحور x و المحور y تشكل حدود. الحل عند P يتأثر بشروط الحدود على المحور y بكامله، فضلاً عن الجزء في المحور x من *a* الى *b*. حلول المعادلات القطع المكافئ هي ايضاً حلول "مسيرة" ('marching')؛ بدءاً بالشروط الحدودية (boundary conditions) على طول كل من المحاور x و y ، يتم الحصول على حل لمجال السريان عبر "مسيرة" في الاتجاه العام x .



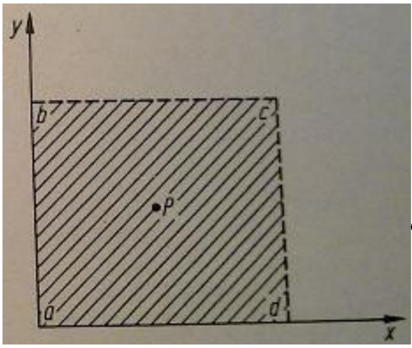
الشكل:4.5

المجال و الحدود من لحل المعادلات القطع المكافئ (parabolic equations) في بعدين (in two dimensions).

في ديناميكيا الموائع، هناك اشكال مخفضة (reduced forms) من معادلات ناوير– ستوكس (Navier-Stokes) التي تمثل سلوك من نوع القطع المكافئ. اذا تم تجاهل شروط الاجهاد اللزجي (viscous stress) التي تنطوي على المشتقات بالنسبة الى x في هذه المعادلات، نحن نحصل على المعادلات ناوير– ستوكس (Navier-Stokes) القطعي المكافئ ('parabolized' Navier-Stokes equations)، التي تمنح حل بسير الى الوراء في اتجاه x، بدءاً من بعض المعطيات المنصوص عليها على طول المحاور x و y. المزيد من الخفض لمعادلات ناوير– ستوكس (Navier-Stokes) لأعداد رينولز (Reynolds numbers) العالية تؤدي الى معادلات الطبقة الجدارية (boundary layer equations) التي هي معروفة جيداً. هذه الطبقة الجدارية (boundary layer equations) تُظهر السلوك القطع المكافئ في الشكل 4.5.

4.4.3 المعادلات القطع الناقص (elliptic equations)

تؤثر على كل المناطق xy في المستوى Pللمعادلات القطع الناقص، المعلومات عند النقطة ، الذي يري مجال مستطيل 4.6). رسمت هذه الصورة في الشكل domainالاخرى للمجال (الشكلrectangular.) (



الشكل: 4.6

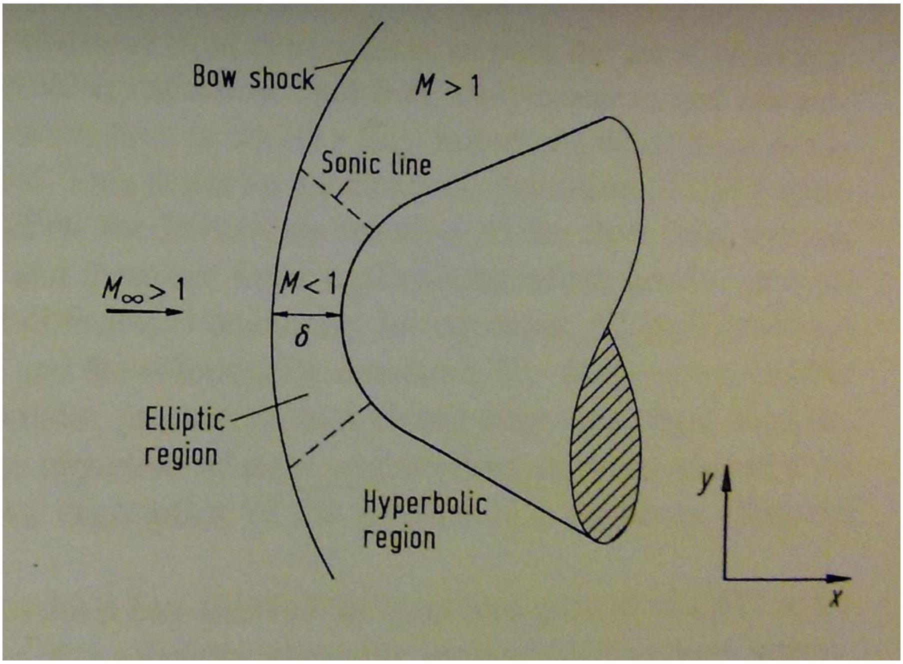
المجال و الحدود لحل معادلات القطع الناقص بعدين)two dimensions.(

هنا المجال هو مغلق تماماً, تحيط بها الحدود المغلقة *abcd*. للمعادلات القطع الناقص، لان النقطة P تؤثر على كل النقاط في المجال، و ايضاً الحل عند النقطة P يتأثر بكامل الحدود (boundary) المغلق *abcd*. لذا، يجب إتمام الحل عند النقطة P في آن واحد مع إتمام الحل في جميع نقاط المجال. هذا يكون في تباين شديد مع "سير" (‘marching’) الحلول المناسبة للمعادلات القطع الزائد و القطع المكافئ.

في ديناميكا الموائع السريان الثابت (steady)، الذي هو ما دون سرعة الصوت (subsonic)، الا لزجي (inviscid) هو يوافق لمعادلات القطع الناقص. هذا ايضاً يتضمن السريان اللا انضغاطي (incompressible) (الذي يتضمن نظرياً عدد ماخ (Mach number) يساوي صفر). اذاً، لهذه الانواع من السرايين، يجب تطبيق الشروط الجدارية (boundary conditions) الفيزيائية تحيط كاملاً بالسريان، و حل ميدان السريان (flow-field) في كل النقاط في السريان يجب ان تُحصل عليه في نفس الوقت (simultaneously)، لأن الحل عند نقطة معيينة يؤثر على حل كل النقاط الاخرى. من حيث الشكل 4.6، يجب ان تطبق الشروط الجدارية على الجدار *abcd* بأكمله. هذه الشروط الجدارية (boundary conditions) يمكنها ان تأخذ الاشكال التالية: تحديد المتغييرات التابعة (*dependent variables*) u و v على طول الجدار. هذا النوع من الشروط الجدارية تسمى شرط ديريشلت (*Dirichlet* condition).

و تحديد (specification) المشتقات (*derivatives*) للمتغييرات التابعة u و v مثل $\partial u / \partial y$ على طول الجدار. هذا النوع من الشروط الجدارية يسمى شرط نيومان (condition *Neumann*).

4.4.4 بعض الملاحظات



في هذه المرحلة سيكون مهم للطالب، حل الشكل المغلق لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الانواع القطع الزائد (*hyperbolic*)، والقطع المكافىء (*parabolic*) والقطع الناقص (*elliptic*) (PDE).

لهذا انظر كتب لمادة الرياضيات.

4.4.5 طرح المشاكل بشكل جيد / Well-Posed Problems

في الحل للمعادلات التفاضلية الجزئية هو من السهل في بعض الاحيان التوصل الى حل باستعمال شوروط اولية (initial conditions) و جدارية (boundary) غير صحيحة او غير

كافية. مثلاً "سوء طرح" المشكلة تؤدي عادة الى نتائج زائفة (مزورة). لذلك نحن نعرف مشكلة مطروحة بشكل جيد كما يلي: اذا كان الحل لمعادلة تفاضلية جزئية موجودة و فريدة (unique)، و اذا كان الحل يعتمد باستمرار على الشروط الجدارية الاولية، بالتالي المشكلة تكون مطروحة بشكل جيد.

4.4.6 المراجع

[1] رس فارلو، المعادلات التفاضلية الجزئية (ترجمة: د. هها عواد الكُبَيسي)، منشورات جامعة عمر المخطار، البيضاء، 2005

[2] [Wendt et. al. 2009], Chapter 4 (Mathematical Properties of Fluid Dynamic Equations)

[3] Ferzinger, Peric, "Numerische Strömungsmechanik", Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008

5 تفريز لمعادلات التفاضلية الجزئية (Discretization of PDEs)

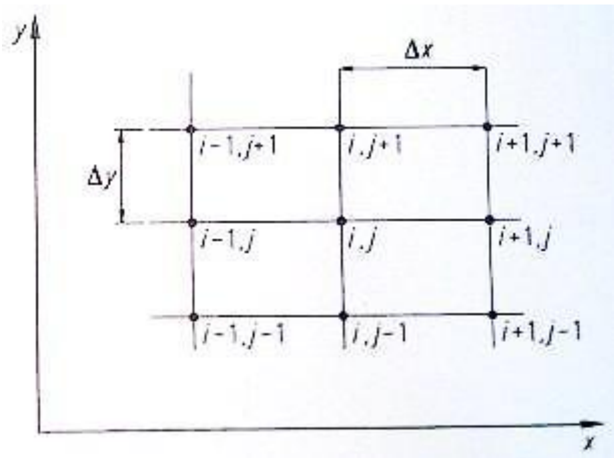
معظم المضمون مأخوذ من

Chapter 5 (Discretization of Partitial Differential [Wendt et. al. 2009], Equations)

5.1 مدخل

حلول تحليلية (Analytical solutions) لمعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) تعطي تعبيرات مقفولة الشكل التي تعطي التغييرات للمتغيرات التابعة (dependent variables) على المجال (domain) بشكل مستمر (continuously). مقارنة مع ذلك، الحلول العددية (numerical solutions) تستطيع أن تُجيب على نقاط منفصلة (discrete points) في المجال فقط، و تسمى نقاط الشبكة (grid points).

الشكل **5.1**: نقاط الشبكةِ المنفصلةِ



على سبيل المثال، انظر في الشكل 5.1، مما يري جزء من شبكة منفصلة في المستو xy. لنفترض أن تباعد نقاط الشبكة في اتجاه x هو موَّحد (uniform)، والتي تقدمها Δx ، وهذا

التباعد في اتجاه y هو أيضا موحَّد (uniform)، والتي تقدمها Δy ، كما هو مبين في الشكل 5.1 . بشكل عام، Δx و Δy يكونان مختلفين. ومع ذلك، فإن الغالبية العظمى من التطبيقات CFD تنطوي على حلول عددية على الشبكة بتباعد موحد (uniform spacing) في كل اتجاه، لأن هذا يبسط إلى حد كبير برمجة الحل، ويوفر مساحة التخزين الحاسوبي ويعطي نتائج عادة دقيقة أكثر.

هذا التباعد الموحد لا يجب أن يحدث في الفضاء xy الفيزيائي (physical xy space) ؛ كما هو الحال في كثير من الأحيان في CFD ، وتجرى الحسابات العددية (numerical calculations) في الفضاء الحسابي (computational space) المتحوِّل التي لديها تباعد موحد (uniform spacing) في المتغيرات المستقلة المتحولة (transformed independent variables) ، ولكن الذي يتوافق مع التباعد غير الموحد (non-uniform spacing) في المستوى الفيزيائي (physical plane). في أي حال، في هذا الفصل إننا نفترض التباعد الموحد في كل اتجاه النظام الإحداثي (coordinate system)، ولكن ليس بالضرورة متساوية التباعد (equal spacing) لكلا الاتجاهين، أي سنتخذ Δx و Δy من الثوابت (constants)، ولكن هذا ليس من الضروري أن تكونا Δy و Δx على قدم المساواة. عودة إلى الشكل 5.1، يتم تحديد نقاط الشبكة وفقا لمؤشر (index) i الذي يمتد في اتجاه x، ومؤشر (index) j الذي يمتد في اتجاه y. وبالتالي، إذا كان (i,j) هو مؤشر (index) لنقطة P في الشكل 5.1، ثم النقطة على يمين P تعرَّف بأنها (i +1, j)، وهذه النقطة الأعلى منها مباشرة هي (i, j +1) الخ.

تستخدم طريقة الفروق المحدودة (*finite differences*) على نطاق واسع في CFD ، وبالتالي سيتم تخصيص معظم هذا الفصل على المسائل المتعلقة بالفروق المحدودة (finite differences).

فلسفة الفروق المحدودة (finite differences) هو استبدال المشتقات الجزئية (partial derivatives) التي تظهر في المعادلات الأساسية لميكانيكا الموائع (governing equations of fluid dynamics). مع فُرق للمقسومات الجبرية (algebraic difference quotients)، ينتج نظام من المعادلات الجبرية (system of algebraic equations) التي يمكن حلها لمتغيرات حقل السريان (flow-field) في النقاط المعينة من الشبكة المنفصلة في السريان (كما هو موضح في الشكل5.1). دعونا ننتقل الآن للحصول على بعض من فُرق لمقسومات الجبرية (algebraic difference quotients) الأكثر شيوعا التي تستخدم لتفريز (discretize) المعادلات التفاضلية الجزئية (PDE).

5.2 اشتقاق مقسومات لفرق محدودة ابتدائية (Elementary Finite Difference Quotients)

يقوم تمثيل الفرق المحدودة (Finite difference) للمشتقات (derivatives) على أساس توسعات سلسلة تايلر (Taylor's series expansions). على سبيل المثال، إذا $u_{i,j}$ يدل على مكون (component) x للسرعة (velocity) في نقطة (i, j), إذاً السرعة (velocity) $u_{i+1,j}$ في النقطة (i + 1, j) يمكن أن تعبِّر عنها الأطراف الرياضية من توسعات سلسلة تايلر (Taylor's series expansions) حول النقطة (i, j)، على النحو التالي:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \cdots \qquad (5.1)$$

المعادلة (5.1) هي رياضياً تعبير دقيق عن $u_{i+1,j}$ إذا :

أ) عدد من الأطراف الرياضية (terms) هي لانهائية (infinite)، و السلسلة تَتلاقى (converges)،

ب) و / أو $\Delta x \to 0$.

للحساباتِ العدديةِ (numerical computations)، فإنه من غير العملي إدخال عدد لا حصر له من الأطراف (terms) في المعادلة (5.1). لذلك، المعادلة (5.1) تكون مَقْطُوعُة (truncated). على سبيل المثال، إذا يتم تجاهل الاطراف الرياضية قيمة الأسية (order of magnitude) $(\Delta x)^3$ و الترتيب الأعلى (higher order)، المعادلة (5.1) تختصر إلى:

$$u_{i+1,j} \approx u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.2)$$

نقول إن المعادلة (5.2) هي في المرتبة الثانية من الدقة (second-order accuracy)، وذلك لأن المصطلح الرياضي للترتيب (terms of order) $(\Delta x)^3$ و الأعلى قد أهملا. إذا قمنا بإهمال الطرف الرياضي للترتيب (terms of order) $(\Delta x)^2$ و الأعلى , نحصل من المعادلة (5.1)،

$$u_{i+1,j} \approx u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x \qquad (5.3)$$

حيث المعادلة (5.3) هو من الدرجة الأولى من الدقة. في المعادلات (5.2) و (5.3)، إهمال الأطراف الرياضية ذات الترتيب الأعلى تمثل خطأ الاقتطاع (truncation error) في تمثيل السلسلة المحدودة (finite series). على سبيل المثال, خطأ الاقتطاع (truncation error) للمعادلة (5.2) هو:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_{i,j}\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

ويمكن تقليل خطأ الاقتطاع (truncation error) عبر:

أ) نقل المزيد من الأطراف الرياضية (terms) في سلسلة تايلر(Taylor's series)، اي المعادلة (5.1). هذا يؤدي إلى ارتفاع مستوى الدقة (accuracy) في تمثيل $u_{i+1,j}$

ب) تخفيض حجم Δx.

دعونا نعود إلى المعادلة (5.1)، و نحلها لِ $(\partial u/\partial x)_{i,j}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x} \underbrace{-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}\frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j}\frac{\Delta x^2}{6} - \cdots}_{\text{Truncation error}}$$

او

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad (5.4)$$

في المعادلة (5.4)، رمز $O(\Delta x)$ هو التدوين الرياضي الشكلي (formal mathematical notation) الذي يمثل حدود رياضية (terms) ذات الترتيب (of-order-of) بالنسبة ل Δx. المعادلة (5.4) هي **عبارة فروقية بالاتجاه الامامي للمشتق ($\partial u/\partial x$)** في النقطة الشبكية (i, j) ذات درجة اولى.[6]

المعادلة (5.4) هو تدوين أكثر دقة من المعادلة (5.3)، الذي ينطوي على تدوين " المساواة تقريبا (approximately equal)" ؛ في المعادلة (5.4) ترتيب حجم خطأ الاقتطاع (truncation error) عُرِضت بشكل صريح من قبل تدوين *O* .

دعونا الآن نكتب توسيع سلسلة تايلر (Taylor's series expansion) ل $u_{i-1,j}$ ، وُسِّعَت على $u_{i,j}$.

[6] Engl.: first order *forward* difference expression for the derivative ($\partial u/\partial x$) at grid point (i, j).

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}(-\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}\frac{(-\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j}\frac{(-\Delta x)^3}{6} + \cdots$$

or,

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}\Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j}\frac{(\Delta x)^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j}\frac{(\Delta x)^3}{6} + \cdots \tag{5.5}$$

التحليل لِ $(\partial u/\partial x)_{i,j}$ ، يوصلنا الى

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)} \tag{5.6}$$

المعادلة (5.6) عبارة فروقية بالاتجاه الامامي للمشتق (∂u/∂x) في النقطة الشبكية (i, j) ذات درجة اولى.[7]

دعونا الآن نطرح (subtract) المعادلة (5.5) من (5.1) .

[7] Engl.: first order *rearward* difference expression for the derivative (∂u/∂x) at grid point (i, j).

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3} + \cdots \quad (5.7)$$

نحل المعادلة (5.7) ل $(\partial u/\partial x)_{i,j}$، و نحصل على

$$\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2} \quad (5.8)$$

المعادلة (5.8) **عبارة فروقية مركزية للمشتق (∂u/∂x) في النقطة الشبكية (i, j) ذات درجة ثانية.**[8]

للحصول على العبارة الجبرية للاختلاف المحدود للمشتق الجزئي الثاني $(\partial^2 u/\partial x^2)_{i,j}$ تذكر أولا أن ترتيب مصطلح الحجم (order-of magnitude) في المعادلة (5.8) يأتي من المعادلة

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{6} + \cdots \quad (5.9)$$

بإستبدال المعادلة (5.9) في (5.1)، نحصل على

[8] Engl.: *second order central difference* for the derivative (∂u/∂x) at grid point (i, j).

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left[\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{6} + \cdots\right]\Delta x$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6}$$
$$+ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^4}{24} + \cdots \qquad (5.10)$$

حل المعادلة (5.10) بالنسبة ل $(\partial^2 u/\partial x^2)_{i,j}$ ، نحصل على

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2} \qquad (5.11)$$

المعادلة (5.11) هي **عبارة للفرق الثاني المركزي من درجة ثانية** (*second-order central second difference*) للمشتق (derivative) $(\partial^2 u/\partial x^2)$ في نقطة الشبكة (i, j). تعابير الفروق (Difference expressions) للمشتقات من y تُحصل عليها بنفس الطريقة تماماً و النتائج مماثلة تماماً للمعادلات السابقة للمشتقات x وهم:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) \qquad \textit{Forward difference}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \qquad \textit{Rearward difference}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 \qquad \textit{Central difference}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2 \qquad \textit{Central second difference}$$

ومن المثير للاهتمام ان نلاحظ ان الفرق المركزي الثاني (central second difference) المعطى على سبيل المثال عن طريق المعادلة (5.11) يمكن تفسيره كفرق أمامي (forward difference) للمشتقات الأولى (first derivatives) ، مع وجود الفرق للوراء (rearward differences) المستخدمة في المشتقات الأولى(first derivatives). إذا اسقاطنا للتسهيل الرمز O ، لدينا:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \left[\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}\right) - \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}\right)\right]\frac{1}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \qquad (5.12)$$

معادلة (5.12) هي نفس حاصل الفرق (difference quotient) مثل المعادلة (5.11). ويمكن استخدام نفس الفلسفة للتوليد بسرعة حاصل الفرق المحدود (finite difference quotient) للمشتقات المختلطة (mixed derivative) $(\partial^2 u/\partial x\partial y)$ في نقطة (i, j) على الشبكة. على سبيل المثال،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (5.13)$$

في المعادلة (5.13)، اكتب المشتق لِـx كفرق مركزي للمشتقات لِـy ، ومن ثم ضع المشتقات لِـy أيضا في شكل الفُرق المركزية (Central differences) .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \left[\left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y}\right) - \left(\frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2\Delta y}\right)\right]\frac{1}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{4\Delta x \Delta y}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1})$$

or

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}) + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2]} \tag{5.14}$$

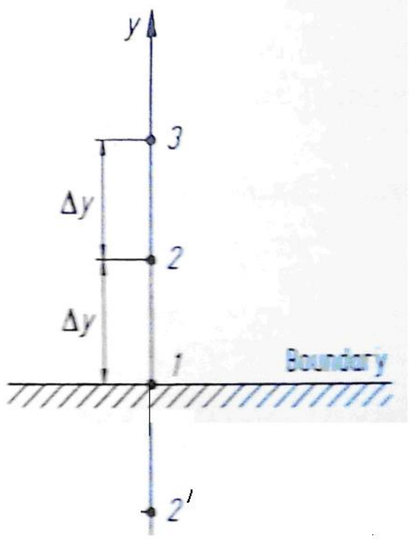
ويمكن الحصول على العديد من الفروق التقريبية الأخرى للمشتقات (derivatives) أعلاه، فضلا عن المشتقات ذات الترتيب الأعلى (higher-order derivates) من ذلك. الفلسفة هي نفسها.

لجدول مفصل للعديد من أشكال حواصل الفُرق (difference quotients)، انظر مثلاً الصفحات 44 و 45 من

Anderson, D.A., Tannehill, John C. and Pletcher, Richard H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1984.

ماذا يحدث على الحدود (**boundary**)؟

ماذا يحدث على الحدود (boundary)؟ اي نوع من الفرق (differencing) يكون بالإمكان اذا كان ليس لدينا الا اتجاه واحد لنمشي فيه اي الاتجاه الذي يتباعد عن الحدود (boundary)؟



الشكل 5:2: نقاط للشبكة عند جدار

على سبيل المثال،اعتبر الشكل 5.2، والذي يُوضح جزء من الحدود. مع النقطة 1 من الشبكة (grid) تكون على الحدود. و النقاط 2 و 3 في مسافة (distance) Δy و 2Δy فوق الحدود.

الآن نريد ان نضع تقريب لِ $\partial u/\partial y$ بالفرق المحددة على الحدود.

فمن السهل وضع الفرق الأمامي (forward difference) كما

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \frac{u_2 - u_1}{\Delta y} + O(\Delta y) \tag{5.15}$$

التي هي من الدرجة الأولى للدقة (first-order accuracy). لكن، كيف يمكننا الحصول على النتيجة التي هي من الدرجة الثانية للدقة (second-order accuracy)؟

لا نســـتطيع ان نضـــع فرق مركزي (central difference) كما هو في المعادلة (5.8) لأنه يتطلب نقطة اخرى وراء الجدار كما هو موضـــح في النقطة ′2 في الشـــكل. 5.2. النقطة ′2

هي خارج نطاق الحســـاب (computation)، وليس لدينا عموما أي معلومات عن u في هذه النقطة.

في الأيام الأولى من CFD ، هناك العديد من الحلول قد طرحت. مثلاً افتراض أن $u_{2'} = u_2$. ويسمى هذا الشرط جدار الإنعكاسي (reflection boundary). في معظم الحالات، لا معنى مادي (physical sense) لهذا، ومجرد غير دقيق، إن لم يكن أكثر من ذلك. لذلك نحن نطرح هذا السؤال مرة أخرى، كيف يمكننا العثور على فرق محدود (finite difference) من الدرجة الثانية في الدقة (second-order accurate) على الحدود (boundary)؟ الجواب بسيط، وأنه يوضح طريقة أخرى لاحتساب حواصل الفرق المحدود.

نفترض ان الحدود (boundary) u يمكن ان يعبر عنه متعدد الحدود (polynomial)

$$u = a+by+c\,y^2 \qquad (5.16)$$

اذا طبقنا هذه المعادلة على نقاط الشبكة في الشكل 5.2، نصل الى

$u_1 = a$

$u_2=a+b\Delta y+c(\Delta y)^2$

$u_3=a+b(2\Delta y)+c(2\Delta y)^2$

وحل (solving) هذا النظام (system) بالنسبة لِ b :

$$b = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y} \qquad (5.17)$$

نعود الى المعادلة (5.16)، وبالمفاضلة (differentiating) نصل الى:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b + 2cy \qquad (5.18)$$

و بِتـقـيـيـم (evaluation) المعادلة (5.18) على الحدود

(عند نقطة 1) حيث $y = 0$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = b \qquad (5.19)$$

بعد الجمع بين المعادلات (5.18) و (5.19)، نحصل على:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y} \qquad (5.20)$$

لإظهار ترتيب الدقة للمعادلة (5.20) سـننظر في توسـيع سـلسـلة تايلُر (Taylor's series expansion) حول النقطة 1.

$$u(y) = u_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_1 \frac{y^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_1 \frac{y^3}{6} + \cdots \qquad (5.21)$$

قارن المعادلات (5.21) و (5.16). التعبير المتعدد الحدود (polynomial expression) الذي افترضناه في المعادلة (5.16) هو يساوي استخدام أول ثلاث مصطلحات في سلسلة تايلر (Taylor's series). وبالتالي، المعادلة (5.16) هي من $O(\Delta y)^3$. في تشكيل المشتق (derivative) في المعادلة (5.20)، نحن قسمناه بِ Δy ، الأمر الذي يجعل المعادلة (5.20) من نوع $O(\Delta y)^2$ وبالتالي يمكن أن نكتب المعادلة (5.20) كما يلي:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 \qquad (5.22)$$

وهذا هو حاصل الفرق ذات الدرجة الثانية من دقة (second-order- difference quotient accurate) على الحدود الذي كنا نبحث عنه. كلا المعادلتين (5.15) و (5.22) تسمى الفُرُق من جانب واحد (*one-sided differences*)، لأنها تعبر عن المشتق (derivative) لِدالة (function) في نقطة عن طريق مصطلح رياضي بِمتغيرات تابعة التي تعتمد على جانب واحد فقط من هذه النقطة. يمكن تشكيل العديد من فُرُق من جانب واحد (*one-sided differences*)، بأعلى درجات من الدقة (accuracy)، وذلك باستخدام نقاط إضافية إلى جانب واحد (one side) من الحدود.

5.3 جوانب اساسية لمعادلات الفرق المحدود (Basic Aspects of Finite-Difference Equations)

الجوهر من حلول عن طريق الفرق المحدودة (finite-difference) في الCFD هو استخدام المقسومات الفرقية (difference quotients) التي استخرجت في فصل 5.2 بدل المشتقات الجزئية في المعادلات الاساسية لميكانيك الموائع (governing flow equations). النتيجة هي منظومة من معادلات فرقية جبرية (system of algebraic difference equations) للمتغيرات التابعة (dependent variables) في كل نقطة من الشبكة (grid).

في هذا الباب، سندرس بعض الجوانب الأساسية لمعادلة فرقية (a difference equation).

اعتبر المعادلة النموذجية التالية، والتي يفترض فيها أن u هو المتغير التابع (dependent variable) و يكون دالة (function) من x و t.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.23}$$

نختار هذه المعادلة البسيطة تسهيلاً للعمل، في هذه المرحلة من مناقشاتنا ليس هناك ميزة يمكن الحصول عليها عن طريق التعامل مع معادلات السريان (flow equations) الأكثر تعقيدا.

المعادلة (5.23) هي من نوع القطع المكافئ (parabolic).

إذا قمنا باستبدال مشتق الوقت (time derivative) في المعادلة (5.23) بفارق إلى الأمام (forward difference)، ومشتق المكاني (spatial derivative) مع اختلاف مركزي، نصل الى النتيجة التالية:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{5.24}$$

سؤال: ما هو خطأ الاقتطاع (truncation error) لمعادلة الفرق محدود كاملة (finite-difference equation)؟

الجمع بين المعادلات (5.23) .و (5.24)، وكتابة بشكل واضح أخطاء الاقتطاع (truncation errors) المرتبطة بحواصل الفرق (difference quotients) من المعادلات (5.4) و (5.10) أصبح لدينا:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2}$$

على جانب اليسار للمعادلة (5.25) هناك المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية (original partial differential equation)

$$+\left[-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n \frac{\Delta t}{2}+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^n \frac{(\Delta x)^2}{12}+\cdots\right] \qquad (5.25)$$

، وعلى الجانب الايمن هناك المصطلحين الأول والثاني لمصطلح الفرق المحدودة (finite difference expression) لهذه المعادلة.

و المصطلحات الواردة في أقواس مربعة [] هي **خطأ الاقتطاع** (***truncation error***) **للمعادلة الكاملة**. خطأ الاقتطاع (truncation error) لهذا البيان (representation) هو $O[\Delta t, (\Delta x)^2]$.

هل معادلةَ الفرق المحدود (finite-difference equation) تساوي المعادلة التفاضليةِ الأصليةِ (original differential equation) إذا عدد نقاطِ الشبكةِ يَذْهبُ إلى ما لا نهايةِ، أي لو مثلاً $\Delta x \to 0$ و $\Delta t \to 0$؟

فحص المعادلة (5.25) ، نلاحظ أن خطأ الاقتطاع (truncation error) يذهب الى الصفر، وبالتالي معادلة الاختلاف (difference equation) تقترب حقا من المعادلة التفاضلية الأصلية.

عندما يكون هذا هو الحال، يقال إن بيان الفرق المحدودة (finite-difference representation) للمعادلة التفاضلية الجزئية (partial differential equation) متناسق (consistent).

حل المعادلة (5.24) يأخذ شكل حل 'السير' ('marching') في خطوات من الزمن. (ولنتذكر من المقطع 4.3.2 أن حلول السير (marching solutions) هي سمة من سمات لمعادلات القطع المكافئ (parabolic equations)).

فترض أننا نعرف المتغير التابع (dependent variable) لكلٍّ x في بعض لحظة من الزمن، لظروف الأولية (initial conditions) المعطية. و بِفَحص المعادلة (5.24)، نرى أنها تحتوي على متغير واحد فقط غير معروف (unknown)، وهو u_j^{n+1}. و بهذه الطريقة، يمكن الحصول على المتغير التابع (dependent variable) في الوقت $(t+\Delta t)$ مباشرة من النتائج المعروفة (known results) في الوقت t ، يعني ذلك انه يتم الحصول عليها مباشرةً من القيم المعروفة (known values) u_{j+1}^n, u_j^n و u_{j-1}^n. هذا هو مثال على حل للفرق المحدودة بالشكل الواضح المباشر (*explicit finite-difference solution*).

بالمقابل كمثال مضاد، نعود إلى المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية (original partial differential equation) التي قدمتها المعادلة (5.23). هذه المرة، نكتب الاختلافات المكانية (spatial differences) على الجانب الأيمن و بمصطلحات المعدل (average properties) بين n و (n+1)، وهذا هو

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1}^{n+1}+u_{i+1}^{n}-2u_i^{n+1}-2u_i^n+u_{i-1}^{n+1}+u_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right] \qquad (5.26)$$

وهذا الشكل من الاختلاف (differencing) المبين في المعادلة (5.26) يسمى الشكل الكرانك- نيكلسون (Crank-Nicolson form).

افحص المعادلة (5.26). غير المعروف u_i^{n+1} لا يُعبَّر عنه فقط عبر كميات معروفة (terms of the known quantities) في نقطة الزمان n — و هي u^n_i, u^n_{i+1}، و u^n_{i-1} – ولكن أيضا عبر كميات غير معروفة و هي في نقطة الزمان n+1 — و هي u^{n+1}_{i+1} و u^{n+1}_{i-1}.

وبالتالي، اذا حاولنا ان نطبق المعادلة (5.26) عند نقطة معينة i في الشبكة (grid) لا يمكن في هذه النقطة بحد ذاتها الحصول على الحل لِ u_i^{n+1}. بدلا من ذلك، المعادلة (5.26) يجب أن تكون مكتوبة في جميع نقاط الشبكة، مما يؤدي الى نظام من المعادلات الجبرية (system of algebraic equations) حيث يكون المجهول (unknown) u_i^{n+1} لجميع i و يمكن حلها سويةً في وقت واحد. هذا مثال على حل ضمني للفرق المحدود (implicit finite-difference solution). لأنها تعالَج مع حل لنظم كبيرة (large systems) من المعادلات الجبرية الخطية في وقت واحد (simultaneous linear algebraic) وتشارك عادة الطرق الضمنية (implicit methods) في التلاعب بالمصفوفات الكبيرة (large matrices).

وفيما يلي موجز من الايجابيات (advantages) والسلبيات (disadvantages) الرئيسية بالنسبة لهذين المنهجين.

1) النهج الصريح (Explicit approach)

أ) ايجابية (advantage): بسيط نسبيا لإنشاء (set up) برنامج (program).

ب) السلبية (disadvantage): على صعيد المثال اعلاه، لِ Δx معين، يجب أن يكون Δt أقل من بعض الحدود (limit) التي تفرضها قيود الاستقرار (stability constraints). في كثير من الحالات، يجب أن تكون Δt ضئيلة للغاية للحفاظ على الاستقرار (stability)، وهذا

يمكن أن يؤدي إلى تشغيل الكمبيوتر (computer) لوقت طويل لإجراء حسابات (calculations) على مدى فترة معينة من الزمان t .

2) النهج الضمني (Implicit approach)

أ) ميزة. يمكن الحفاظ على الاستقرار (stability) للقيم الأكبر بكثير من Δt ، وبالتالي باستخدام خطوات وقت أقل بكثير لجعل العمليات الحسابية (calculations) على مدى فترة معينة من t. هذه النتائج تأخذ وقتاً اقل في الكمبيوتر(computer).

ب) العيب. أكثر تعقيدا لإنشاء برنامج(program).

ج) العيب: بما ان التلاعب بالمصفوفة الضخمة(massive matrix) هي بشكل عام ضرورية في كل خطوة من الوقت, وقت الكمبيوتر في كل خطوة وقت هو أكبر بكثير مما كانت عليه في النهج الصريح(explicit approach).

د) العيب: بما انه يمكن اتخاذ Δt كبيرة ، وخطأ اقتطاع أكبر(truncation error)، واستخدام طرق ضمنية (implicit methods) لمتابعة العابرين المحددين (اختلافات الوقت للمتغيرات المستقلة (independent variable)) قد لا تكون دقيقة كالنهج الصريح(explicit approach).

ومع ذلك للتوصل الى حل مشروط بالوقت حيث فيه حالة الاستقرار (steady state) هي النتيجة المرجوة بالنسبة لناحية الوقت غير الدقيق (inaccuracy) هي ليست مهمة.

خلال الفترة من عام 1969 إلى حوالي عام 1979، فإن الغالبية العظمى من الحلول CFD العملية التي تنطوي على حلول 'السير' ('marching') (كما هو الحال في المثال أعلاه) حيث الطرق الواضحة (explicit methods) هي المستخدمة.

ومع ذلك، فإن العديد من تطبيقات ال CFD الأكثر تطورا تلك التي تتطلب نقاط شبكة (grid points) قريبة جدا من بعضها في بعض مناطق التدفق (regions of the flow) الذي يتطلب وقت تشغيل اكبر للكمبيوتر نظراً إلى خطوات السير الصغيرة (small marching steps) المطلوبة.

وقد جعلت هذه الميزة (advantage) المذكورة أعلاه الطرق الضمنية (implicit methods) جذابة للغاية ألا وهي القدرة على استخدام خطوات سير كبيرة حتى بالنسبة لشبكة دقيقة جداً. لهذا السبب كانت الطرق الضمنية (implicit methods) في الثمانينيات محوراً رئيسياً من تطبيقات ال CFD.

5.3.1 تعليق عام

فمن الواضح أن حلول الفُرق المحدودة ، تبدو فلسفياً واضحة باستبدال المشتقات الجزئية (partial derivatives) في المعادلات الاساسية (governing equations) بحواصل الفرق الجبرية (algebraic difference quotients)، و تقليص الفرق للحصول على حلول لهذه المعادلات الجبرية (algebraic equations) في كل نقطة من نقاط الشبكة. ومع ذلك، هذه الفكرة مضلِّلة. لأي تطبيق معين، ليس هناك ما يضمن أن مثل هذه الحسابات (calculations) ستكون دقيقة (accurate)، أو حتى مستقرة (stable)، في ظل جميع

الشروط. وعلاوة على ذلك، فإن شروط الحدود (boundary conditions) لمشكلة معينة إملاء حل، وبالتالي فإن العلاج المناسب لشروط الحدود (boundary conditions) في إطار تقنية محدودة، ولا سيما الفرق المحدود (finite-difference) أمر في غاية الاهمية

5.4 - Errors and an Analysis of Stability أخطاء وتحليل الاستقرار

At the end of the last section, we stated that no guarantee exists for the accuracy and stability of a system of finite-difference, equations under all conditions.

في نهاية المقطع الأخير، ذكرنا أنه لا وجود لضمان دقة واستقرار نظام الفرق المحدود، للمعادلات في كل الشروط.

However for linear equations there is a formal way of examining the accuracy and stability and these ideas at least provide guidance for the understanding of the behaviour of the more complex non-linear system that is our governing flow equations.

ولكن للمعادلات الخطية هناك وسيلة رسمية لفحص الدقة والاستقرار وهذه الأفكار على الأقل تقدم توجيه لبيان فهم سلوك النظام غير الخطي والأكثر تعقيدا وهذه هي المعادلات الاساسية للسريان.

In this section we introduce some of these ideas, applied to simple linear equations.

في هذا القسم نقدم بعض هذه الأفكار التي تطبق على المعادلات الخطية البسيطة.

The material in this section is patterned somewhat after section 3–6 of the excellent new book on CFD by Dale Anderson, John Tannehill and Richard Pletcher (Ref. [1]) which should be consulted for more details. Consider a partial differential equation, such as for example Eq. (5.23). The numerical solution of this equation is influenced by two sources of error:

ونمط هذه المواد في هذا الباب إلى حد ما بعد القسم 3-6 من كتاب CFD الجديد الممتاز من قبل دايل أندرسون (Dale Anderson)، جون تانهيل (John Tannehill) وريتشارد بلاتشار ((Richard Pletcher)) المرجع [1]) التي ينبغي التشاور معها لأي تفصيل دقيق. لنعتبر المعادلة التفاضلية الجزئية، مثل على سبيل المثال المعادلة.(5.23). ويتأثر الحل العددي لهذه المعادلة من قبل اثنين من مصادر الخطأ:

1 .Discretization error. The difference between the exact analytical solution of the partial differential equation (for example, Eq. (5.23)) and the exact (round-off free) solution of the corresponding difference equation (for example, Eq. (5.24)).

From our previous discussion, the discretization error is simply the truncation error for the difference equation plus any errors introduced by the numerical treatment of the boundary conditions.

1. خطأ التفريز (Discretization error). الفرق بين الحل التحليلي (analytical solution) الدقيق للمعادلة التفاضلية الجزئية (partial differential equation) (على سبيل المثال المعادلة (5.23)) والحل الدقيق (تقريباً حر (round-off free)) الذي يتوافق مع معادلة الفرق (difference equation) (على سبيل المثال المعادلة (5.24)).

في مناقشتنا ألسابقة خطأ التفريز (discretization error) هو ببساطة خطأ اقتطاع

(truncation error) معادلة الفرق (difference equation) بالإضافة الى الاخطاء التي تدخل في المعالجة الرقمية (numerical treatment) لشروط الحدود (boundary conditions) .

2 .Round-off error. The numerical error introduced after a repetitive number of calculations in which the computer is constantly rounding the numbers to some significant figure.

.2. خطأ التقريب (Round-off error). يدخل الخطأ العددي (numerical error) بعد عدد من العمليات الحسابية (calculations) المتكررة في جهاز الكمبيوتر الذي يقوم بتقريب (rounding) الأرقام باستمرار إلى بعض الاعداد المعبرة (significant figure) .

If we let

A = analytical solution of the partial differential equation

D = exact solution of the difference equation

N = numerical solution from a real computer with finite accuracy

إذا تركنا

A= الحل التحليلي (analytical solution) للمعادلة التفاضلية الجزئية (partial differential equation)

D = الحل الدقيق (exact solution) لمعادلة الفرق (difference equation)

N = الحل العددي (numerical solution) من جهاز كمبيوتر الحقيقي مع دقة متناهية

then ,

Discretization error = A−D

Round-off =ε = N −D (5.27)

From Eq. (5.27), we can write

$N = D+\varepsilon$ (5.28)

ثم،

خطأ التفريز (Discretization error) = A-D

التقريب (Round-off) = $N - D = \varepsilon$ (5.27)

من المعادلة. (5.27)، يمكن أن نكتب

$N = D + \varepsilon$ (5.28)

Where again ε is the round-off error, which for the remainder of our discussion in this section, we will simply call "error" for brevity. The numerical solution N must satisfy the difference equation. Hence from Eq. (5.24),

حيث مرة أخرى ε هو خطأ التقريب (round-off error)، لبقيّةِ مُناقشتِنا في هذا القسمِ، و سوف نسميه ببساطة "خطأ" للإيجاز. الحل العددي (numerical solution) N يجب ان تكفي معادلة الفرق (difference equation). وبالتالي من المعادلة (5.24),

$$\frac{D_i^{n+1}+\varepsilon_i^{n+1}-D_i^n-\varepsilon_i^n}{\Delta t}=\frac{D_{i+1}^n+\varepsilon_{i+1}^n-2D_i^n-2\varepsilon_i^n+D_{i-1}^n\varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (5.2$$

By definition, D is the exact solution of the difference equation, hence it exactly satisfies:

بحكم التعريف، D هو الحل الدقيق (exact solution) لمعادلة الفرق (difference equation)، وبالتالي انه يفي تماما :

$$\frac{D_i^{n+1} - D_i^n}{\Delta t} = \frac{D_{i+1}^n - 2D_i^n + D_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \qquad (5.30)$$

Subtracting Eq. (5.30) from (5.29),

طرح المعادلة (5.30) من (5.29),

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \qquad (5.31)$$

From Eq. (5.31), we see that the error ε also satisfies the difference equation.

من المعادلة. (5.31)، نرى ان الخطأ (error) ε يكفي ايضاً معادلة الفرق (difference equation).

Stability Analysis - تحليل الاستقرار

We now consider aspects of the stability of the difference equation, Eq. (5.24). **If errors ε_i are already present at some stage of the solution of this equation (as they always are in any real computer solution), then the solution will be stable if the ε_i's shrink, or at best stay the same, as the solution progresses from step n to n+1; on the other hand, if the ε_i's grow larger during the progression of the solution from steps n to n+1, then the solution is unstable.**

That is, for a solution to be stable,

نحن نعتبر الآن جوانب الاستقرار (aspects of the stability) في معادلة ألفرق (difference equation), المعادلة. (5.24). إذا كانت الأخطاء ε_i موجودة في بعض مراحل الحل لهذه المعادلة (كما هم دائما في أي حل حقيقي للكمبيوتر)، ثم فإن الحل يكون مستقرا

(**stable**) إذا كانت الاخطاء ε_i تتقلص، أو في أحسن الأحوال تبقى نفسها، حيث الحل يتقدم من الخطوة **n** إلى **n+1**، ومن ناحية أخرى، إذا كانت ε_i تكبر مع تقدم الحل من المرحلة **n** الى **n+1** فان الحل يكون غير مستقر (**unstable**).

بطريقة أخرى للتوصل الى حل يكون مستقر (stable),

$$|\varepsilon_i^{n+1}/\varepsilon_i^n \leq 1 \qquad (5.32)$$

For Eq. (5.24), let us examine under what conditions Eq. (5.32) holds. Assume that the distribution of errors along the x-axis is given by a Fourier series in x, and that the time-wise variation is exponential in t, i.e.

للمعادلة (5.24)، دعونا نبحث تحت أي شروط تستمر المعادلة (5.32).لنفبرض ان توزيع الاخطاء (distribution of errors) على طول محور x (x-axis) تكون معطاة من قبل سلسلة فوريه (Fourier series) في x ، وهذا من ناحية الوقت الاختلاف هو الأسي (exponential) في t ، أي

$$\varepsilon(x,t) = e^{at} \sum_m e^{ik_m x} \qquad (5.33)$$

Where k_m is the wave number and where the exponential factor a is a complex number. Since the difference equation is linear, when Eq. (5.33) is substituted into Eq. (5.31) the behaviour of each term of the series is the same as the series itself. Hence, let us deal with just one term of the series, and write

حيث k_m هو عدد الموجات (wave number) وحيث العامل الأسي (exponential factor) a هو عدد مركب (complex number). بما ان معادلة الفرق (difference equation) هي خطية (linear)، عندما يتم استبدال المعادلة (5.33) في المعادلة (5,31) سلوك كل مصطلح (term) من هذه السلسلة (series) هو نفس السلسلة (series) ذاتها. ومن ثم، دعونا نتعامل مع مصطلح واحد فقط من هذه السلسلة (series)، وكتابة

$$\varepsilon_m(x,t) = e^{at} e^{ik_m x} \tag{5.34}$$

Substitute Eq. (5.34) into Eq. (5.31),

استبدال المعادلة. (5.34) في المعادلة (5.31).

$$\frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m x}}{\Delta t} = \frac{e^{at} e^{ik_m(x+\Delta x)} - 2e^{at} e^{ik_m x} + e^{at} e^{ik_m(x-\Delta x)}}{(\Delta x)^2} \tag{5.35}$$

Divide Eq. (5.35) by $e^{at} e^{ik_m x}$.

تقسيم (Divide) المعادلة (5.35) من قبل $e^{at} e^{ik_m x}$.

$$\frac{e^{a\Delta t}-1}{\Delta t}=\frac{e^{ik_m\Delta x}-2+e^{-ik_m\Delta x}}{(\Delta x)^2}$$

or,

$$e^{a\Delta t}=1+\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(e^{ik_m\Delta x}+e^{-ik_m\Delta x}-2) \qquad (5.36)$$

Recalling the identity that

تَذْكير الهوية (identity) تلك

$$\cos(k_m\Delta x)=\frac{e^{ik_m\Delta x}+e^{-ik_m\Delta x}}{2}$$

Equation (5.36) can be written as

ويمكن كتابة المعادلة (5.36) على الشكل التالي:

$$e^{a\Delta t}=1+\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}[\cos(k_m\Delta x)-1] \qquad (5.37)$$

Recalling another trigonometric identity that

تذكير بهوية مثلثاتي (trigonometric identity) آخرى و هي

$$\sin^2[(k_m\Delta x)/2]=\frac{1-\cos(k_m\Delta x)}{2}$$

Equation (5.37) finally becomes

المعادلة (5.37) تصبح في نهاية المطاف

$$e^{a\Delta t} = 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2[(k_m \Delta x)/2] \tag{5.38}$$

From Eq. (5.34),

من المعادلة. (5.34)

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n} = \frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x}}{e^{at} e^{ik_m x}} = e^{a\Delta t} \tag{5.39}$$

Combining Eqs. (5.39), (5.38) and (5.32), we have

الجمع (Combining) بين المعادلات (5.39)، (5.38)و (5.32)، يصبح لدينا

$$\left|\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}\right| = |e^{a\Delta t}| = \left|1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2[(k_m \Delta x)/2]\right| \leq 1 \tag{5.40}$$

Equation (5.40) must be satisfied to have a stable solution, as dictated by Eq. (5.32). In Eq. (5.40) the factor

يجب أن توفى المعادلة (5.40) كل شروط ليكون لدينا حل مستقر وفقا لما تمليه المعادلة. (5.32). في المعادلة. (5.40)) العامل

$$\left|1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2[(k_m\Delta x)/2]\right| \equiv G$$

is called the amplification factor, and is denoted by G. Evaluating the inequality in Eq. (5.40), namely $G \le 1$, we have two possible situations which must hold simultaneously:

وهو يسمى عامل التضخيم (amplification factor) ويرمز اليه عبر الرمز G. تقييم التفاوت (inequality) في المعادلة (5.40)، أي $G \le 1$، لدينا اثنين من الحالات المحتملة التي يجب ان تحصل و تستمر في نفس الوقت:

$$(1)\quad 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2[(k_m\Delta x)/2] \le 1$$

Thus

$$\frac{4\Delta t}{(\Delta x)}\sin^2[(k_m\Delta x)/2] \ge 0$$

Since $\Delta t/(\Delta x)^2$ is always positive, this condition always holds.

بما ان $\Delta t/(\Delta x)^2$ هي دائماً ايجابي هذا الشرط يستمر دائماً

$$(2)\quad 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2[(k_m\Delta x)/2] \ge -1$$

Thus

$$\frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2[(k_m\Delta x)/2] - 1 \le 1$$

For the above condition to hold,

لاستمرار الشروط اعلاه

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \tag{5.41}$$

Equation (5.41) gives the stability requirement for the solution of the difference equation, Eq. (5.24), to be stable.

المعادلة (**5.41**) تعطي متطلبات الاستقرار (**stability requirement**) لحل معادلة الفرق (**difference equation**), المعادلة (**5.24**)، ممكن ان تكون مستقرة (**stable**).

Clearly, for a given Δx, the allowed value of Δt must be small enough to satisfy Eq. (5.41).

بوضوح، لاجل Δx محددة، يجب أن تكون قيمة Δt صغيرة بما يكفي لتلبية حاجة المعادلة (5.41).

Here is a stunning example of the limitation placed on the marching variable by stability considerations for explicit finite difference models.

هنا هو مثال مذهل لوضع القيود على متغير السير (marching variable) التي تفرضها اعتبارات الاستقرار (stability) لنماذج الفرق المحدود الواضحة (explicit finite difference models).

As long as $\Delta t/(\Delta x)^2 \leq 1/2$, the error will not grow for subsequent marching steps in t, and the numerical solution will proceed in a stable manner.

طالما $\Delta t/(\Delta x)^2 \leq 1/2$، الخطأ لن ينمو لخطوات السير (marching steps) اللاحقة في t ، والحل العددي (numerical solution) سيحدث في حالة مستقرة(stable manner).

On the other hand, if $\Delta t/(\Delta x)^2 > 1/2$, then the error will progressively become larger, and will eventually cause the numerical marching solution to 'blow up' on the computer .

من ناحية أخرى، إذا $\Delta t/(\Delta x)^2 > 1/2$، إذاً الخطأ سوف يصبح تدريجياً أكبر ، ويسبب في نهاية المطاف حل عددي للسير(numerical marching solution) لتفجير('blow up') جهاز الكمبيوتر.

The above analysis is an example of a general method called the von Neuman stability method, which is used frequently to study the stability properties of linear difference equations.

إن التحليل (analysis) الوارد أعلاه هو مثال على طريقة عامة تسمى طريقة استقرار فون نيومان (von Neuman stability method)، التي كثيرا ما تستخدم لدراسة خصائص الاستقرار (stability properties) لمعادلات الفرق الخطية (linear difference equations).

Another Example: Stability analysis of a hyperbolic equation - مثال آخر: تحليل الاستقرار للمعادلة القطعية

Let us quickly examine the stability characteristics of another simple equation, this time a hyperbolic equation. Consider the first order wave equation:

Laissez-nous examiner rapidement les caractéristiques de stabilité d'une autre équation simple, cette fois une équation hyperbolique. Considérons l'équation du premier ordre d'onde:

دعونا بسرعة نقوم بدراسة خصائص الاستقرار (stability characteristics) لمعادلة بسيطة أخرى وهذه المرة لمعادلة قطعية (hyperbolic equation). لنعتبر معادلة الدرجة الأولى للموجة (first order wave equation):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (5.42)$$

Let us replace the spatial derivative with a central difference (see Eq. (5.8)).

دعونا نستبدل المشتق المكاني (spatial derivative) مع الفرق المركزي (central difference) (انظر المعادلة (5.8)).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^{n}_{i+1} - u^{n}_{i-1}}{2\Delta x} \qquad (5.43)$$

Let us replace the time derivative with a first order difference, where u(t) is represented by an average value between grid points (i+1) and (i−1), i.e.

دعونا نستبدل مشتق الوقت (time derivative) مع الفرق ذات الدرجة الأولى (first order difference) حيث يتم تمثيل قيمة المعدل (average value) بين نقاط الشبكة (grid points) (i+1)و (i−1) ، أي

$$u(t) = \frac{1}{2}(u_{i+1}^{n} + u_{i-1}^{n})$$

Then

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^{n} + u_{i+1}^{n})}{\Delta t} \qquad (5.44)$$

Substituting Eqs. (5.43) and (5.44) into (5.42), we have

استبدال المعادلات (5.43) و (5.44) في (5.42) ،يصبح لدينا

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^{n} + u_{i-1}^{n}}{2} - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{u_{i+1}^{n} - u_{i-1}^{n}}{2}\right) \qquad (5.45)$$

Combining Eqs. (5.18) and (5.19), we obtain The differencing used in the above equation, where Eq. (5.44) is used to represent the time derivative, is called the Lax method, after the mathematician Peter Lax who first proposed it. If we now assume an error of the form $\varepsilon_m(x, t) = e^{at}e^{ik_m t}$ as done previously, and substitute this form into Eq. (5.45), the amplification factor become sin

الجمع بين المعادلات (5.18) و (5.19)، نحصل على التفريق (differencing) المستخدم في المعادلة المذكورة أعلاه، حيث المعادلة (5.44) مستعملة لتمثيل مشتق الوقت (time derivative)، التي تسمى طريقة لاكس (Lax)، وبعد بيتر لاكس (Peter Lax) عالم الرياضيات الذي كان اول من طرحها. لو افترضنا الآن شكل الخطأ (error) $\varepsilon_m(x, t) =$ $e^{at}e^{ikmt}$ المعمول بها سابقا، واستبدال هذا الشكل في المعادلة (5,45), عامل التضخيم اصبح sin

$$G = \cos(km\Delta x) - iC\sin(km\Delta x) \qquad (5.46)$$

where C = c.Δt/Δx . The stability requirement is |e^{at}| ≤ 1,which when applied to Eq. (5.46) yields

حيث C = c.Δt/Δx. الشرط المطلوب للاستقرار (stability requirement) هو $|e^{at}| \leq$

1, عندما تطبق على المعادلة (5.46) نحصل على:

$$C = c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \qquad (5.47)$$

In Eq. (5.47), C is called the *Courant number*. This equation says that Δt ≤ Δx/c for the numerical solution of Eq. (5.45) to be stable. Moreover, Eq. (5.47) is called the *Courant–Friedrichs–Lewy condition*, generally written as the CFL condition. It is an important stability criterion for hyperbolic equations. Let us examine the physical significance of the CFL condition. Consider the second order wave equation

في المعادلة (5.47) ، تسمى C عدد كوران (*Courant number*). هذه المعادلة تقول إن (Δt ≤ Δx/c) من أجل ان يكون الحل العددي (numerical solution) في المعادلة (5.45) مستقراً (stable). وعلاوة على ذلك، المعادلة (5.47) تسمى شرط كوران – فريدرخس – ليفي (*Courant–Friedrichs–Lewy condition*)، عموما يكتب كشرط CFL. من المهم الإشارة إلى معيار الاستقرار (stability) العام للمعادلات القطعية (hyperbolic equations). دعونا ندرس الأهمية الفيزيائية (physical) لشرط ال CFL. لنعتبر معادلة الموجة (wave equation) ذات الدرجة الثانية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (5.48)$$

The characteristic lines for this equation (see Sect. 4.2) are given by

الخطوط الرئيسية (characteristic lines) لهذه المعادلة (انظر القسم 4.2) تكون مقدمة عبر

$$x = ct \quad \text{(right running)}$$

and

$$x = -ct \quad \text{(left running)}$$

and are sketched in Fig. 5.3(a) and (b). In both parts (a) and (b) of Fig. 5.3, let point b be the intersection of the right-running characteristic through grid point (i − 1) and the left-running characteristic through grid point (i+1).

ورسمت في الشكل 5.3(a) و (b). في كلا الجزئين (a) و (b) من الشكل 5.3، سمح للنقطة b ان تكون تقاطع (intersection) لخصائص الاندفاع يميناً (right-running) خلال نقطة الشيكة (i − 1)، و خصائص الاندفاع يساراً (left-running) خلال نقطة الشبكة (i+1).

For Eq. (5.48), the CFL condition as given in Eq. (5.47) holds as the stability criterion. Let $\Delta t_{C=1}$ denote the value of Δt given by Eq. (5.47) when C = 1. Then $\Delta t_{C=1} = \Delta x/c$, and the intersection point b is therefore a distance $\Delta t_{C=1}$ above the x-axis, as sketched in Figs. 5.3(a) and (b).

للمعادلة (5.48)، شرط ال CFL المعطى في المعادلة (5.47) يعطي معيار الاستقرار (stability criterion). لنفترض $\Delta t_{C=1}$ يدل على قيمة ال Δt المقدمة بواسطة المعادلة (5.47) حيث C = 1. ثم $\Delta t_{C=1} = \Delta x/c$ وبالتالي نقطة التقاطع (stability criterion) b على مسافة $\Delta t_{C=1}$ فوق المحور x (x-axis)، كما رسمت في الرسم 5.3(a) و (b).

Now assume that C < 1, which is the case sketched in Fig. 5.3(a). Then from Eq. (5.47), $\Delta t_{C<1} < \Delta t_{C=1}$, as shown in Fig. 5.3(a).

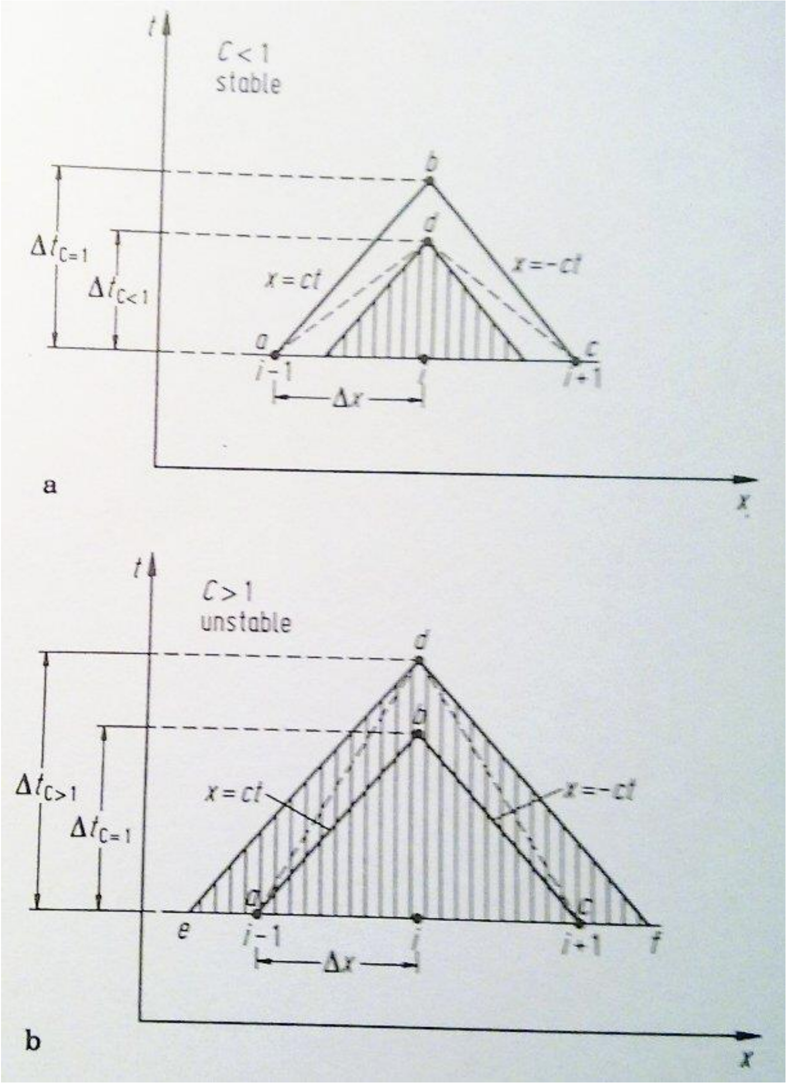
لنفترض الآن ان C < 1, وهي الحالة (case) المرسوم في الرسم 5.3(a). ثم من المعادلة (5.47)، $\Delta t_{C<1} < \Delta t_{C=1}$، كما هو مبين في الشكل 5.3(a).

Let point d correspond to the grid point at point i, existing at time ($t+\Delta t_{C<1}$). Since properties at point d are calculated numerically from the difference equation using grid points (i−1) and (i+1), the numerical domain for point d is the triangle adc shown in Fig. 5.3(a).

لنفترض النقطة d تتوافق مع نقطة في الشبكة عند النقطة i, الموجودة في الوقت ($t+\Delta t_{C<1}$).

بما ان الخصائص (properties) عند النقطة d تحسب عددياً (calculated numerically) من معادلة الفرق (equation) باستخدام نقاط الشبكة (grid) (i-1) و (i +1), النطاق العددي (numerical domain) لنقطة d يكون المثلث (triangle) adc. الذي يظهر في الشكل 5.3(a).

المجال التحليلي (analytical domain) للنقطة d هو المثلث المظلل (shaded triangle) في الشكل 5.3(a), المعرَّف عنه بالخصائص (characteristics) عند النقطة d. ونلاحظ أن في الشكل 5.3(a) المجال العددي (numerical domain) للنقطة d يشمل المجال التحليلي (analytical domain). في المقابل،لنفترض الحالة المبينة في الشكل 5.3(b) . هنا، C > 1إذاً، من المعادلة (5.47), $\Delta t_{C>1} > \Delta t_{C=1}$ ، كما هو مبين في الشكل 5.3(b) .لنفترض النقطة d



الشكل 5.3: توضيح للأهمية (physical significance) الفيزيائية لشرط CFL

في الشكل 5.3(b) التي تتناسب مع نقطة الشبكة i، الموجودة في الوقت $(t+\Delta t_{C>1})$. بما ان الخصائص في النقطة d تحسب عددياً (calculated numerically) من معادلة الفرق (difference equation) باستخدام نقاط شبكة (grid points) (i−1) و (i+1) ، النطاق العددي (numerical domain) للنقطة d هو المثلث (triangle) adc الذي يظهر في الشكل

5.3(b). المجال التحليلي (analytical domain) للنقطة d هو المثلث المظلل (shaded triangle) في الشكل 5.3(b). والمعرَّف عنه من خلال الخصائص (characteristics) عند النقطة d. نلاحظ أن في الشكل 5.3(b) المجال العددي (numerical domain) لا يشمل كل المجال التحليلي (analytical domain), وهذا هو الشرط (condition) الذي يؤدي إلى سلوك غير مستقر(unstable behaviour). ولذلك، يمكن أن نقدم التفسير الفيزيائي (physical interpretation) التالي لشرط ال CFL (CFL condition) :

من أجل الاستقرار (stability)، المجال الحسابي (computational domain) يجب أن يشمل كل المجال التحليلي (analytical domain).الاعتبارات المذكورة أعلاه تدرس مع الاستقرار (stability). مسألة الدقة (accuracy)، والتي تختلف تماما في بعض الأحيان، يمكن ايضاً أن تدرس من وجهة نظر الشكل. 5.3. لنعتبر الحالة المستقرة (stable case) كما هو مبين في الشكل 5.3(a). نلاحظ ان المجال التحليلي (analytic domain) للتبعية (dependence) للنقطة d هو المثلث المظلل (shaded triangle) في الشكل 5.3(a). من مناقشاتنا في الفصل 4 (Chap. 4)، والخصائص في نقطة d نظرياً يعتمد فقط على النقاط داخل المثلث المظلل (shaded triangle).ومع ذلك، نلاحظ ان نقاط الشبكة العددية (numerical grid points) (i−1) و(i+1) تكون خارج مجال ألتبعية (of dependence) وبالتالي نظريا يجب ان لا يؤثر على الخصائص (properties) عند النقطة d. من ناحية أخرى، الحساب العددي (numerical calculation) للخصائص (properties) في نقطة d تأخذ معلومات من نقاط الشبكة (grid points) (i − 1) و (i + 1).وهذه الحالة تكون قد تفاقمت عندما يتم اختيار $\Delta t_{C<1}$ صغيرة جداً، $\Delta t_{C<1} << \Delta t_{C=1}$. في هذه الحالة، على الرغم من ان العمليات الحسابية

(calculations) في حالة مستقرة (stable)، قد تكون النتائج (results) غير دقيقة (inaccurate) تماماً بسبب البعد (mismatch) الواسع بين المجال التبعية للنقطة (domain of dependence) d ، و بين موقع البيانات العددية الفعلية (actual numerical data) المستخدمة لحساب الخصائص (properties) عند d. في ضوء المناقشة الواردة أعلاه، نخلص إلى أن العدد الحالي (Courant number) يجب أن يكون مساوي أو أقل من وحدة (unity) من أجل الاستقرار (stability)، $C \leq 1$، المرغوب فيه بنفس الوقت هو أن يكون C أقرب إلى وحدة (unity) كاحتمال من أجل الدقة (accuracy) .

References

Anderson, D.A., Tannehill, John C. and Pletcher, Richard H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1984.

http://en.wikipedia.org/wiki/Computational_fluid_dynamics

6 تحولات الشبكة (Grid transformations)

6.1 مدخل

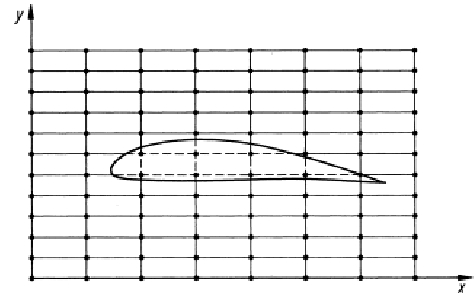
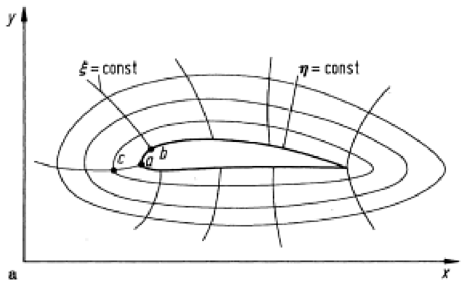
If all CFD applications dealt with physical problems where a uniform, rectangular grid could be used in the physical plane, there would be no reason to alter the governing equations derived in Chap.2 we would simply apply these equations in rectangular (x,y,z,t) space, finite-difference these equations according to the difference quotients derived in Chap. 5, and calculate away, using uniform values of Δx, Δy, Δz and Δt , However ,few real problems are ever so accommodating, for exsample, assume we wish to calculate the flow over an airfoil , as sketched in Fig .6.1, where we have placed the placed the airfoil in a rectangular grid . Note the problems with this rectangular grid : (1) Some grid point's fall inside the airfoil, where they are completely out of the flow .what values of the flow properties do we ascribe to these points?	وإذا كان كل التطبيقات CFD تتعامل مع المشاكل المفيزيائية المنتظمة، يمكن استخدام الشبكة المستطيلة، لن يكون هناك أي سبب لتغيير المعادلات التحكم المستمدة من Chap.2 يمكننا ببساطة تطبيق هذه المعادلات المستطيلة في البعد (x,y,z,t)، والفروق المحدودة. هذه المعادلات وفقا لحواصل الفرق المستمدة في Chap.5، وحساب بعيدا، باستخدام قيم موحدة للΔx، Δy، Δz وΔt، ومع ذلك، بعض المشاكل الحقيقية يمكن استيعابها اكثر من أي وقت مضى، مثال، نفترض اننا نريد حساب تدفق الهواء من الجنيح، كما رسمت في Fig .6.1، حيث وضعنا الجنيح في شبكة مستطيلة. ملاحظة المشاكل مع هذه الشبكة المستطيلة: (1) تسقط بعض نقاط الشبكة داخل الجنيح، أي أنهم تماما خارج التدفق. ما قيمة خصائص التدفق التي يمكن ان ننسب إلى هذه النقاط؟

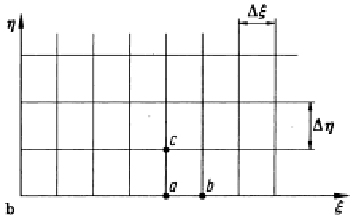
(2) There are few, if any grid points that fall on the surface of the airfoil. This is not good. Because the airfoil surface is a vital boundary condition for the determination of the flow, and hence the airfoil surface must be clearly and strongly seen by the numerical solution. As a result. We can conclude that the rectangular grid in Fig .6.1 is not appropriate for the solution of the flow field. In contrast, a grid that is appropriate is sketched in Fig. 6.2(a). Here we see a non-uniform, curvilinear grid which is literally wrapped around the airfoil. New coordinate lines?? And?? = constant. This is called a boundary–fitted coordinate system, and will be discussed in detail later in this chapter. The important point is that grid points naturally fall on the airfoil surface, as shown in Fig. 6.2(a).What is equally important is that, in the physical space shown in Fig. 6.2(a), the conventional difference quotients are difficult to use. What must be done is to transform the curvilinear grid mesh In physical	(2) هناك عدد قليل، و إن وجد من نقاط الشبكة التي تقع على سطح الجنيح. هذا ليس جيدا. وذلك لأن سطح الجنيح هو شرط حيوي لحدود تحديد التدفق، وبالتالي سطح الجنيح يجب أن يظهر بوضوح وبقوة بالحل العددي. كنتيجة. يمكننا أن نستنتج أن الشبكة المستطيلة في Fig .6.1 غير مناسبة لإيجاد حل لمجال التدفق. النقيض من ذلك، الشبكة التي ظهرت خصائصها ورسمت في Fig. 6.2(a). هنا نرى شبكة غير منتظمة و منحنية التي تقوم بالتفاف حرفيا حول الجنيح. تنسيق جديد للخطوط ؟؟ و؟؟ = ثابت. وهذا ما يسمى نظام أبعاد الحدود-المركبة، وسيتم مناقشتها بالتفصيل لاحقا في هذا الفصل. والنقطة المهمة هي أن نقاط الشبكة تسقط بشكل طبيعي على سطح الجنيح، كما هو مبين في Fig. 6.2(a). ما هو بنفس القدر من الأهمية هو أنه، في الحيز الفزيائي المبين في Fig. 6.2(a) ، وحواصل الفرق التقليدية التي يصعب استخدامها. ما يجب القيام به هو تحويل الشبكة المنحنية في

space to a rectangularmesh in terms of ξ and η.This is shown in *Fig. 6.2(b)* which illustrates a rectangular grid in terms of ξ and η. The rectangular mesh shown in Fig. 6.2(b) is called the computational plane. There is a one-to-one correspondence between this mesh, and the curvilinear mesh in Fig. 6.2(a), called the physical plane. For example, points a, b and c in the physical plane (Fig. 6.2a) correspond to points a, b and c in the computational plane, which involves uniform $\Delta\xi$ and uniform $\Delta\eta$. The computed information is then transferred back to the physical plane. Moreover, when the governing equations are solved in the computational space, they must be expressed in terms of the variables ξ and η rather than x and y; i.e., the governing equations must be transformed from (x, y) to (ξ, η) as the new independent variables. The purpose of this chapter is to first describe the general transformation of the governing	الفيزيائية إلى شبكة المستطيلة من حيث ξ و η يظهر. في Fig. 6.2(b)والذي يوضح شبكة رباعية الابعاد من حيث ξ وη. الشبكة المستطيلة هو مبين في Fig. 6.2(b) ويسمى التخطيط الحاسوبي. هناك المراسلات واحد الى واحد بين هذه الشبكة وشبكة الخطوط المنحنية في Fig. 6.2(a)وتسمى التخطيط الفيزيائي. على سبيل المثال، النقاط a و b و c في التخطيط الفيزيائي (Fig. 6.2a) تتوافق مع نقاط a و b و c في التخطيط الحسابي، والذي ينطوي موحد $\Delta\xi$ وموحد $\Delta\eta$. ثم يتم نقل المعلومات المحسوبة إلى التخطيط الفيزيائي. وعلاوة على ذلك، عندما يتم حل المعادلات التي تحكم في البعد الحاسوبي، لا بد من التعبير عنه من حيث المتغيرات ξ وη بدلا من x و y، أي يجب أن تتحول المعادلات التي تحكم من (x, y) إلى (ξ، η) والمتغيرات المستقلة الجديدة.

<table>
<tr><td>flow equations between the physical plane and the computational plane.

Following this, various specific grids will be discussed. This material is an example of a very active area of CFD research called grid generation.</td><td colspan="2">والغرض من هذا الفصل هو وصف لأول مرة التحول العام للمعادلات التي تتحكم بالتدفق بين التخطيط الفيزيائي و التخطيط الحسابي.

بعد ذلك، سيتم مناقشة عدة شبكات محددة. هذه المواد هي مثال على منطقة نشطة جدا من البحوث CFD تسمى شبكة الجيل.</td></tr>
<tr><td>Fig. 6.1: Airfoil on a rectangular grid</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Fig. 6.2 (a) Physical plane</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>(b)
Comput
ational
plane</td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

General Transformation of the Equations *6.2*

For simplicity, we will consider a two-dimensional unsteady flow, with independent variables x, y and t; the results for a three-dimensional unsteady flow, with independent variables x, y, z and t, are analogous, und simply involve more terms. We will transform the variables in physical space(x, y, t) to a transformed space (ξ, η, τ), where	للبساطة، وسوف ننظر تدفق متقلب ثنائي الأبعاد، مع المتغيرات المستقلة س، ص و ر (x, y, t) ؛ نتائج لتدفق متقلب ثلاثي الأبعاد، مع المتغيرات المستقلة س، ص، ض و ر (x, y, z, t) ، هي مشابهة، و ببساطة تنطوي على مزيد من المصطلحات. سنقوم تحويل المتغيرات في الحيز الفيزيائي (x, y, z) إلى الحيز (ξ، η، τ)، حيث

$$\xi = \xi(x, y, t) \qquad (6.1a)$$

$$\eta = \eta(x, y, t) \qquad (6.1b)$$

$$\tau = \tau(t) \qquad (6.1c)$$

In the above transformation, τ is considered a function of t only, and is frequently given by τ = t .This seems rather	في التحول المذكور أعلاه، تتغير τ حسب t فقط، وكثيرا ما تعطى على شكل τ = t . هذا يبدو تافها إلى حد

<table>
<tr>
<td>trivial; however, Eq. (6.1c) must be carried through the transformation in a formal manner, or else certain necessary terms will not be generated. Form the chain rule of differential calculus ,we have</td>
<td>ما؛ ومع ذلك، Eq. (6.1c) يجب أن تتم من خلال التحول بطريقة رسمية، وإلا ستختفي بعض المصطلحات الضرورية. تشكل قاعدة السلسلة من حساب التفاضل، لدينا</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,t} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{y,t} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{y,t} + \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta}\cancelto{0}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)_{y,t}}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>The subscripts in the above expression are added to emphasize what variables are being held constant in the partial differentiation. In our subsequent expression, subscripts will be dropped; however, it is always useful to keep them in your mind. Thus, we will write the above expression as</td>
<td>وأضيفت السفلية في التعبير أعلاه للتأكيد على ما يجري عقد المتغيرات المستمر في التفريق جزئي. في التعبيرات اللاحقة، سيتم إسقاط السفلية. ومع ذلك، فمن المفيد دائما ابقائهم في عقلك. وهكذا، وسوف نكتب التعبير أعلاه كما</td>
</tr>
</table>

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)} \tag{6.2}$$

Similarly,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}=\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)} \tag{6.3}$$

Also,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{x,y}=&\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{x,y}+\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)_{\xi,\eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x,y}\\&+\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta}\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{x,y}\end{aligned} \tag{6.4}$$

or,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}=\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\frac{d\tau}{dt}} \tag{6.5}$$

Equations (6.2), (6.3) and (6.5) allow the derivatives with respect to x, y and t to be transformed into derivatives with respect to ξ, η and τ. The coefficients of the derivatives with respect to ξ, η and τ are called metrics, e.g. $\partial\xi/\partial x$, $\partial\xi/\partial y$, $\partial\eta/\partial x$ and $\partial\eta/\partial y$ are metric terms which can be obtained from the general transformation given by Eqs. (6.1a, b and c) .if Eqs. (6.1a, b and c) are given as closed form analytic expressions, and then the metrics can also be obtained in closed form. However, the transformation given by Eqs. (6.1a, b, and c) is frequently a purely numerical relationship, in which case the

معادلات (6.2), (6.3)و (6.5) تسمح للمشتقات فيما يتعلق س، ص و ر (x, y, t) إلى أن تتحول إلى مشتقات فيما يتعلق ξ، η وτ . معاملات المشتقات فيما يتعلق ξ، τ η وتسمى المقاييس، على سبيل المثال $\partial\xi/\partial x$، $\partial\xi/\partial y$، $\partial\eta/\partial x$ و$\partial\eta/\partial y$ هي متري والتي يمكن الحصول عليها من التحول العام للمعادلات. Eqs. (6.1a, b and c). إذا المعادلات.Eqs. (6.1a, b and c) يمكن وصفها تعبيرا شكل تحليلي مغلق، ثم يمكن أيضا الحصول على المقاييس في شكل مغلق. ومع ذلك، فإن التحول الذي يعطى من قبل Eqs. (6.1a, b, and c)هي في كثير من الأحيان وجود علاقة عددية بحتة، وفي هذه

metrics can be evaluated by finite-difference quotients – typically central differences. Examining the governing equations derived in Chap. 2, we note that the equations for viscous flow involve second derivatives. Therefore, we need a transformation for these derivatives; they can be obtained as follows. From Eq. (6.2), let	الحالة المقاييس يمكن تقييمها من قبل حواصل الفروق المحدودة – عادة الاختلافات المركزية. دراسة المعادلات التحكم المستمدة في Chap. 2، نلاحظ أن معادلات التدفق اللزج تشمل المشتقات الثانية. ولذلك، فإننا بحاجة إلى التحول لهذه المشتقات. يمكن الحصول عليها على النحو التالي. من المعادلة Eq. (6.2)، والسماح

$$A = \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$$

Then,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right]$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi}\right)}_{B} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial x}\right)}_{C} \qquad (6.6)$$

The mixed derivatives denoted by B and C in Eq. (6.6c) an be obtained from the chain rule as follows:	مشتقات مختلطة الرمز بواسطة B و C في المعادلة. Eq. (6.6c) ويمكن الحصول عليها من قاعدة السلسلة على النحو التالي:

$$B = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)$$

Recalling the chain rule given by Eq. (6.2), we have	وإذ تشير إلى قاعدة السلسلة التي قدمها المعادلة. Eq. (6.2)، ونحن نملك:

$$B = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \quad (6.7)$$

Similarly:

$$C = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \quad (6.8)$$

Substituting B and C fro Eqs. (6.7) and (6.8) into Eq. (6.6), and rearranging the sequence of terms, we have	استبدال B و C جيئة وذهابا Eqs. (6.7) and (6.8) في المعادلة.Eq. (6.6)، وإعادة ترتيب تسلسل شروط، لدينا

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\end{aligned}} \quad (6.9)$$

Equation (6.9) gives the second partial derivative with respect to x in terms of first, second, and mixed derivatives with respect to ξ and η, multiplied by various metric terms. Let us now continue to obtain the	المعادلة (6.9) يعطي مشتقات جزئية الثانية فيما يتعلق ب x من حيث المشتقات الأولى والثانية، والمختلط فيما يتعلق ξ وη، مضروبا مختلف مصطلح متري. دعونا الآن

second partial with respect to y. From Eq. (6.3), let	نستمر في الحصول على جزئية الثانية فيما يتعلق ب y. من المعادلة. Eq. (6.3)، والسماح

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

Then,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial D}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right]$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial y}\right)}_{E} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial y}\right)}_{F} \qquad (6.10)$$

Using Eq. (6.3),

$$E = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \qquad (6.11)$$

and

$$F = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \qquad (6.12)$$

Substituting Eqs. (6.11) and (6.12) into (6.10), we have, after rearranging the sequence of terms:	استبدال Eqs. (6.11) و (6.12) ب (6.10), لدينا، بعد إعادة ترتيب تسلسل شروط:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\end{aligned}} \qquad (6.13)$$

Equation (6.13) gives the second partial derivative with respect to y in terms of first, second, and mixed derivatives with respect to ξ and η, multiplied by various metric terms. We now continue to obtain the second partial with respect to x and y.

المعادلة (6.13) تعطي المشتقات الجزئية الثانية فيما يتعلق ب y من حيث الأولى، والمشتقات الثانية، والمختلطة فيما يتعلق ξ وη، مضروبا بمختلف مصطلح متري. نواصل الآن للحصول على جزئية الثانية فيما يتعلق x و y.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right] \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x}\right)}_{B} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial x}\right)}_{C}\end{aligned} \qquad (6.14)$$

Substituting Eqs. (6.7) and (6.8) for B and C respectively into Eq. (6.14), and rearranging the sequence of terms, we have

استبدال Eqs. (6.7) and (6.8) لB و C على التوالي في المعادلة. (6.14)، وإعادة ترتيب تسلسل شروط، لدينا

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}\right)\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right]\end{aligned}} \qquad (6.15)$$

Equation (6.15) gives the second partial derivative with respect to x and y in terms of first, second, and mixed derivatives with respect to ξ

المعادلة (6.15) تعطي مشتقات جزئية الثانية فيما يتعلق x و y من حيث الأولى، والمشتقات الثانية،

<table>
<tr><td>and η, multiplied by various metric terms.

Examine all the equations given in the boxed above. They represent all that is necessary to transform the governing flow equations obtained in Chap. 2 with x, y, and t as the independent variables to ξ, η, and T as the new independent variables. Clearly, when this transformation is made, the governing equations in terms of ξ, η, and T become rather lengthy. Let us consider a simple example, namely that for inviscid, irrotational, steady, incompressible flow, for which Laplace's Equation is the governing equation.</td><td>والمختلط فيما يتعلق ξ وη، مضروبا مختلف مصطلح متري.

دراسة جميع المعادلات الواردة في محاصر أعلاه. وهي تمثل كل ما هو ضروري لتحويل المعادلات التي تحكم التدفق تم الحصول عليها في Chap. 2 مع (x, y,t) كمتغيرات مستقلة ل ξ، η، وT كمتغيرات مستقلة جديدة. بوضوح ، عندما يتم هذا التحول، والمعادلات التي تحكم من حيث ξ، η، وT تصبح طويلة نوعا ما. دعونا ننظر في مثال بسيط، وهو التدفق غير اللزج، غير الدوراني، الثابت، و غير القابل للإنضغاط، حيث معادلة لابلاس هي المعادلة التي تحكم.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Laplace's Equation : $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (6.16)$$</td></tr>
<tr><td>Transforming Eq. (6.16) from (x, y) to (ξ, η), where ξ = ξ(x, y) and η = η(x, y), we have from Eqs. (6.9) and (6.13):</td><td>تحويل المعادلة. (6.16) من (x, y)إلى (ξ، η) ، حيث ξ= ξ(x, y) وη = η(x, y)، لدينا من Eqs. (6.9) and (6.13):</td></tr>
</table>

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2$$
$$+\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2$$
$$+\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)=0$$

Rearranging terms, we obtain

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$+2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\right]$$
$$+\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right]+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right]=0 \quad (6.17)$$

Examine Eqs. (6.16) and (6.17); the former is Laplace's equation in the physical (x, y) space, and the latter is the transformed Laplace's equation in the computational (ξ, η) space. The transformed equation clearly contains many more terms. Once again we emphasize that Eqs. (6.1), (6.2), (6.3), (6.5), (6.9), (6.13), and (6.15) ar used to transform the governing flow equations from the physical plane (x. y space) to the computational plane (ξ , η space), and that the purpose of the transformation in most	دراسة Eqs. (6.16) and (6.17) ؛ والاول هو معادلة لابلاس في الفضاء الفيزيائي (x, y) ، و الأخير هو معادلة لابلاس تحول في الفضاء الحاسوبي (ξ، η). تحتوي المعادلة بوضوح العديد من الشروط. ومرة أخرى نؤكد أن Eqs. (6.1), (6.2), (6.3), (6.5), (6.9), (6.13), and (6.15) تستخدم لتحويل المعادلات التي تحكم التدفق من التخطيط الفيزيائي (x, y) إلى التخطيط الحسابي (ξ ,η) ، وأن الهدف من التحول في معظم التطبيقات CFD هو تحويل شبكة غير موحدة في الحيز الفيزيائي (مثل كما هو مبين في Fig. 6.2a) إلى شبكة موحدة في الحيز

CFD applications is to transform a non-uniform grid in physical space (such as shown in Fig. 6.2a) to a uniform grid in the computational space (such as shown in Fig. 6.2b). The transformed governing partial differential equations are then finite-differenced in the computational plane, where there exists a uniform $\Delta\xi$ and a uniform $\Delta\eta$, as shown in Fig. 6.2(b). The flow-field variables are calculated at all grid points in the computational plane, such as points, a, b, and c in Fig. 6.2(b). These are the same flow-field variables which exist in the physical plane at the corresponding points a, b, and c in Fig. 6.2(a). The transformation that accomplishes all this is given in general form by Eqs. (6.1a, b, and c). Of course, to carry out a solution for a given problem, the transformation given generically by Eqs. (6.1a, b, and c) must be explicitly specified. Examples of some specific	الحسابي (مثل ما هو مبين في Fig. 6.2b). معادلات التحكم التفاضلية الجزئية المتحولة تكون محدودة- الفرق في التخطيط الحسابي، حيث توجد $\Delta\xi$ موحد و$\Delta\eta$ موحد، كما هو مبين في Fig. 6.2b. يتم احتساب متغيرات ميدان التدفق في جميع نقاط الشبكة في التخطيط الحاسوبي، مثل نقاط، a, b, and c في Fig. 6.2(b). هذه هي نفس متغيرات مجال التدفق التي توجد في التخطيط الفيزيائي في نقاط المقابلة a, b, and c في Fig. 6.2(a). وبالنظر إلى التحول الذي يحقق كل هذا في الشكل العام من قبل Eqs. (6.1a, b, and c). وبطبيعة الحال، لتنفيذ حل لمشكلة معينة، والتحولات التي تعطى بشكل عام من قبل Eqs. (6.1a, b, and c) يجب تحديدها بصراحة. سيتم إعطاء أمثلة لبعض التحولات محددة في الأقسام التالية.

transformations will be given in subsequent sections.	

6.3 Metrics and Jacobians *6.3*

In Eqs. (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6), (6.7), (6.8), (6.9), (6.10), (6.11), (6.12), (6.13), (6.14), (6.15), the terms involving the geometry of the grids, such as $\partial\xi/\partial x$, $\partial\xi/\partial y$,$\partial\eta/\partial x$, $\partial\eta/\partial y$, etc., are called metrics. If the transformation, Eq. (6.1a, b and c), is given analytically, then it is possible to obtain analytic values for the metric terms.	في Eqs. (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6), (6.7), (6.8), (6.9), (6.10), (6.11), (6.12), (6.13), (6.14), (6.15) والشروط التي تنطوي هندسة الشبكات، مثل $\partial\xi/\partial x$ ، $\partial\xi/\partial y$، $\partial\eta/\partial x$، $\partial\eta/\partial y$، وما إلى ذلك، تدعا المقاييس. إذا كان التحول،. وتعطى المعادلة (6.1a, b and c)، من الناحية التحليلية، ثم أنه من الممكن الحصول على قيم تحليلية لشروط متري.
However, in many CFD applications, the transformation, Eq. (6.1a, b and c), is given numerically, and hence the metric terms are calculated as finite differences.	ومع ذلك، في العديد من التطبيقات CFD، والتحول، والمعادلة. (6.1a, b and c.) ، وتعطى عدديا، وبالتالي تحسب شروط متري كما الفروق المحدودة.
Also, in many applications, the transformation may be more conveniently expressed as the inverse of Eqs. (6.1a, b), that is, we may have available the inverse transformation.	أيضا، في العديد من التطبيقات، وتحول يمكن التعبير أكثر سهولة كمعكوس Eqs. (6.1a, b)، وهذا قد يتيح لدينا التحول العكسي.

$x = x(\xi,\eta,\tau)$ (6.18a) $y = y(\xi,\eta,\tau)$ (6.18b) $t = t(\tau)$ (6.18c)	
In Eqs. (6.18a, b and c), ξ, η and τ are the *independent* variables. However, in the derivative transformations given by Eqs. (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6), (6.7), (6.8), (6.9), (6.10), (6.11), (6.12), (6.13), (6.14), and (6.15), the metric terms $\partial\xi/\partial x$, $\partial\eta/\partial y$, etc. are partial derivatives in terms of x, y and t as the independent variables. Therefore, in order to calculate the metric terms in these equations from the inverse transformation in Eqs. (6.18a, b and c), we need to relate $\partial\xi/\partial x$, $\partial\eta/\partial y$, etc. to the inverse forms $\partial x/\partial\xi$, $\partial y/\partial\eta$, etc. These inverse forms of the metrics are the values which can be directly obtained from the inverse transformation, Eqs. (6.18a, b	في يكس. (6.18a, b and c)، ξ، η و τ هي المتغيرات المستقلة. ومع ذلك، في التحولات المشتقة التي قدمها Eqs. (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6), (6.7), (6.8), (6.9), (6.10), (6.11), (6.12), (6.13), (6.14), and (6.15) وشروط متري $\partial\xi/\partial x$, $\partial\eta/\partial y$، وما هي المشتقات الجزئية من حيث x, y, وt باعتبارها المتغيرات المستقلة. ولذلك، من أجل حساب شروط متري في هذه المعادلات من التحول العكسي في يكس. (6.18a, b and c)، نحن في حاجة لربط $\partial\xi/\partial x$ ، $\partial\eta/\partial y$، وما إلى ذلك لعكس أشكال $\partial\xi/\partial x$ ، $\partial y/\partial\eta$، الخ. هذه الأشكال معكوس المقاييس هي القيم التي يمكن الحصول

and c). Let us proceed to find such relations. Consider a dependent variable in the governing flow equations, such as the x component of velocity, u. Let $u = u(x, y)$, where from Eqs. (6.18a and b), $x = x(\xi, \eta)$ and $y = y(\xi, \eta)$. The total differential of u is given by	عليها مباشرة من التحول العكسي ويكس. (6.18a, b and c). دعونا نمضي قدما لإيجاد مثل هذه العلاقات. النظر في المتغير التابع (المتصل) في المعادلات التي تحكم التدفق، مثل عنصر x من سرعة، u . اسمحوا $u = u(x, y)$، حيث من يكس. (6.18 a and b) $x = x(\xi، \eta)$ و $y = y(\xi، \eta)$. وتعطى الفرق الكلي للـu ب

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad (6.20)$$

Equations (6.20) and (6.21) can be viewed as two equations for the two unknowns $\partial u/\partial x$ and $\partial u/\partial y$. Solving the system of equations (6.20) and (6.21) for $\partial u/\partial x$ using Cramer's rule, we have	المعادلات (6.20)و (6.21) يمكن أن ينظر إليه باعتباره معادلتين لمجهولين اثنين $\partial u/\partial x$و $\partial u/\partial y$. حل نظام المعادلات (6.20)و (6.21) للـ$\partial u/\partial x$ باستخدام قاعدة كرامر Cramer، لدينا

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}}$$

6.22

In Eq. (6.22), the denominator determinant is identified as the *Jacobian determinant*, denoted by	في المعادلة. (6.22)، يتم التعرف على المحددات القاسم كمحدد مصفوفه جاكوبي *Jacobian determinant* ، الرمز بواسطة

$$J \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,n)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

Hence, Eq. (6.22) can be written as	وبالتالي، المعادلة. (6.22) يمكن أن يكتب

<table>
<tr><td colspan="2">6.23
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]} \qquad (6.23)$$</td></tr>
<tr><td>Now let us return to Eqs. (6.20) and (6.21), and solve for ∂u/∂y.</td><td>الآن دعونا نعود إلى Eqs. (6.20) and (6.21) ، وحل ل $\partial u/\partial y$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6.24
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}}$$
or,
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{J}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\right]}$$</td></tr>
<tr><td>Examine Eqs. (6.23) and (6.24). They express the derivatives of the flow field variables in physical space in terms of the derivatives of the flowfield variables in computational</td><td>دراسة Eqs. (6.23) and (6.24). التي تعبر عن المشتقات من متغيرات مجال التدفق في البعد الفيزيائي من حيث المشتقات من متغيرات</td></tr>
</table>

space. Equations (6.23) and (6.24) accomplish the same derivative transformations as given by Eqs. (6.2) and (6.3). However, unlike Eqs. (6.2) and (6.3) where the metric terms are $\partial\xi/\partial x$, $\partial\eta/\partial y$, etc., the new Eqs. (6.23) and (6.24) involve the inverse metrics, $\partial x/\partial\xi$, $\partial y/\partial\eta$, etc. Also notice that Eqs. (6.23) and (6.24) include the Jacobian of the transformation. Therefore, whenever you have the transformation given in the form of Eqs. (6.18a, b and c), from which you can readily obtain the metrics in the form $\partial x/\partial\xi$, $\partial x/\partial\eta$, etc., the transformed governing flow equations can be expressed in terms of these inverse metrics and the Jacobian, *J*.A similar but more lengthy set of results can be obtained for a three-dimensional transformation from (x, y, z) to (ξ, η, ζ). Consult Ref. [1] for more details. Our discussion above has been intentionally limited to two dimensions in order to demonstrate the basic

مجال التدفق في البعد الحاسوبي. المعادلات (6.23) and (6.24) تنجز نفس التحولات المشتقة كما قدمها Eqs. (6.2) and (6.3). لكن، Eqs. (6.2) and (6.3) حيث شروط متري هي $\partial\xi/\partial x$ ، $\partial\eta/\partial y$، الخ، و المعادلات الجديدة. (6.23) and (6.24)تنطوي على مقاييس معكوس، $\partial x/\partial\xi$ ، $\partial y/\partial\eta$، الخ ولاحظ أيضا أن Eqs. (6.23) and (6.24)تشمل مصفوفه جاكوبي Jacobian من التحول. لذلك، كلما كان لديك تحول يعطى في شكل Eqs. (6.18a, b and c)، التي يمكنك من خلالها الحصول بسهولة على المقاييس في شكل $\partial\xi/\partial x$ ، $\partial x/\partial\eta$، الخ، والتدفق الذي يحكم التحول يمكن التعبير عن معادلاته من حيث هذه المقاييس العكسية ومصفوفه جاكوبي Jacobian، J.A مجموعة مماثلة ولكن طويلة أكثر من النتائج التي يمكن الحصول عليها في تحول ثلاثي الأبعاد من (x, y, z) إلى $(\xi، \eta، \zeta)$. استشارة المرجع. [1] لمزيد من التفاصيل. مناقشة

principles without cluttering the consideration with details.	اعلاه قد اقتصرت عمدا إلى بعدين من أجل إظهار المبادئ الأساسية دون التبعثر النظر مع التفاصيل.

6.4 Coordinate Stretching 6.4

In the remaining three sections of this chapter, we examine three types of grid transformations.	في ثلاثة أقسام المتبقية من هذا الفصل، ندرس ثلاثة أنواع من التحولات الشبكة.
The simplest is discussed here. It consists of stretching the grid in one or more coordinate directions.	ونناقش الأبسط هنا. وهو يتألف من تمتد الشبكة في واحد أو أكثر بالنسبة لاحداثيات الاتجاهات.
For example, consider the physical and computational planes shown in Fig. 6.3(a, b). Assume that we are dealing with the viscous flow over a flat surface, where the velocity varies rapidly near the surface as shown in the velocity profile sketched at the right of the physical plane (Fig. 6.3a). To calculate the details of this flow near the surface, a finely spaced grid in the y-direction should be used, as sketched in the physical plane. However, far away from the surface, the grid can be more coarse.	على سبيل المثال، والنظر في التخطيط الفيزيائي والحسابي المبين في Fig. 6.3(a, b). نفترض أننا نتعامل مع تدفق لزج على سطح مستو، حيث سرعة تختلف سريعا بالقرب من السطح كما هو موضح في ملف تعريف سرعة رسمت في التخطيط الفيزيائي (Fig. 6.3a). لحساب تفاصيل هذا التدفق قرب السطح، شبكة متباعدة ناعما في الاتجاه y ينبغي أن تستخدم، كما رسمت في التخطيط الفيزيائي. ومع ذلك، بعيدا عن السطح، ويمكن للشبكة أن تكون أكثر خشونة. لذلك، يجب أن تكون شبكة المناسبة واحدة في أي تنسيق خطوط تصبح تدريجيا متباعدة عن كثب كما

Therefore, a proper grid should be one in which the coordinate lines become progressively more closely spaced as the surface is approached. On the other hand, we wish to deal with a uniform grid in the computational plane, as shown in Fig. 6.3(b). On examination, we see that the grid in the physical space is 'stretched', as if a uniform grid was drawn on a piece of rubber, and then the upper portion of the rubber was stretched upward in the y-direction. A simple analytical transformation which can accomplish this grid stretching is:	الاقتراب من سطح الأرض. من ناحية أخرى، نحن نرغب في التعامل مع شبكة موحدة في التخطيط الحسابي، كما هو مبين في الشكل.Fig. 6.3(b) على الفحص، نرى أن الشبكة في الحيز الفيزيائي هو "امتدت"، كما لو انها شبكة موحدة وضعت على قطعة من المطاط، ثم الجزء العلوي من المطاط وقد امتدت صعودا في الاتجاه y. وتحول التحليلي البسيط الذي يمكن إنجاز هذه الشبكة تمتد هو :

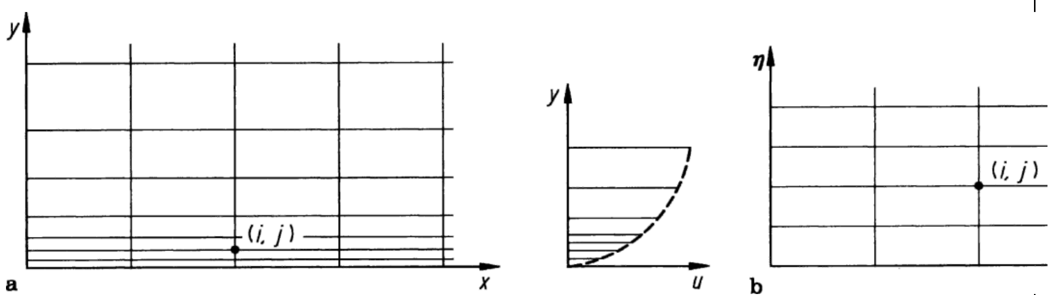


Fig. 6.3 Example of grid stretching. (**a**) Physical plane. (**b**) Computational plane

$\xi = x$ (6.25a)

<table>
<tr><td colspan="2">$\eta = \ln(y+1)$ (6.25b)</td></tr>
<tr><td>The *inverse* transformation is</td><td>التحول العكسي هو</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = \xi$ (6.26a)
$y = e^{\eta} - 1$ (6.26b)</td></tr>
<tr><td>from which the inverse metrics are obtained as:</td><td>المقاييس المعكوسة يتم الحصول عليها على النحو التالي:</td></tr>
<tr><td colspan="2">6.22
$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = e^{\eta} \qquad (6.27)$$</td></tr>
<tr><td>In Eq. (6.22), the denominator determinant is identified as the *Jacobian determinant*,
denoted by</td><td>في المعادلة. (6.22)، يتم التعرف على المحددات القاسم كمحدد مصفوفه جاكوبي *Jacobian determinant*، الرمز بواسطة</td></tr>
<tr><td colspan="2">$J = e^{\eta}$</td></tr>
<tr><td>Hence, Eq. (6.22) can be written as</td><td>وبالتالي، المعادلة. (6.22) يمكن أن تكتب</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = e^{\eta} \qquad (6.27)$$</td></tr>
</table>

Let us consider the continuity equation, given by Eq. (2.27). For steady, twodimensional flow, this is	دعونا ننظر في معادلة الاستمرارية، التي قدمها المعادلة. (2.27).نثبت تدفق ثنائي الأبعاد، وهذا هو
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0$$	(6.28)
Equation (6.27) is the continuity equation written in terms of the physical plane. This equation can be formally transformed by means of the general results given by Eqs. (6.23) and (6.24), obtaining	المعادلة (6.27) هي معادلة الاستمرارية مكتوبة من حيث التخطيط الفيزيائي. هذه المعادلة يمكن أن تتحول رسميا من قبل النتائج العامة التي قدمها Eqs. (6.23) and (6.24)، والحصول على
$$\frac{1}{J}\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)-\frac{\partial(\rho u)}{\partial \eta}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]+\frac{1}{J}\left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial(\rho v)}{\partial \xi}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\right]=0$$	(6.29)
Substituting into Eq. (6.29) the inverse metrics from Eq. (6.27), we have	استبدال في المعادلة. (6.29) المقاييس المعكوسة من المعادلة. (6.27)، لدينا
$$e^{\eta}\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta}=0$$	(6.30)
Equation (6.30) is the continuity equation in the computational plane.Equation (6.30) can also be obtained from the direct transformation	المعادلة (6.30) هي معادلة الاستمرارية في التخطيط الحاسوبي. المعادلة (6.30) كما يمكن الحصول عليها من

given by Eqs. (6.25a and b). Here, the metrics are:	التحول المباشر التي قدمها Eqs. (6.25a and b). هنا، ومقاييس هي:
$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{y+1} \qquad (6.31)$$	
Using the transformations given by Eqs. (6.2) and (6.3), Eq. (6.28) becomes	باستخدام التحولات التي قدمها Eqs. (6.2) و (6.3)، المعادلة. (6.28) يصبح
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = 0 \qquad (6.32)$$	
Substituting into Eq. (6.32) the metrics from Eq. (6.31), we have	استبدال في المعادلة. (6.32) المقاييس من المعادلة. (6.31)، لدينا
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \frac{1}{(y+1)}\frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} = 0 \qquad (6.33)$$	
However, from Eq. (6.26b), $y+1 = e\eta$. Therefore, Eq. (6.33) becomes	ومع ذلك، من المعادلة. (6.26b)، $y+1 = e\eta$. ولذلك، المعادلة. (6.33) تصبح
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \frac{1}{e^{\eta}}\frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} = 0$$ or $$e^{\eta}\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} = 0 \qquad (6.34)$$	

Equation (6.34) is identical to Eq. (6.30). All that we have done here is to demonstrate how the transformed equation can be obtained from either the direct transformation or the inverse transformation; the results are the same. An example of more complex grid stretching, in both the *x*- and *y*-directions, is given in Refs. [2, 3]. Here, the supersonic viscous flow over a blunt base is studied.The physical and computational planes are illustrated in Fig. 6.4. The streamwise stretching is accomplished through a transformation originally used by Holst [4]	المعادلة (6.34) مطابقة للمعادلة. (6.30). كل ما قمنا به هنا هو لشرح كيفية الحصول على المعادلة تحولت من إما التحول المباشر أو التحول العكسي. النتائج هي نفسها. مثال على الشبكة أكثر تعقيدا وتمدد، في كل من الاتجاهات x و y، ويرد في المرجعان [2، 3]. هنا، درس التدفق اللزج الأسرع من الصوت على قاعدة حادة. ويوضح التخطيط الفيزيائي والحسابية في Fig. 6.4.أن التحكم بالسائل المتمدد ينجز من خلال تحولات تستخدم من قبل هولست Holst [4]

$$x = \frac{\xi_0}{A}[\sinh((\xi - x_0)\beta_x) + A]$$

where

$$A = \sinh(\beta_x x_0)$$

and

$$x_0 = \frac{1}{2\beta_x} \ln\left[\frac{1 + (e^{\beta_x} - 1)\xi_0}{1 + (e^{-\beta_x} - 1)\xi_0}\right]$$

Where ξ_0 is the location in the computational plane where the maximum clustering is to occur and β_x is a constant which controls the degree of clustering at ξ_0, with larger values of β_x providing a finer grid in the clustered region. The transverse stretching is accomplished by dividing the physical plane into two sections: (1) the space directly behind the step, and (2) the space above (both in front of and behind) the step. The transformation is based on that used by Roberts [5], and is given by	حيث ξ_0 هو الموقع في التخطيط الحسابي حيث الحد الأقصى للتجمع، وβ_x هو ثابت التي تسيطر على درجة من التجميع في ξ_0، مع القيم أكبر من β_x توفير شبكة دقيقة في المنطقة متفاوتة المسافات. ويتم إنجاز عرضية تمتد بقسمة التخطيط الفيزيائي إلى قسمين: (1) الحيز المباشر وراء هذه الخطوة، و (2) في الحيز التالي (سواء أمام وخلف) للخطوة. ويستند هذا التحول على تلك المستخدمة من قبل روبرتس Roberts [5]، وتعطى من خلال

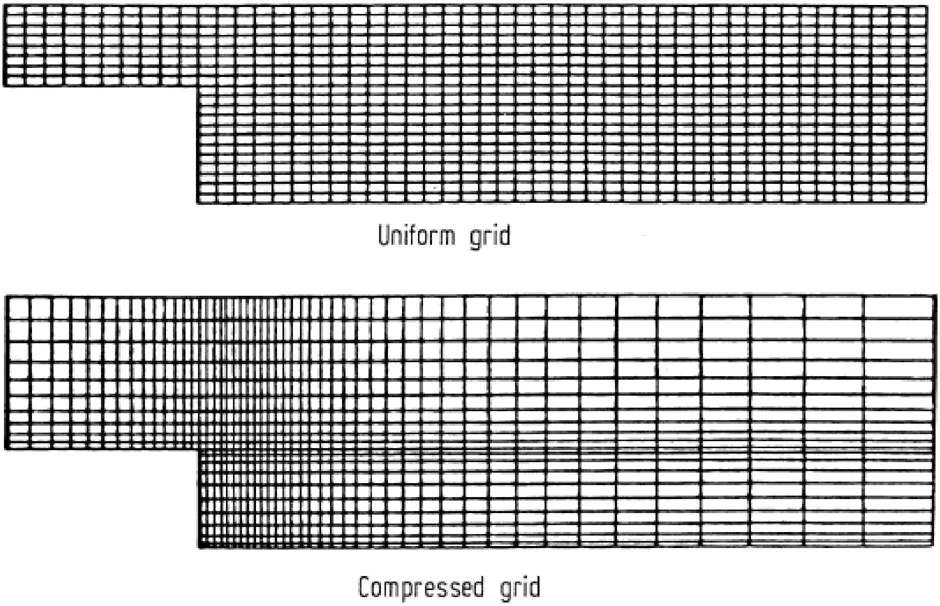


Fig. 6.4 Comparison of uniform and compressed grid

$$y = \frac{(\beta_y + 1) - (\beta_y - 1)e^{-c(\eta - 1 - \alpha)/(1-\alpha)}}{(2\alpha + 1)(1 + e^{-c(\eta - 1 - \alpha)/(1-\alpha)})}$$

where

$$c = \log\left(\frac{\beta_y + 1}{\beta_y - 1}\right)$$

And β_y and α are appropriate constants, and are different for the two sections identified above. The algebraic transformations given above result in the grid stretching shown in Fig. 6.4.	و β_y و α الثوابت المناسبة، وتختلف عن القسمين التي تم تحديدهما أعلاه. التحولات الجبرية الواردة أعلاه نتيجة في شبكة تمدد مبين في Fig. 6.4.

6.3 Boundary-Fitted Coordinate Systems 6.5

Consider the flow through the divergent duct shown in Fig. 6.5(a). Curve *de* is the upper wall of the duct, and line *fg* is the centreline. For this flow, a simple rectangular grid in the physical plane is not appropriate, for the reasons discussed in Sect. 6.1. Instead, we draw the curvilinear grid in Fig. 6.5(a) which allows both the upper boundary *de* and the centreline *fg* to be coordinate lines, exactly fitting these boundaries. In turn, the curvilinear grid in Fig. 6.5(a) must be transformed to a rectangular grid in the computational plane, Fig. 6.5(b). This can be accomplished as follows. Let $y_s = f(x)$ be the ordinate of the upper surface *de* in Fig. 6.5(a). Then the following	النظر في التدفق من خلال القناة متباينة مبين في Fig. 6.5(a). منحنى *de* هو الجدار العلوي من القناة، وخط *fg* هو خط المنتصف لهذا التدفق، شبكة مستطيلة بسيطة في التخطيط الفيزيائي ليست مناسبة، للأسباب التي ذكرناها في الطائفة. 6.1 (Sect. 6.1) بدلا من ذلك، نود أن نستخدم الشبكة المنحنية في Fig. 6.5(a) الذي يسمح كل من *de* الحدود العليا و*fg* المنتصف لتكون خطوط منسقة، بما يناسب بالضبط هذه الحدود. في المقابل، فإن شبكة الخطوط المنحنية في Fig. 6.5(a) يجب أن تتحول إلى شبكة مستطيلة في التخطيط الحاسوبي، Fig. 6.5(b). ويمكن تحقيق ذلك على النحو التالي. السماح $y_s = f(x)$ ليكون تنسيق من المساحة *de* العلوي في Fig. 6.5(a). ثم التحول التالية سوف يؤدي في شبكة مستطيلة في البعد (ξ، η):

transformation will result in a rectangular grid in (ξ, η) space:	
$\xi = x$ $\eta = y/ys$ where $ys = f(x)$	
The above is a simple example of a boundary fitted coordinate system. A more sophisticated example is shown in Fig. 6.6, which is an elaboration of the case illustrated in Fig. 6.2. Consider the airfoil shape given in Figure 6.6(a). A curvilinear system is wrapped around the airfoil, where one coordinate line $\eta = \eta 1$ =constant is on the airfoil surface. This is the inner boundary of the grid, designated by $\Gamma 1$. The outer boundary of the grid is labelled $\Gamma 2$ in Figure 6.6(a), and is given by $\eta = \eta 2$ = constant. Examining this grid, we see that it clearly fits the boundary, and hence it is a	ما سبق هو مثال بسيط من الحدود تركيب نظام الإحداثيات. ويرد مثال أكثر تطورا في Fig. 6.6، و وضع القضية موضح في Fig. 6.2. النظر في شكل الجنيح الواردة في Figure 6.6(a). و لف نظام منحني الأضلاع حول الجنيح، حيث تنسيق الخط $\eta = \eta 1$ = ثابت على سطح الجنيح. هذه هي الحدود الداخلية للشبكة، المعروف ب $\Gamma 1$. و الحدود الخارجية من الشبكة تعرف ب $\Gamma 2$ في Figure 6.6(a)، ويعطى بواسطة $\eta = \eta 2$ = ثابت. بفحص هذه الشبكة، نرى أنه يناسب بشكل واضح الحدود، وبالتالي فإنه نظام احداثيات مجهزة الحدود. الخطوط المنتشرة على الحدود الداخلية $\Gamma 1$ والتي تتقاطع الحدود الخارجية $\Gamma 2$ هي خطوط ξ الثابت، مثل خط *ef* ذو ξ1= ξ= ثابت. (لاحظ أن في Fig. 6.6(a) خطوط من η ثابتة ترافق الجنيح تماما، مثل الكثير من الدوائر ممدود. وتسمى مثل هذه الشبكة '0' نوع الشبكة

boundary-fitted coordinate system. The lines which fan out from the inner boundary Γ1 and which intersect the outer boundary Γ2 are lines of constant ξ, such as line *ef* for which ξ = ξ1 = constant. (Note that in Fig. 6.6(a) the lines of constant η totally enclose the airfoil, much like elongated circles; such a grid is called a '0' type grid for airfoils. Another related curvilinear grid can have the η =constant lines trailing downstream to the right, *not* totally enclosing the airfoil (except on the inner boundary Γ1). Such a grid is called a 'C' type grid. We will see an example of a 'C' type grid shortly.)	للجنيحات. صلة اخرة للشبكة المنحنية يمكن أن تكون η = خطوط ثابتة متابعة للمجرى إلى اليمين، و ليست مرفقة تماما بالجنيح (إلا على الحدود الداخلية Γ1). وتسمى مثل هذه الشبكة :الشبكة 'C'. سوف نرى مثالا على نوع الشبكة 'C' قريبا.)

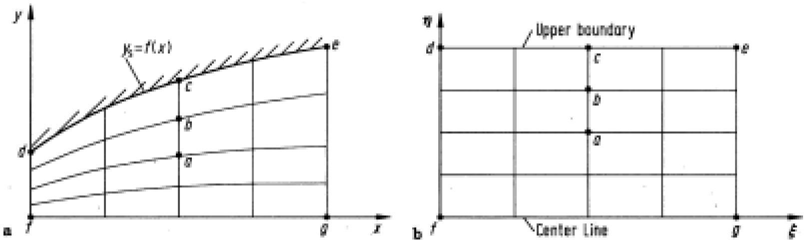
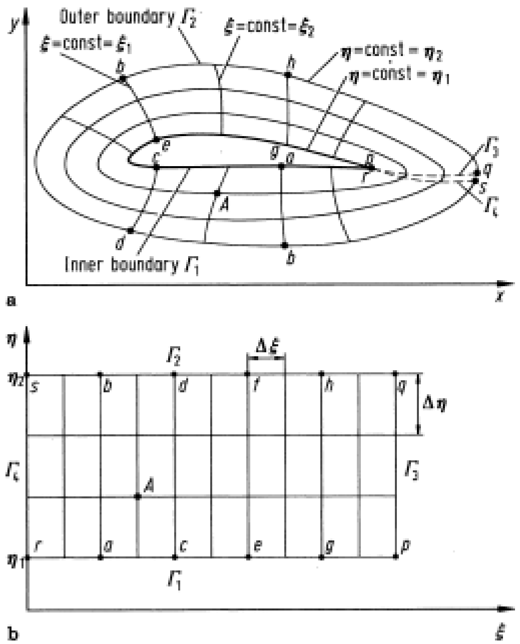


Fig. 6.5 A simple boundary-fitted coordinate system. (a) Physical plane. (b) Computational plane

6 Transformations and Grids 117

Fig. 6.6 (a) Physical plane. (b) Computational plane



Question: What transformation will cast the curvilinear grid in Fig.6.6(a) into a uniform grid in the computational plane as	السؤال: ما هو التحول الذي يمكن أن يلقي الشبكة المنحنية في Fig.6.6(a) في شبكة موحدة

sketched in Fig.6.6(b)? To answer this question, note from Fig. 6.6(a) that along the inner boundary Γ1, the physical coordinates of the body are known:	في التخطيط الحسابي كما رسمت في Fig.6.6(b)؟ للإجابة على هذا السؤال، لاحظ من Fig. 6.6(a) أن طول الحدود الداخلية Γ1، وتعرف الإحداثيات الفيزيائية للجسم:
(x, y) known along Γ1	(X, Y) معروف على طول Γ1
Similarly, the physical coordinates of the outer boundary Γ2 are also known, because Γ2 is simply a rather arbitrarily drawn loop around the airfoil. Once this loop Γ2 is specified, then the physical coordinates along it are known:	وبالمثل، و الإحداثيات الفيزيائية للحدود الخارجي Γ2 معروفة أيضا، لأن Γ2 هو مجرد حلقة تقريبية تم رسمها بشكل تعسفي حول الجنيح. مرة واحدة يتم تحديد هذه الحلقة Γ2، ثم الإحداثيات الفيزيائية تصبح معروفة على طول ذلك:
(x, y) known along Γ2	(X, Y) معروف على طول Γ2
This hints of a boundary value problem where the boundary conditions (namely the values of x and y) are known *everywhere* along the boundary. Recall from Sect. 4.3.3 that the solution of elliptic partial differential equations requires the specification of the boundary conditions *everywhere* along a boundary enclosing the domain.	هذا يلمح لوجود مشكلة في قيمة الحدود حيث نعرف الشروط الحدودية (وهي قيم x و y) في كل مكان على طول الحدود. أذكر من Sect. 4.3.3 أن حل المعادلات التفاضلية الجزئية البيضاوية الشكل يتطلب مواصفات شروط الحدود في كل مكان على طول الحدود داخل المجال. لذلك،

Therefore, let us consider the transformation in Fig. 6.6 to be defined by an *elliptic partial differential equation* (in contrast to an algebraic relation as illustrated in Sect. 6.4). One of the simplest elliptic equations is Laplace's equation:	دعونا ننظر للتحول في Fig. 6.6 الذي تحدده المعادلة التفاضلية الجزئية البيضاوي الشكل (على النقيض من علاقة جبرية كما هو موضح في الطائفة. 6.4 Sect. 6.4). واحد من أبسط المعادلات البيضاوية الشكل هو معادلة لابلاس :Laplace

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \qquad (6.35a)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \qquad (6.35b)$$

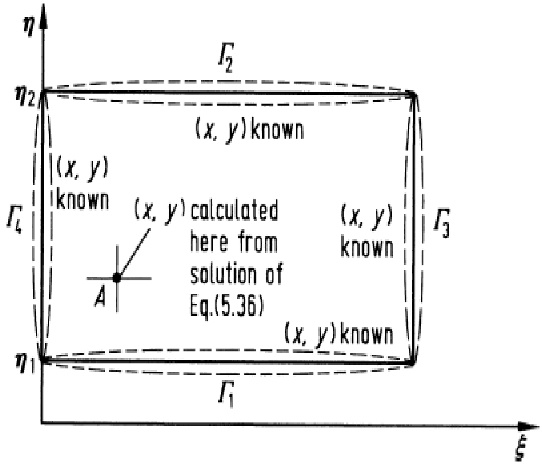
where we have Dirichlet boundary conditions $\eta = \eta_1 =$ constant on Γ_1 $\eta = \eta_2 =$ constant on Γ_2 and $\xi = \xi(x, y)$ is specified on both Γ_1 and Γ_2	حيث لدينا شروط الحدود ديريتشليت Dirichlet $\eta = \eta_1 =$ ثابت على Γ_1 $\eta = \eta_2 =$ ثابت على Γ_2 و $\xi = \xi(x, y)$ يتم تحديد على كلا Γ_1 وΓ_2
It is important to keep in mind what we are doing here. The equations (6.35a and b) have *nothing* to do with the physics of the flow field. They are simply elliptic partial differential equations *which we have chosen* to	من المهم أن نأخذ في الاعتبار ما نقوم به هنا. المعادلات (6.35a and b) لا علاقة لها بفيزياء مجال التدفق شيئا. هم ببساطة المعادلات التفاضلية الجزئية البيضاوي الشكل التي اخترناه

relate ξ and η to x and y, and hence constitute a transformation (a one-to-one correspondence of grid points) from the physical plane to the computational plane. Because this transformation is governed by elliptic equations, it is an example of a general class of grid generation called *elliptic grid generation*. Such elliptic grid generation was first used on a practical basis by Joe Thompson at Missippi State University, and is described in detail in the pioneering paper given in Ref. [6].	لربط ξ وη ب x و y، وبالتالي تشكل تحولا (المطابقة واحد الى واحد من نقاط الشبكة) من التخطيط الفيزيائي إلى التخطيط الحاسوبي. لأنه يخضع هذا التحول من خلال المعادلات بيضاوية الشكل، هو مثال على الطبقة العامة من شبكة الجيل تسمى شبكة الجيل البيضاوي الشكل. وقد استخدمت شبكة الجيل البيضاوي الشكل أولا على أساس عملي من قبل جو تومسون Joe Thompson في جامعة ولاية Missippi، وصفت بالتفصيل في ورقة الرائدة الواردة في المرجع. [6].
Let us look more closely at the physical and computational planes shown in Fig. 6.6. In order to construct a rectangular grid in the computational plane plane (Fig. 6.6b), a cut must be made in the physical plane (Fig. 6.6a) at the trailing edge of the airfoil. This cut can be visualized as two lines superimposed on each other: the line *pq* denoted by Γ3 represents a boundary line for the physical space above *pq*, and the line *rs* denoted by Γ4	دعونا نلقي نظرة عن كثب على التخطيط الفيزيائي والحاسوبي المبين في Fig. 6.6. من أجل بناء شبكة مستطيلة في التخطيط الحسابي (Fig. 6.6b) ، يجب أن يتم خفض في التخطيط الفيزيائي (Fig. 6.6a) على حافة زائدة من الجنيح. هذا الخفض يمكن تصور كما اثنين من خطوط متراكبة على بعضها البعض: خط *pq* الرمز بواسطة Γ3 يمثل خط الحدود للحيز

represents a boundary line for the physical space below *rs*. In the physical plane, the points *p* and *r* are the same point, and the points *q* and *s* are the same point; in Fig. 6.6(a) they are slightly displaced for clarity. However, in the computational plane, these points are all different. Indeed, the grid in the computational plane is obtained by slicing the physical grid at the cut, and then 'unwrapping' the grid from the airfoil. For example, the airfoil surface in the physical plane, curve *pgecar*, becomes the lower straight line denoted by Γ1 in the computational plane. Similarly, the outer boundary *ghfdbs* becomes the upper straight line denoted by Γ2 in the computational plane. The left and right sides of the rectangle in the computational plane are formed from the cut in the physical plane; the left side is line *rs* denoted by Γ4 in Fig. 6.6(b), and the right side is line *pq* denoted by Γ3 in Fig. 6.6(b). The computational plane is sketched again in Fig. 6.7. Here we	الفيزيائي فوق *pq* ، وخط *rs* الذي نرمز اليه بواسطة Γ4 يمثل خط الحدود للحيز الفيزيائي دون *rs*. في التخطيط الفيزيائي، نقطة *p* و r هي نفس النقطة، و *q* نقطة و *s* هي نفس النقطة. في Fig. 6.6(a) نبعد قليلا عن الوضوح. ومع ذلك، في التخطيط الحاسوبي، هذه النقاط كلها مختلفة. في الواقع، يتم الحصول على الشبكة في التخطيط الحاسوبي عبر تفصيل للشبكة الفيزيائية في التقطيع، ثم "إزالة تغليف" الشبكة من الجنيح. على سبيل المثال، سطح الجنيح في التخطيط الفيزيائي، ومنحنى *pgecar*، يصبح خط مستقيم أقل من الرمز بواسطة Γ1 في التخطيط الحسابي. وبالمثل، فإن الحدود الخارجي *ghfdbs* يصبح خط مستقيم العلوي الرمز بواسطة Γ2 في التخطيط الحاسوبي. يشكل الجانبين الأيمن والأيسر من المستطيل في التخطيط الحاسوبي تتشكل من قطع في التخطيط الفيزيائي؛ الجانب الأيسر هو خط *rs* يرمز اليه بواسطة Γ4 فيFig. 6.6(b) ، وعلى الجانب

emphasize that values of (x, y) are *known along all four boundaries*, Γ1, Γ2, Γ3 and Γ4. The key aspect of the elliptic grid generation approach is that, with the given boundary conditions, Eqs. (6.35a and b) are solved for the (x, y) values which apply to *all the internal points*. An example of such an internal point is given by point A in Fig. 6.7, which corresponds to the same point A in Figs. 6.6(a) and (b). In reality, the equations to be solved are the inverse of Eqs. (6.35a and b), that is, equations obtained from Eqs. (6.35a and b) by interchanging the dependent and independent variables. The result is:	الأيمن هو خط pq يرمز اليه بواسطة Γ3 في Fig. 6.6(b). ورسم التخطيط الحاسوبي مرة أخرى في Fig. 6.7. نحن هنا نؤكد معرفة قيمة (x, y) على طول كل الحدود الأربعة، Γ1، Γ2، Γ3 وΓ4. الجانب الرئيسي للنهج شبكة الجيل بيضاوي الشكل هو أنه، مع شروط الحدود يتم حل Eqs. (6.35a and b) لقيمة (x, y) التي تنطبق على جميع النقاط الداخلية. وتعطى مثالا على مثل هذه نقطة الداخلية من خلال النقطة (A) في Fig. 6.7، والتي تتطابق مع نفس النقطة (A) في Figs. 6.6(a) and (b). في الواقع، والمعادلات يجب حلها هي معكوس Eqs. (6.35a and b)، وهذه المعادلات التي تم الحصول عليها من Eqs. (6.35a and b) تتبادل في المتغيرات التابعة والمستقلة. والنتيجة هي:

Fig. 6.7 Computational plane, illustrating the boundary conditions and an internal point



$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \qquad (6.36a)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \qquad (6.36b)$$

where

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2$$

$$\beta = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2$$

Note in Eqs. (6.36a and b) that x and y are now expressed as the dependent variables. Returning again to Fig. 6.7, Eqs. (6.36a and b)	نلاحظ في Eqs. (6.36a and b) أن x و y يتم التعبير عنها الآن كمتغيرات تابعة. العودة مرة أخرى إلى Fig. 6.7, Eqs. (6.36a and b) تحل، جنبا إلى جنب مع

are solved, along with the given boundary conditions for (x, y) on Γ1, Γ2, Γ3 and Γ4, to obtain the values of (x, y) which correspond to the uniformly spaced grid points in the computational (ξ, η) plane. Thus, a given grid point (ξi, ηj) in the computational plane corresponds to the *calculated* grid point $(x$i, yj) in physical space. The solution of Eqs. (6.36a and b) is carried out by an appropriate finite-difference solution for elliptic equations; for example, relaxation techniques are popular for such equations. Note that the above transformation, using an elliptic partial differential equation to generate the grid, does *not* involve closed-form analytic expressions; rather, it produces a set of *numbers* which locate a grid point $(x$i, yj) in physical space which correspond to a given grid	شروط الحدود نظرا ل(x, y) على Γ1، Γ2، Γ3 وΓ4، للحصول على قيمة (x, y) التي تتوافق مع نقاط الشبكة متباعدة بشكل موحد في التخطيط الحاسوبي (ξ، η). وهكذا، ان نقطة شبكة معينة في التخطيط الحسابي (ξi، ηj) يتوافق مع نقطة شبكة المحسوبة في الحيز الفيزيائي $(x$i, yj). حل Eqs. (6.36a and b) أن يتم بها حل الفروق المحدودة المناسب لمعادلات بيضاوية الشكل. على سبيل المثال، تقنيات الاسترخاء مستعملة كثيرا لمثل هذه المعادلات. لاحظ أن التحول المذكور أعلاه، تستخدم المعادلة التفاضلية الجزئية البيضاوية الشكل لتوليد الشبكة، لا تنطوي على تعابير تحليلية مغلقة شكل من الأشكال؛ بدلا من ذلك، فإنها تنتج مجموعة من الأرقام والتي تحدد نقاط الشبكة $(x$i, yj) في الحيز الفيزيائي التي تتوافق مع نقطة شبكة معينة (ξi، ηj) في الحيز الحاسوبي. في المقابل، يتم الحصول على مقاييس في المعادلات التي تحكم تدفق (التي تحل في التخطيط الحاسوبي)، مثل $\partial\xi/\partial x$ ، $\partial\eta/\partial y$، وما إلى ذلك من الفروق المحدودة. وكثيرا ما تستخدم الاختلافات المركزية لهذا الغرض. المنحني

point (ξi, ηj) in computational space. In turn, the metrics in the governing flow equations (which are solved in the computational plane), such as $\partial\xi/\partial x$, $\partial\eta/\partial y$, etc. are obtained from finite differences; central differences are frequently used for this purpose. The curvilinear, boundary-fitted coordinate system shown in Fig. 6.6(a) is simply illustrated in a qualitative sense in that figure, for purposes of instruction. An actual grid generated about an airfoil using the above elliptic grid generation approach is shown in Fig. 6.8, taken from Ref. [7]. Using Thompson's grid generation scheme (Ref. [6]), Wright ([7]) has generated a boundary-fitted coordinate system around a Miley airfoil. (The Miley airfoil is an airfoil specially designed for low Reynolds number applications by Stan Miley	الأضلاع، نظام الإحداثيات المجهزة الحدود المبين في Fig. 6.6(a) ويتضح ببساطة بالمعنى النوعي في هذا الرقم، لأغراض التعليم. في الحقيقة شبكة المتولدة عن وجود الجنيح باستخدام نهج شبكة الجيل البيضاوي الشكل أعلاه مبين في Fig. 6.8، مأخوذة من المرجع. [7]. باستخدام مخطط شبكة الجيل طومسون Thompson (المرجع [6])، رايت ([7]) وقد ولدت نظام الإحداثيات الحدود المجهزة حول الجنيح مايلي Miley. (والجنيح مايلي Miley هو الجنيح المصمم خصيصا لتطبيقات قاعدة عدد رينولدز Reynolds من قبل ستان مايلي Stan Miley في جامعة ولاية ميسيسيبي Mississippi). في Fig. 6.6 في بقعة بيضاء في منتصف هذا الشكل هو الجنيح، والشبكة تنتشر بعيدا عن الجنيح في كل الاتجاهات. في المرجع. [7] تدفقات قاعدة رقم رينولدز Reynolds على خلال الجنيحات عن طريق الوقت يعتمد حل الفروق المحدودة في معادلات الانضغاط لنافيير ستوكس Navier-Stokes(وتناقش مثل هذه الحلول المعتمدة على الزمن في Chap. 7). تيار الحر

at Mississippi State University.) In Fig. 6.6 the white speck in the middle of the figure is the airfoil, and the grid spreads far away from the airfoil in all directions.

In Ref. [7] low Reynolds number flows over airfoils were calculated by means of a time dependent finite-difference solution of the compressible Navier-Stokes equations (such time-dependent solutions are discussed in Chap. 7). The free stream is subsonic; hence the outer boundary must be placed far away from the airfoil because of the far-reaching propagation of disturbances in a subsonic flow. A detail of the grid in the near vicinity of the airfoil is shown in Fig. 6.9. Note from both Figs. 6.8 and 6.9 that the grid is a ‘C’ type grid, in contrast to the ‘0’ type grid sketched in Fig. 6.6. We end this section by emphasizing

هو دون سرعة الصوت، وبالتالي يجب وضع الحدود الخارجية بعيدا عن الجنيح بسبب انتشارات بعيدة المدى من اضطرابات في تدفق دون سرعة الصوت. وترد التفاصيل من الشبكة في المحيط القريب من الجنيح في Fig. 6.9. نلاحظ من كل من Figs. 6.8 and 6.9 أن نوع الشبكة هو "C" ، على النقيض من نوع الشبكة '0' التي رسمت في Fig. 6.6. نوضع حد لهذا القسم من خلال التأكيد مرة أخرى على أن شبكة الجيل بيضاوية الشكل، مع حل لها من المعادلات البيضاوية الشكل التفاضلية الجزئية للحصول على نقاط الشبكة الداخلية، منفصل تماما عن حل الفروق المحدودة من المعادلات التي تحكم.

يتم إنشاء شبكة أولا، قبل محاولة أي حل للمعادلات التي تحكم. استخدام معادلة لابلاس Laplace (المعادلة (6.35a and b)) للحصول على هذه الشبكة لا يوجد اي علاقة على الإطلاق مع الجوانب الفيزيائية لمجال التدفق الفعلي. هنا، يستخدم معادلة لابلاس Laplace ببساطة لتوليد الشبكة فقط.

again that the elliptic grid generation, with its solution of elliptic partial differential equations to obtain the internal grid points, is *completely separate* from the finite-difference solution of the governing equations. The grid is generated first, before any solution of the governing equations is attempted. The use of Laplace's equation (Eq. (6.35a and b)) to obtain this grid has nothing to do whatsoever with the physical aspects of the actual flow field. Here, Laplace's equation is simply used to generate the grid *only*.	

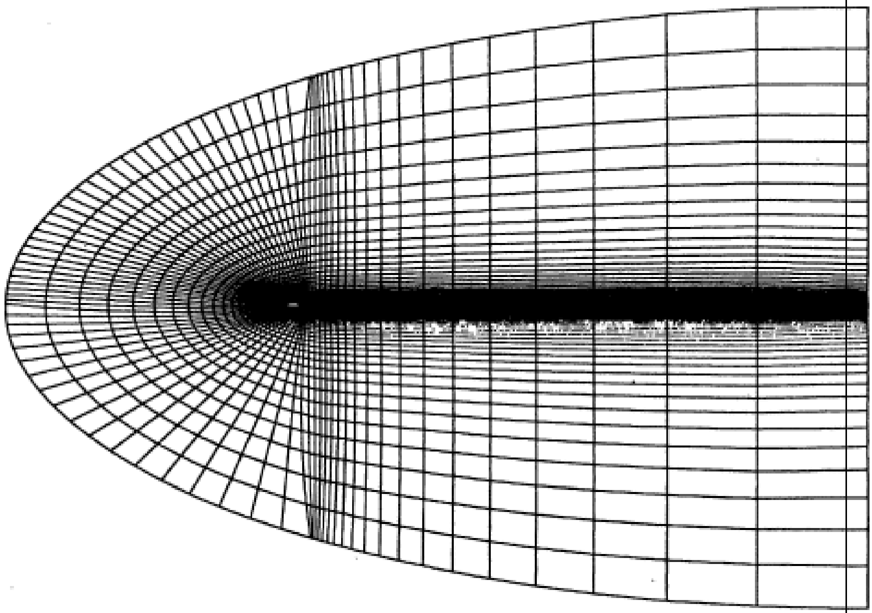


Fig. 6.8 Boundary fitted grid (from Ref. [7])

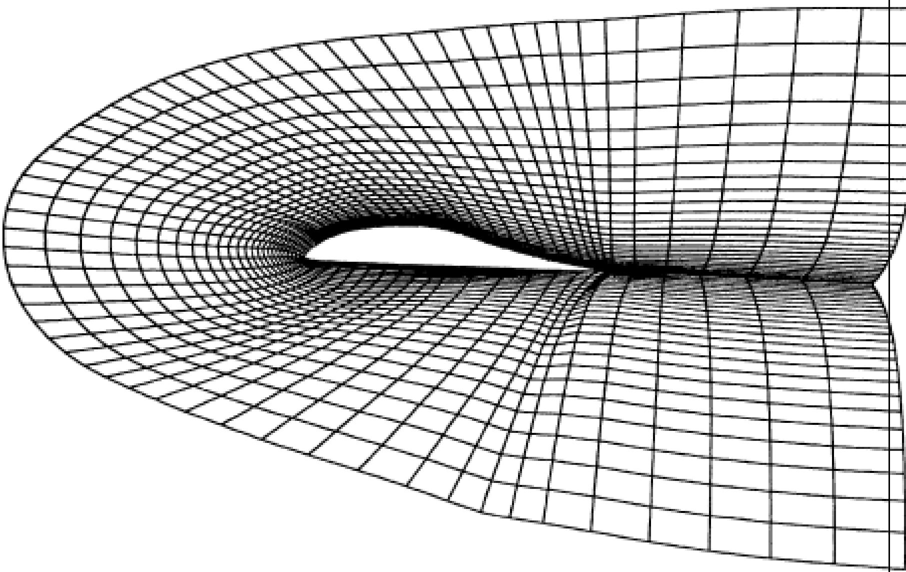


Fig. 6.9 A detail of the boundary fitted grid (from Ref. [7])

6.6 Adaptive Grids

An adaptive grid is a grid network that automatically clusters grid points in regions of high flow field gradients; it uses the solution of the flow field properties to locate the grid points in the physical plane. The adaptive grid evolves in steps of time in conjunction with a time dependent solution of the governing flow field equations, which computes the

على شبكة التكيفية هي شبكة الشبكة (network) حيث مجموعات نقاط الشبكة تلقائيا في مناطق درجة مجال التدفق عالي. ويستخدم الحل من خصائص حقل التدفق لتحديد نقاط الشبكة في التخطيط الفيزيائي. شبكة التكيف تتطور في الخطوات مع الوقت بالتزامن مع وقت حل يعتمد على المعادلات التي تحكم مجال التدفق، والذي

flow field variables in steps of time. During the course of the solution, the grid points in the physical plane *move* in such a fashion to 'adapt' to regions of large flow field gradients. Hence, the actual grid points in the physical plane are constantly in motion during the solution of the flow field, and become stationary only when the flow solution approaches a steady state. Therefore, unlike the elliptic grid generation discussed in Sect. 6.5 where the generation of the grid is completely separate from the flow field solution, an adaptive grid is intimately linked to the flow field solution, and changes as the flow field changes. The hoped-for advantages of an adaptive grid are expected because the grid points are clustered in regions where the 'action' is occurring. These advantages are: (1) increased accuracy for a fixed number of grid points, or (2), for a given accuracy, fewer grid points are needed. Adaptive grids are still very new in CFD, and whether or not these advantages are always

يحسب متغيرات مجال التدفق في الخطوات من الزمن. أثناء الحل، نقاط الشبكة في خطوة التخطيط الفيزيائي في مثل هذه الأزياء إلى "التكيف" إلى مناطق درجات مجال تدفق كبيرة. وبالتالي، فإن نقاط الشبكة الفعلية في التخطيط الفيزيائي هي باستمرار في الحركة خلال إيجاد حل لمجال التدفق، وتصبح ثابتة فقط عندما يقترب التدفق الى حالة مستقرة. وبالتالي، فخلافا لشبكة الجيل البيضاوي الشكل المناقشة في الطائفة. 6.5 Sect. 6.5حيث الجيل من الشبكة هو منفصل تماما عن حل مجال التدفق، يرتبط بالشبكة التكيفية ارتباطا وثيقا مع حل حقل التدفق، وتتغير مع التغيرات في مجال التدفق. الهدف من مزايا وضع شبكة التكيف ويتوقع لتتجمع نقاط الشبكة في المناطق التي يتم فيها حدوث "العمل". هذه المزايا هي: (1) زيادة الدقة لعدد محدد من نقاط الشبكة، أو (2)، لدقة معينة، وهناك حاجة إلى نقاط أقل في الشبكة. شبكات التكيف لا تزال جديدة للغاية في CFD، سواء أنخزت هذه المزايا أم لا فهي غير راسخة. مثال بسيط على شبكة

acheived is not well established. An example of a simple adaptive grid is that used by Corda [8] for the solution of viscous supersonic flow over a rearward-facing step. Here, the transformation is expressed in the form:

التكييف الذي استخدم من قبل كوردا Corda [8] من أجل حل تدفق لزج أسرع من الصوت أكثر من خطوة تواجه المؤخرة. هنا، والتحول معرب عنه في شكل:

$$\Delta x = \frac{B\Delta\xi}{1 + b\dfrac{\partial g}{\partial x}} \tag{6.37}$$

$$\Delta y = \frac{C\Delta\eta}{1 + c\dfrac{\partial g}{\partial y}} \tag{6.38}$$

Where g is a primitive flow field variable, such as p, ϱ or T. If $g = p$, then Eqs. (6.37) and (6.38) cluster the grid points in regions of large pressure gradients; if $g = T$, the grid points cluster in regions of large temperature gradients, and so forth. In Eqs. (6.37) and (6.38), $\Delta\xi$ and $\Delta\eta$ are fixed, uniform grid spacings in the computational (ξ, η) plane, b and c are constants chosen to increase or decrease the effect of the gradient in changing the grid spacing in the physical plane, B and C are scale factors and Δx and Δy are the new grid

حيث g هو بدائي متغير مجال التدفق، مثل p, ϱ أو T. إذا $g = p$، اذا Eqs. (6.37) and (6.38) كتلة نقاط الشبكة في مناطق درجات الضغط الكبيرة؛ إذا $g = T$ تتمركز نقاط الشبكة العنقودية في مناطق درجات الحرارة الكبيرة، وهكذا دواليك. في EQS. (6.37) و (6.38) ، يتم إصلاح Δξ وΔη، شبكة موحدة المباعدة في التخطيط الحاسوبي (ξ، η), b و c ثوابت مختارة لزيادة أو تقليل تأثير التدرج مع تغيير تباعد الشبكة في التخطيط الفيزيائي، B و C هي عوامل نطاق وΔx وΔy هي شبكة المباعدة

spacings in the physical plane. Because $\partial g/\partial x$ and $\partial g/\partial y$ are changing with time during a time-dependent solution of the flow field, then clearly Δx and Δy change with time, i.e. the grid points move in the physical space. Clearly, in regions of the flow where $\partial g/\partial x$ and $\partial g/\partial y$ are large, Eqs. (6.37) and (6.38) yield small values of Δx and Δy for a given $\Delta\xi$ and $\Delta\eta$; this is the mechanism which clusters the grid points. In dealing with an adaptive grid, the computational plane consists of fixed points in the (ξ, η) space; these points are fixed in time, i.e. they do *not* move in the computational space. Moreover, $\Delta\xi$ is uniform, and $\Delta\eta$ is uniform. Hence, the computational plane is the same as we have discussed in previous sections.

الجديدة في التخطيط الفيزيائي. لأن $\partial g/\partial x$ و $\partial g/\partial y$ تتغير مع مرور الوقت خلال حل يعتمد على الوقت من مجال التدفق، فمن الواضح ان Δx و Δy تتغيير مع الوقت، أي تتحرك نقاط الشبكة في الحيز الفيزيائي بشكل واضح، في مناطق تدفق حيث $\partial g/\partial x$ و$\partial g/\partial y$ كبيرة Eqs. (6.37) and (6.38) تسفر عن قيمة صغيرة من Δx وΔy لـ$\Delta\xi$ و$\Delta\eta$ معين. هذه هي آلية مجموعات نقاط الشبكة. التعامل مع شبكة على التكيف، ويتكون التخطيط الحسابي من نقاط ثابتة في البعد (ξ، η)؛ يتم إصلاح هذه النقاط في الوقت المناسب، أي أنها لا تتحرك في البعد الحاسوبي. وعلاوة على ذلك، $\Delta\xi$ موحدة، و$\Delta\eta$ موحدة. وبالتالي، فإن التخطيط الحاسوبي هو نفسه كما ناقشنا في الأقسام السابقة.

The governing flow equations are solved in the computational plane, where the *x*, *y* and *t* derivatives are transformed according to Eqs. (6.2), (6.3) and (6.5). In particular, examine the transformation given by Eq. (6.5) for the time derivative. In the case of stretched or

تحل المعادلات التي تحكم التدفق في التخطيط الحسابي، حيث يتم تحويل المشتقات X، Y و t وفقا لـ Eqs. (6.2), (6.3) and (6.5). على وجه الخصوص، دراسة التحول الذي قدمته المعادلة. (6.5) لمشتقات الوقت. في حالة شبكات الضغوط

boundary-fitted grids as discussed in Sects. 6.4 and 6.5 respectively, the metrics $\partial\xi/\partial t$ and $\partial\eta/\partial t$ were zero, and Eq. (6.5) yields $\partial/\partial t = \partial/\partial\tau$. However, for an adaptive grid,

أو الحدود المجهزة كما نوقش في (Sects. 6.4 and 6.5)على التوالي، وكانت مقاييس $\partial\xi/\partial t$ و $\partial\eta/\partial t$ صفر، والمعادلة. (6.5) تنتج $\partial/\partial t = \partial/\partial\tau$. ومع ذلك، لشبكة التكيفية،

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} \equiv \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_{x,y}$$

and

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} \equiv \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{x,y}$$

Are finite. Why? Because, although the grid points are fixed in the computational plane, the grid points in the physical plane are moving with time. The physical meaning of $(\partial\xi/\partial t)$ x, y is the time rate of change of ξ at a *fixed* (x, y) location in the physical plane. Similarly, the physical meaning of $(\partial\eta/\partial t)$ x, y is the time rate of change of η at a *fixed* (x, y) location in the physical plane. Imagine that you have your eyes locked to a fixed (x, y) point in the physical plane. As a function of time, the values of ξ and η associated with this *fixed* (x, y) point will change. This is why $\partial\xi/\partial t$ and $\partial\eta/\partial t$ are finite. In turn, when dealing with the transformed flow

هو محدود. لماذا؟ لأنه، على الرغم من أن نقاط الشبكة ثابتة في التخطيط الحاسوبي، الا انها تتحرك مع مرور الوقت في التخطيط الفيزيائي. المعنى الفيزيائي ل x, y $(\partial\xi/\partial t)$ هو معدل وقت تغيير ξ في (x, y) موقع ثابت في التخطيط الفيزيائي. وبالمثل، فإن المعنى الفيزيائي ل x, y $(\partial\eta/\partial t)$ هو معدل وقت تغيير η في (x, y) موقع ثابت في التخطيط الفيزيائي. تخيل أن عينيك تنظر نقطة ثابتة (x, y) في التخطيط الفيزيائي. بوصفها دالة من الزمن، قيمة ξ وη المرتبطة بثاوابت نقطة (x, y) سوف تتغير. هذا هو السبب أن $\partial\xi/\partial t$

equations in the computational plane, all three terms on the right-hand side of Eq. (6.5) are finite, and must be included in the transformed equations. In this fashion, the time metrics $\partial\xi/\partial t$ and $\partial\eta/\partial t$ automatically take into account the movement of the adaptive grid during the solution of the governing flow equations. The values of the time metrics in the form shown in Eq. (6.5) are a bit cumbersome to evaluate; on the other hand, the related time metrics	و $\partial\eta/\partial t$ محدودة. بدوره، عند التعامل مع معادلات التدفق التي تحولت في التخطيط الحاسوبي، جميع المصطلحات الثلاثة على الجانب الأيمن من المعادلة. (6.5) تكون محدودة، ويجب تضمينها في المعادلات التحويلية. في هذا الشكل، مقاييس الوقت $\partial\xi/\partial t$ و $\partial\eta/\partial t$ تأخذ تلقائيا بعين الاعتبار حركة تكييف الشبكة خلال حل المعادلات التي تحكم التدفق. قيمة مقاييس الوقت في شكل المبين في المعادلة. (6.5) صعبة التقييم. من ناحية أخرى، فإن مقاييس الوقت ذات الصلة

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi,\eta} \quad \text{and} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\xi,\eta}$$

are much easier to evaluate, because they come from	هي أسهل بكثير لتقييم، لأنها تأتي من

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi,\eta} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{6.39}$$

and

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\xi,\eta} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{6.40}$$

Where Δx and Δy are obtained directly from the transformation given in Eqs. (6.37) and (6.38) respectively. Let us find the relationship between these two sets of time metrics. Consider	حيث يتم الحصول على Δx و Δy مباشرة من التحول الواردة في Eqs. (6.37) and (6.38) على التوالي. دعونا نعثر على العلاقة بين هاتين المجموعتين من مقاييس الزمن. نظر

$$x = x(\xi, \eta, \tau)$$

Hence

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau} \mathrm{d}\xi + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau} \mathrm{d}\eta + \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta} \mathrm{d}\tau$$

From this result, we write

$$\cancel{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{x,y}}^{\,0} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta}\cancel{\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{x,y}}^{\,1}$$

or

$$-\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x,y} \qquad (6.41)$$

Note that we are carrying the subscripts on the partial derivatives to avoid any confusion over what variables are held constant. Now consider	ملاحظة أننا نضع السفلية على المشتقات الجزئية لتجنب أي التباس حول اي المتغيرات تبقى ثابتة. الآن نرى

$$y = y(\xi, \eta, \tau)$$

Hence:

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau} d\xi + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau} d\eta + \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta} d\tau$$

Thus, from this result we write

$$\cancelto{0}{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{x,y}} = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta}\cancelto{1}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{x,y}}$$

or

$$-\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta} = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x,y} \tag{6.42}$$

Solve Eqs. (6.41) and (6.42) for $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{x,y}$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{x,y} = \frac{\begin{vmatrix} -\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta} & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau} \\ -\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta} & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau} & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau} \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau} & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau} \end{vmatrix}}$$

Recognizing that $\tau = t$, and that the denominator is the Jacobian J, the above equation becomes (dropping subscripts)	وإذ تسلم بأن $\tau = t$ ، وأن القاسم المشترك هو مصفوفه جاكوبي J Jacobian، تصبح المعادلة أعلاه (اسقاط السفلية)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{J}\left[-\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\right] \qquad (6.43)$$

<table>
<tr><td>Solving Eqs. (6.41) and (6.42) for $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x,y}$, we find a likewise fashion that</td><td>حل Eqs. (6.41) and (6.42) ل $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x,y}$، نجد بطريقة بالمثل أن</td></tr>
</table>

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{J}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\right] \qquad (6.44)$$

<table>
<tr><td>Let us recapitulate. For an adaptive grid, the governing flow equations, when transformed for solution in the computational (ξ, η) plane, must contain all the terms in the time transformation given by Eq. (6.5). The time metrics, $\partial\xi/\partial t$ and $\partial\eta/\partial t$, in Eq. (6.5) can in turn be expressed in terms of $\partial x/\partial t$ and $\partial y/\partial t$ through Eqs. (6.43) and (6.44). These new time metrics can in turn be readily calculated from Eqs. (6.39) and (6.40), where Δx and Δy are given by the basic transformation in Eqs. (6.37) and (6.38). An example of an</td><td>دعونا نلخص. للحصول على شبكة التكيف، المعادلات التي تحكم التدفق، عندما تتحول للحل في التخطيط الحاسوبي (ξ، η)، يجب أن تحتوي على كل الشروط في تحول الوقت التي قدمتها المعادلة. (6.5). مقاييس الوقت، $\partial\xi/\partial t$ و $\partial\eta/\partial t$ ، في المعادلة. (6.5) يمكن بدوره أن يعبر عنه من حيث $\partial x/\partial t$ و $\partial y/\partial t$ من خلال Eqs. (6.43) and (6.44). هذه المقاييس الزمنية الجديدة يمكن بدورها أن تحسب بسهولة من Eqs. (6.39) and (6.40) ، حيث يتم إعطاء Δx وΔy قبل التحول الأساسي في Eqs. (6.37) and (6.38). وتعطى مثالا على شبكة التكيف لتدفق لزج أسرع من الصوت</td></tr>
</table>

adapted grid for the supersonic viscous flow over a rearward facing step is given in Fig. 6.10, taken from the work of Corda [8]. Flow is from left to right. Note that the grid points cluster around the expansion wave from the top corner of the step, and around the reattachment shock wave downstream of the step. It is interesting to note that the adapted grid itself is a type of ‘flow field visualization method’ that helps to identify the location of waves and other gradients in the flow. As a final note, there are many different approaches for the generation of adaptive grids. The above discussion is just one; it is based on ideas presented by Dwyer et al. in Ref. [9]. For a more complete discussion on adaptive grids, as well as grid generation in general, see Ref. [1].	على خطوة التي تواجه المؤخرة في Fig. 6.10، التي اتخذت من عمل كوردا Corda [8]. تدفق هو من اليسار إلى اليمين. لاحظ أن الشبكة العنقودية حول موجة التوسع من الزاوية العليا من هذه الخطوة، وحول موجة الصدمة المرتكز المصب من الخطوة. من المثير للاهتمام أن نلاحظ أن الشبكة التكيف في حد ذاته هو نوع من "تصور طريقة تدفق الحقل" بأن يساعد على تحديد موقع الأمواج وتدرجات أخرى في التدفق. وكملاحظة أخيرة، هناك العديد من الأساليب المختلفة لتوليد شبكات التكيف. المناقشة الواردة أعلاه هي مجرد واحد؛ لأنه يقوم على الأفكار التي قدمها دواير Dwyer وآخرون. في المرجع. [9]. لمناقشة أكثر كمالا على شبكات التكيف، وكذلك شبكة الجيل بشكل عام، انظر المرجع. [1].

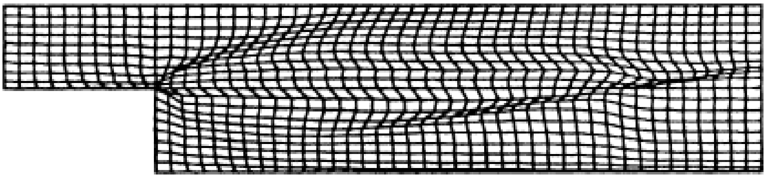


Fig. 6.10 Adapted grid for the rearward-facing step problem (from Corda, Ref. [8])

References

1. Anderson, D.A., Tannehill, John C. and Pletcher, Richard H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1984.

2. Sullins, G.A., Anderson, J.D., Jr. and Drummond, J.P., 'Numerical Investigation of Supersonic Base Flow with Parallel Injection,' AIAA Paper No. 82–1001.

3. Sullins, G.A., Numerical Investigation of Supersonic Base Flow with Tangential Injection,

M.S. Thesis, Department of Aerospace Engineering, University of Maryland, 1981.

4. Holst, T.L., 'Numerical Solution of Axisymmetric Boattail Fields with Plume Simulators,'

AIAA Paper No. 77–224, 1977.

5. Roberts, B.O., 'Computational Meshes for Boundary Layer Problems,' *Lecture Notes in*

Physics, Springer-Verlag, New York, 1971, pp. 171–177.

6. Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin, C.W., 'Automatic Numerical Generation of Body-

Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-

Dimensional Bodies,' *Journal of Computational Physics*, Vol. 15, pp. 299–319, 1974.

7. Wright, Andrew F., A Numerical Investigation of Low Reynolds Number Flow Over an Airfoil,

M.S. Thesis, Department of Aerospace Engineering, University of Maryland, 1982.

8. Corda, Stephen, Numerical Investigation of the Laminar, Supersonic Flow over a Rearward-

Facing Step Using an Adaptive Grid Scheme, M.S. Thesis, Department of Aerospace Engineering,

University of Maryland, 1982.

9. Dwyer, H.A., Kee, R.J. and Sanders, B.R., 'An Adaptive Grid Method for Problems in Fluid

Mechanics and Heat Transfer,' AIAA Paper No. 79–1464, 1979.

7 طرق الفرق المحدود الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض التطبيقات المحددة لسريان الغير لزجية واللزجية[9]

7.1 مدخل (Introduction)

في هذا الفصل نحن سنقوم بجولة شاملة حول العلاج التمهيدي لديناميات الموائع الحسابية (computational fluid dynamics) من خلال مناقشة بعض التطبيقات (applications) من طرق الفرق المحدودة الواضحة (explicit finite difference methods) لأمثلة مختارة لسريان (flows) غير لزج (inviscid) ولزج (viscous). هذه الأمثلة مؤخوبذة من نتائج التي حصل عليها .J.D. Anderson, Jr و طلابه. المقصود هو التوضيح ما يمكن القيام به من قبل الطلاب نوعا ما مبتدئين غير متمكنين جيداً من أفكار لديناميات الموائع الحسابية (CFD).

وعلاوة على ذلك، في جميع الحالات يتم القيام بالتطبيقات (applications) مع برامج كمبيوتر (computer programs) مصممة تماما ومكتوبة من قبل كل طالب. هذا وتتابع فكرة .J.D Anderson, Jr. التعليمية أن كل طالب يجب أن يكون لديه تجربة بدء من ورقة وقلم، بكتابة المعادلات الاساسية (governing equations) . وضع الحل العددي (numerical solution) المناسب لهذه المعادلات، وكتابة برنامج C (C program)، ووضع البرنامج في

[9] معظم هذه الفقرة من

[Wendt 2009], Ch. 7 (Author: Anderson jr.)

الكمبيوتر، ومن ثم المرور بجميع التجارب والمحن لجعل البرنامج يعمل بشكل صحيح. هذا هو جانب هام من تعليم ديناميات الموائع الحسابية (CFD).

قبل أن نناقش بعض الأمثلة على ذلك، من المهم أن تصف آلية (mechanism) حسابات الفرق المحدود الصريح (explicit finite-difference calculations)،. تم التمييز بين النهج الصريح (explicit) والضمني (implicit) في القسم 5.3، التي ينبغي أن يعاد النظر فيها قبل التقدم أكثر في هذا الفصل. في المقاطع القليلة المقبلة، سوف نقوم بوصف الطرق الصريحة (explicit methods) الشعبية و الواضحة نوعا ما،. يعطى العلاج (treatment) وتطبيق الطرق الضمنية (implicit methods) لن تتم مناقشتها هنا.

أخيرا، فإن الأمثلة التي تمت مناقشتها في هذا الفصل تتضمن كل طريقة تعتمد على الوقت، أي السير قدما في خطوات من الزمن (forward marching in steps of time). الغالبية العظمى من الحلول التي تعتمد على الزمن (time dependent solutions) يكون هدفها حل حقل السريان الثابت الحالة (steady-state flow field) والتي تقتربت من الحل عندما يكون الزمان كبير، وهنا، فإن الآلية المعتمدة على الزمن هو مجرد وسيلة لتحقيق هذه الغاية. في تطبيقات (applications) أخرى، يتم استخدام الطريقة التي تعتمد على الزمن لحساب العوابر الحالي (actual transients) في سريان متقلب (unsteady flow).

Examples of both are given here. We note, however, that although the following sections deal with marching forward in time, the same techniques are easily applied to a steady flow calculation where spatial marching is done along some coordinate axis. We have seen in Chap. 4 that such forward marching (in time or space) is appropriate when the governing equations are hyperbolic or parabolic.

وهناك أمثلة من الاثنين قد اعطيا هنا. نلاحظ، مع ذلك، أنه على الرغم من أن المقاطع التالية تعالج السير إلى الأمام (marching forward) بالنسبة للوقت (time), يتم تطبيق نفس التقنيات (techniques) بسهولة لحساب السريان الثابت (steady flow) حيث يتم السير المكاني (spatial marching)على طول بعض محاور التنسيق (coordinate axis). لقد رأينا في الفصل 4 أن السير إلى الأمام (forward marching) من هذا القبيل (في الزمان أو المكان) هو مناسب عندما تكون المعادلات الاساسية (governing equations) قطعية (hyperbolic) او قطعية مكافئة . (parabolic)

7.2 طريقة لاكس واندروف (The Lax- Wendroff Method)

Let us describe this method by considering a simple gas-dynamic problem, namely the subsonic-supersonic isentropic flow through a convergent-divergent nozzle, as sketched in Fig. 7.1. Here, a nozzle of specified area distribution, A=A(x), is given, and the reservoir conditions are known. Let us consider a quasi-one-dimensional solution where the flow field variables are functions of x (in the steady state). For a calorically perfect gas, the solution of this flow is classical, and can be found in any compressible flow text book (see for example Refs. [1, 2]). We use this example here only because it is an excellent vehicle for introducing and describing the time-dependent finite-difference philosophy.

دعونا نصف هذه الطريقة من خلال النظر الى مشكلة بسيطة لديناميك الغاز (gas-dynamic problem)، وهو مشكلة سريان دون سرعة الصوت – الأسرع من الصوت من

خلال فوهة متقاربة- متباعدة (subsonic-supersonic isentropic flow through a convergent-divergent nozzle)، كما رسمت في الشكل. 7.1. هنا، من فوهة توزيع منطقة محددة، A=A(x), يكون مُعطى ،و تكون ظروف الخزان (reservoir conditions) معروفة. دعونا ننظر الى حل شبه أحادي البعد (quasi-one-dimensional)، حيث متغيرات (variables) مجال السريان (flow field) مرتبطة (functions) ب x (في حالة ثابتة(steady state)). للحصول على غاز (gas) مثالي بالنسبة للسعرات الحرارية (calorically)، والحل لهذا السريان (flow) هو كلاسيكي (classical)، ويمكن العثور عليها في أي نص كتاب لانضغاط السريان (compressible flow) (انظر على سبيل المثال المرجع. [1، 2]). نستخدم هذا المثال هنا فقط لأنه وسيلة ممتازة لتعريف ووصف فلسفة الاختلاف المحدودةِ المعتمدة على وقتَ (time-dependent finite-difference philosophy).

The nozzle is divided into a number of grid points in the x-direction as shown in Fig. 7.1; the spacing between adjacent grid points is Δx . Now assume values of the flow field variables at all grid points, and consider this rather arbitrarily assumed flow as an initial condition at time t=0. In general, these assumed values will not be the exact steady-state results; indeed, the exact steady-state results are what we are trying to calculate.

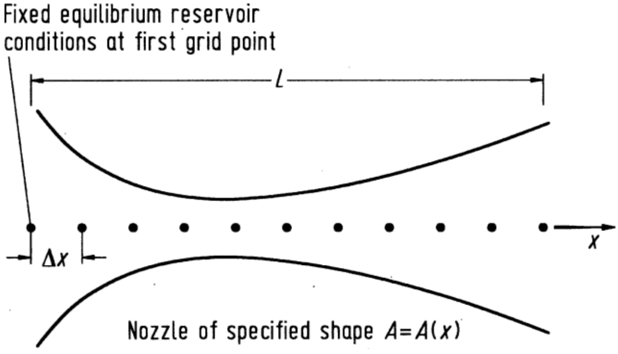
تنقسم الفوهة (nozzle) إلى عدد من نقاط الشبكة (grid points) في اتجاه x (direction), كما هو مبين في الشكل. 7.1، والتباعد (spacing) بين نقاط الشبكة المتجاورة هو Δx. لنفترض الآن قيم (values) متغيرات (variables) مجال السريان (flow field) في جميع نقاط الشبكة، والنظر في هذا السريان (flow) بصورة

تعسفية (arbitrarily) بل يفترض كشرط (condition) أولي في الزمن t = 0 بشكل عام، فإن هذه القيم لا يفترض أن تكون على وجه الدقة حالة استقرار (steady-state) للنتائج (steady-state results) ، بل على وجه الدقة حالة استقرار النتائج (steady-state results) هي ما نسعى لحسابها.

Consider a grid point, say point i. Let g_i denote a flow field variable at this point (g_i might be pressure, density, velocity, etc.). This variable g_i will be a function of time; however, we know g_i at time t=0, i.e. we know $g_i(0)$ because we have assumed values for all the flow field variables at all points at the initial time t = 0.

لنعتبر نقاط الشبكة (grid point)، ونعتبر النقطة i. و نترك g_i دلالة على متغير مجال السريان (flow field variable) عند هذه النقطة (g_i قد تكون الضغط (pressure),الكثافة (density) ,السرعة (velocity)، وغيرها). هذا المتغير g_i سوف يكون دالة الزمن (function of time)، ومع ذلك، ونحن نعلم g_i في الوقت t = 0، أي أننا نعرف $g_i(0)$ لأننا نفترض القيم لجميع متغيرات مجال السريان (flow field variables) في جميع النقاط في الوقت الاولي (the initial time) t = 0.

Fig. 7.1 Flow through a convergent-divergent nozzle



الشكل 7.1: السريان من خلال فوهة متقاربة–متباعدة

نحن نحسب الآن قيمة جديدة من g_i في وقت $t+\Delta t$ ، وانطلاقا من الشروط الأولية (initial conditions)، في المرات الأولى الجديدة $t + \Delta t = 0 + \Delta t$. هنا، Δt هو زيادة صغيرة في الوقت لمناقشتها في وقت لاحق. يتم الحصول على قيمة جديدة (new value) من g_i ، أي $g_i(t+\Delta t)$ ، من توسيع سلسلة تايلور (Taylor's series expansion) في الوقت مع مرور الوقت كما:

We now calculate a new value of gi at time t +Δt; starting from the initial conditions, the first new time is t+Δt = 0+Δt. Here, Δt is a small increment in time to be discussed later. The new value of gi, i.e. gi(t+Δt), is obtained from a Taylor's series expansion in time as time as:

$$g_i(t+\Delta t) = g_i(t) + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_i \Delta t + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)_i \frac{(\Delta t)^2}{2} + \cdots$$

or, using the standard notation of time as a superscript,

أو، باستخدام ترميز موحد بالنسبة للوقت باعتبارها مرتفع،

$$g_i^{t+\Delta t} = g_i^t + \left(\frac{\partial g}{\partial t}{}_i^t\right)\Delta t + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)_i^t \frac{(\Delta t)}{2} + \cdots \qquad (7.1)$$

Here $g_i^{t+\Delta t}$ is the value of g at grid point i and at time t +Δt; $(\partial g/\partial t)_i^t$ is the first partial of g evaluated at grid point i at time t, etc. In Eq. (7.1), g^t_i is known and Δt is specified. Therefore, we can use Eq. (7.1) to calculate $g_i^{t+\Delta t}$ if we have numbers for the derivatives $(\partial g/\partial t)_i^{t+\Delta t}$ and $(\partial^2 g/\partial t^2)_i^{t+\Delta t}$. The numbers for the derivatives are obtained from the physics of the flow as embodied in the governing flow equations. (Note that Eq. (7.1) is simply mathematics, and by itself is certainly not sufficient to solve the problem.) The governing flow equations for the quasi-one-dimensional flow through a nozzle are (14):

هنا $g_i^{t+\Delta t}$ هي قيمة g نقطة i من الشبكة في وقت t; +Δt $(\partial g/\partial t)_i^t$ هو الأول من جزئية g تقييمها في النقطة i من الشبكة في الزمن t، وما إلى ذلك في المعادلة. (7.1)، وتصبح g^t_i معروفة وΔt محددة. لذلك، يمكننا استخدام المعادلة(7.1) . لحساب $g_i^{t+\Delta t}$

لحساب $g_i^{t+\Delta t}$ إذا كان لنا أن يكون بين أرقام لمشتقات $(\partial g/\partial t)_i^{t+\Delta t}$ و فإنه $(\partial^2 g/\partial t^2)_i^{t+\Delta t}$ فإنه يتم الحصول على أرقام لمشتقات بذلك من فيزياء التدفق كما وردت في المعادلات التي تحكم التدفق. (ملاحظة أن المعادلة (7.1) هي ببساطة رياضيات، والتي في حد ذاتها بالتأكيد ليست كافية لحل المشكلة) والمعادلات التي تحكم التدفق لتدفق شبه أحادي الأبعاد من خلال فوهة هي (14):

$$\text{Continuity}: \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{A}\frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} \tag{7.2}$$

$$\text{Momentum}: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{7.3}$$

$$\text{Energy}: \quad \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\left[p\frac{\partial u}{\partial x} + pu\frac{\partial(1nA)}{\partial x} + \rho u \frac{\partial e}{\partial x}\right] \tag{7.4}$$

Note that Eqs. (7.2), (7.3) and (7.4) are written with the time derivatives on the left-hand side, and spatial derivatives on the right-hand side. For the moment, let us calculate density, i.e. g ≡ ϱ, and let us consider just the continuity equation, Eq. (7.2).Expanding the right-hand side of Eq. (7.2), we obtain

ملاحظة أن المعادلات. (7.3) ,(7.2)و (7.4)المكتوبة مع المشتقات الوقت على الجانب الأيسر، والمشتقات المكانية على الجانب الأيمن. ل هذه اللحظة، دعونا نحسب الكثافة، أي g ≡ ϱ، ودعونا ننظر فقط للمعادلة الاستمرارية، المعادلة. (7.2). توسيع الجانب الأيمن من المعادلة. (7.2)، نحصل على

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{A}\rho u\frac{\partial A}{\partial x} - u\frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (7.5)$$

At time t = 0, the flow field variables are assumed; hence we can replace the spatial derivatives with central differences:

في وقت t = 0، نفترض المتغيرات مجال تدفق، ومن هنا يمكننا استبدال المشتقات مع وجود اختلافات المكانية المركزية:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t = -\frac{1}{A}\rho_i^t u_i^t\left(\frac{A_{i+1}-A_{i-1}}{2\Delta x}\right) - u_i^t\left(\frac{\rho_{i+1}^t-\rho_{i-1}^t}{2\Delta x}\right) - \rho_i^t\left(\frac{u_{i+1}^t-u_{i-1}^t}{2\Delta x}\right) \qquad (7.6)$$

Equation (7.6) gives us a number for $(\partial \varrho/\partial t)_i^t$, which is inserted into Eq. (7.1).However, to complete Eq. (7.1), we need a number for the second partial also, namely $(\partial^2 \varrho/\partial t^2)_i^t$. To obtain this,

المعادلة (7.6) يعطينا الرقم $(\partial \varrho/\partial t)_i^t$، والتي يتم إدراجها في المعادلة. (7.1)، ولكن لإكمال المعادلة. (7.1)، نحن بحاجة الى عدد للجزئية الثاني أيضا،

differentiate the continuity equation, Eq. (7.5), with respect to time:

وهو $(\partial^2\rho/\partial t^2)^{t}_{i}$. للحصول على هذا، تفرق معادلة الاستمرارية، (7.5) .Eq، فيما يتعلق بالوقت:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = -\frac{1}{A}\left[\frac{\partial A}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\right]-u\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial t}-\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \quad (7.7)$$

Also, differentiate the continuity equation, Eq. (7.5), with respect to x:

أيضا، تفرق المعادلة الاستمرارية، المعادلة. (7.5)، بالنسبة لـx

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t\partial x} = -\frac{1}{A}\left[\rho u\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\left(\rho\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\right]-u\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \quad (7.8)$$

The procedure now works as follows:

يعمل هذا الإجراء الآن على النحو التالي:

(1) In Eq. (7.8), replace all derivatives on the right-hand side with central differences, such as

(1)في المعادلة. (7.8)، يستعاض عن المشتقات على الجانب الأيمن مع وجود اختلافات المركزية، مثل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^{t}_{i+1}-u^{t}_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u^{t}_{i+1}-2u^{t}_{i}+u^{t}_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

etc.

This now provides a number for $(\partial^2\rho/\partial t\partial x)^{t}_{i}$ from Eq. (7.8).

هذا يوفر الآن عدد لـ$(\partial^2\rho/\partial t\partial x)^{t}_{i}$ من المعادلة. (7.8).

(2) Insert this number for $(\partial^2\rho/\partial t\partial x)^{t}_{i}$ into Eq.(7.7). Also in Eq. (7.7), numbers for $\partial u/\partial t$ and $\partial^2 u/\partial x\partial t$ are obtained from a treatment of the momentum equation, Eq. (7.3), in a manner exactly the same as the continuity equation was treated above. The details will not be given here. In Eq. (7.7), a number for $(\partial\rho/\partial t)$ is already available, namely from Eq. (7.6). The net result is that we now have a number for $(\partial^2\rho/\partial t^2)^{t}_{i}$, obtained from Eq. (7.7).

(3) Insert this number for $(\partial^2\rho/\partial t^2)^{t}_{i}$ into Eq. (7.1) remembering that $g \equiv \rho$ for this case.

(4) Insert the number for $(\partial\rho/\partial t)^{t}_{i}$, obtained from Eq. (7.6), into Eq. (7.1).

(5) Every quantity on the right-hand side of Eq. (7.1) is now known. This allows the density $\rho_i^{t+\Delta t}$ to be calculated from Eq. (7.1). This is indeed what we wanted.We now have the

(2)تدرج هذا العدد ل $(\partial^2\rho/\partial t\partial x)^{t}_{i}$. في المعادلة (7.7). كما في المعادلة. (7.7)، وأرقام ل$\partial u/\partial t$ و $\partial^2 u/\partial x\partial t$ يتم الحصول على معادلة الزخم عبر علاج المعادلة. (7.3)، على نحو كان يعالج بالضبط نفس معادلة الاستمرارية أعلاه. لن تعطى تفاصيل هنا في المعادلة. (7.7)، لعدد $(\partial\rho/\partial t)$ متاحة بالفعل، وهما من المعادلة. (7.6). والنتيجة الصافية هي أن لدينا الآن عدد ل$(\partial^2\rho/\partial t^2)^{t}_{i}$ ، التي تم الحصول عليها من المعادلة.(7.7) .

(3)تضاف لهذا العدد $(\partial^2\rho/\partial t^2)^{t}_{i}$ المعادلة. (7.1) تذكر أن $\rho \equiv g$ لهذه القضية.

(4)لإدراج رقم$(\partial\rho/\partial t)^{t}_{i}$، التي تم الحصول عليها من المعادلة. (7.6)، في المعادلة. (7.1).

(5)كل كمية على الجانب الأيمن من المعادلة. (7.1) ومن المعروف الآن. هذا يسمح بحساب الكثافة $\rho_i^{t+\Delta t}$من المعادلة. (7.1). هذا هو في الواقع ما كنا نريده . والآن لدينا كثافة في النقطة i من الشبكة في الخطوة التالية في الوقت المناسب، $t+\Delta t$.

density at grid point i at the next step in time, t+Δt.

(6) Perform the above procedure at every grid point to obtain ϱ(t +Δt) everywhere throughout the nozzle.

(7) Perform the above procedure on the momentum and energy equations to obtain u(t + Δt) and e(t + Δt) everywhere throughout the nozzle. We now have the complete flowfield at time (t + Δt), obtained from theknown flowfield at time t. (Recall that the process is started at t = 0 with the assumed initial conditions.)

(8) Repeat the above process for a large number of time steps. At each time step, the flow properties at all grid points will change from one time to the next. However, at large times, these changes become very small, and a steady-state is approached. This steady-state is the desired result, and the time-dependent technique is simply a means to that end.

(6)نفذ الإجراء أعلاه عند كل نقطة في الشبكة للحصول على ϱ(t +Δt) في كل مكان في جميع أنحاء الفوهة.

(7)تنفيذ الإجراءات المذكورة أعلاه على معادلات الزخم والطاقة للحصول على u(t + Δt) and e(t + Δt) في كل مكان في جميع أنحاء الفوهة. لدينا الآن مجرى السريان كاملة في وقت(t + Δt)، تم الحصول عليها من معرفة مجرى السريان في الزمن t. (تذكر أن يتم بدء العملية في t = 0مع الظروف الأولية المفترضة.)

(8)كرر العملية المذكورة أعلاه بالنسبة لعدد كبير من خطوات الزمن. في كل خطوة زمنية، فإن خصائص التدفق في جميع نقاط الشبكة تتغير من وقت لاخر، في فترات زمنية طويلة، هذه التغييرات تصبح صغيرة جدا، ويتم التعامل مع حالة مستقرة. هذه الحالة المستقرة هي النتيجة المرجوة، وهذه التقنية المعتمدة على الزمن هو مجرد وسيلة لتحقيق هذه الغاية.

Fig. 7.2 Transient and final steady-state temperature distributions for a calorically perfect gas obtained from the present time dependent analysis, γ = 1.4

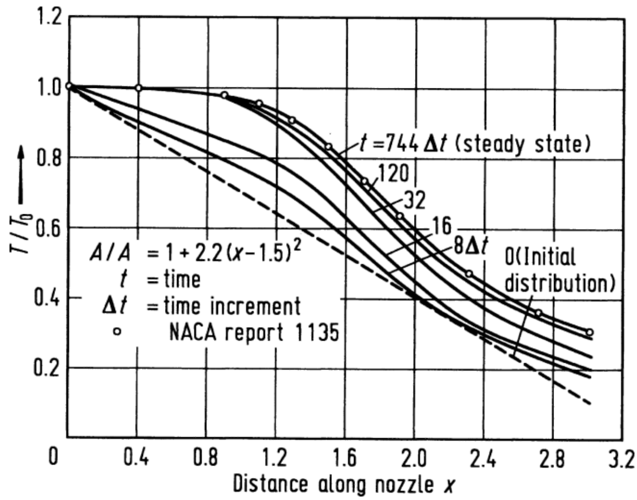


Fig. 7.2عابر والحالة النهائية المستقرة لتوزيعات درجة الحرارة للغاز بالوحدات الحرارية المثالية لذلك في الوقت الحالي يتم الحصول عليها ، γ = 1.4

The behaviour of this type of solution is illustrated in Figs. 7.2 and 7.3. In Fig. 7.2, the temperature distribution through a given nozzle is shown. The dashed line labelled t = 0 is the initially assumed values for T throughout the nozzle. The curve above it labelled 8Δt is the temperature distribution after eight time steps following the above procedure. The curves labeled 16Δt and 32Δt are similar results after 16 and 32 time steps respectively. Note that the temperature distribution has

ويتضح من سلوك هذا النوع من الحل في Figs. 7.2 and 7.3. في الشكل. 7.2، يظهر من خلال توزيع درجات الحرارة لفوهة معينة. خط متقطع المسمى t = 0 هو القيم يفترض في البداية لT في جميع أنحاء الفوهة. منحنى فوقه المسمى 8Δt هو توزيع درجات الحرارة بعد خطوة الوقت الثامنة في أعقاب الإجراء أعلاه. منحنيات المسمى 16Δt and 32Δt هي نتائج مماثلة بعد خطوات الوقت 16 and 32على التوالي. نلاحظ أن توزيع درجات الحرارة قد تغير بسرعة في التوزيع الأولي يفترض في

t = 0. في أوقات لاحقة، التغييرات تصبح أصغر؛ لاحظ أن منحنى 120Δt المسمى لا تختلف كثيرا عن 32Δt. أخيرا، وبعد 744 خطوة وقت، التغييرات تصبح صغيرة جدا لدرجة أن توزيع درجات الحرارة بشكل أساسي في حالة مستقرة. والمطلوب هذه الحالة المستقرة للحل. نلاحظ أن الحالة الثابتة التي تم الحصول عليها عدديا، تتفق تماما مع النتائج الكلاسيكية، ويمكن الحصول عليها من المراجع. [1 و 3]، ومن المرجع. [4]. الشكل. 7.3 يوضح الاختلاف في تدفق الشامل، م˙، من خلال الفوهة. الخط المتقطع هو م˙ بما يتفق مع ظروف الأولية يفترض في t = 0 منحنيات. المسمى 16Δt and 32Δt تثبت بوضوح الاختلافات غير المنتظمة في م˙ في أوقات مبكرة.

rapidly changed from the assumed initial distribution at t = 0. At later times, the changes become smaller; note that the curve labelled 120Δt is not too different from that for 32Δt. Finally, after 744 time steps, the changes are so small that the temperature distribution is essentially at a steady state. This steady state is the desired solution. Note that the numerically-obtained steady state agrees virtually perfectly with the classical results, as can be obtained from Refs. [1, 3], and from Ref. [4].Fig. 7.3 illustrates the variation of mass flow, $\dot{m}$, through the nozzle. The dashed line is the $\dot{m}$ consistent with the assumed initial conditions at t = 0. The curves labeled 16Δt and 32Δt graphically demonstrate the wild variations in $\dot{m}$ at early times.

Fig. 7.3 Transient and final steady-state mass-flow distributions for a calorically perfect gas obtained from the present time-dependent analysis, $\gamma = 1.4$

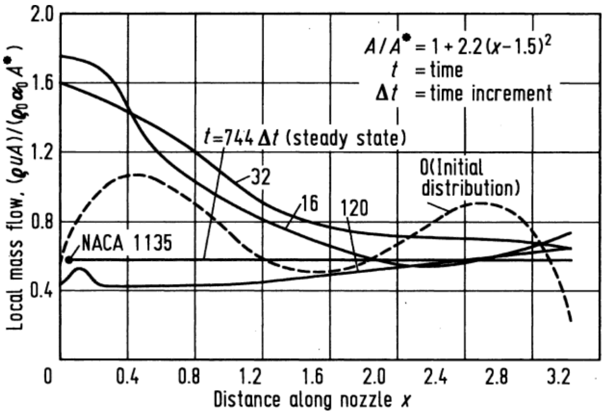


Fig. 7.3 عابر والحالة النهائية المستقرة

لتوزيعات درجة الحرارة للغاز بالوحدات الحرارية المثالية لذلك في الوقت الحالي يتم الحصول عليها ، $\gamma = 1.4$

However, after 120 time steps $\dot{m}$ has become more stable, and after 744 time steps has reached a steady state. This steady state distribution for $\dot{m}$ is a straight, horizontal line, as it should be for steady flow, where $\dot{m}$ = constant through the nozzle.Moreover, it is the correct value of mass flow, as compared to results from Ref. [4]. The method described above, utilizing Eq. (7.1), which is the first three terms of a Taylor's series expansion and where both the first and second

ومع ذلك، بعد 120 خطوة زمنية مˑ أصبحت أكثر استقرارا ، وبعد 744 خطوة زمنية قد وصلت إلى حالة مستقرة. هذا التوزيع للحالة المستقرة مˑ هي على التوالي، خط أفقي، كما ينبغي أن يكون لتدفق مستمر، حيث $\dot{m}$= المستمر (ثابت) من خلال الفجوة، هو القيمة الصحيحة من التدفق الشامل، بالمقارنة مع النتائج من المرجع. [4]. وصف الأسلوب أعلاه، وذلك باستخدام المعادلة. (7.1)، والذي هو أول ثلاثة شروط لتوسيع سلسلة تايلور Taylor's series، وحيث كل من المشتقات الجزئية الأولى والثانية في

partial derivatives in Eq. (7.1) are found by finite-differencing the spatial derivatives in the governing flow equations with central differences, is called the Lax-Wendroff method. Note that the method is of second-order accuracy, from Eq. (7.1). This method was employed with much success in the late 1960s until a more straight-forward version of the same idea was introduced by MacCormack in 1969. This is the subject of the next section. For more details about the Lax-Wendroff method as applied to the nozzle problem, see Refs. [5, 6].

المعادلة. (7.1) يتم العثور عليها من خلال الفروق المحدودة، في المشتقات المكانية في المعادلات التي تحكم التدفق مع وجود اختلافات مركزية، يتم استدعاء أسلوب .Lax- Wendroffلاحظ أن هذه الطريقة من الدرجة الثانية من الدقة، من المعادلة. (7.1). كان يعمل هذا الأسلوب بكثير من النجاح في أواخر 1960 حتى قدمت نسخة أكثر تطور في نفس الفكرة من قبل ماكورماك MacCormack في عام 1969. هذا هو موضوع الجزء التالي. لمزيد من المعلومات حول أسلوب Lax-Wendroff كما ينطبق على مشكلة فوهة، انظر الحكام. [5،6].

7.3 MacCormack's Method

MacCormack's method, first introduced in 1969 (see Ref. [7]), has been the most popular explicit finite-difference method for solving fluid flows. It is closely related to the Lax-Wendroff method, but is easier to apply. Let us use the same nozzle problem

طريقة ماكورماك (MacCormack's method)، وقدمت للمرة الأولى في عام 1969 (انظر المرجع [7])، كان طريقة فروق محدودة صريحة, الأكثر شعبية بالنسبة لحل تدفقات السوائل. ويرتبط ارتباطا وثيقا طريقة Lax-Wendroff، ولكن هو أسهل للتطبيق. دعونا نستخدم نفس المشكلة الفوهة المناقشة في الطائفة. 7.2 لتوضيح

discussed in Sect. 7.2 to illustrate MacCormack's method in the present section. MacCormack's method, like the Lax-Wendroff method, is based on a Taylor's series expansion in time. Once again, as in Sect. 7.2, let us consider the density at grid point i.

طريقة ماكورماك MacCormack's method في هذا الباب. طريقة ماكورماك، على غرار طريقة Lax-Wendroff، ويستند على التوسع سلسلة تايلور Taylor's series في الوقت المناسب. ومرة أخرى، كما هو الحال في الطائفة. 7.2، دعونا النظر في كثافة عند النقطة i.

$$\rho_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{ave} \Delta t \qquad (7.9)$$

Equation (7.9) is a truncated Taylor's series that looks first-order accurate; however, $(\partial\varrho/\partial t)_{ave}$ is an average time derivative taken between time t and t +Δt. This derivative is evaluated in such a fashion that the calculation of $\varrho_i^{t+\Delta t}$ from Eq. (7.9) becomes second-order accurate. The average time derivative in Eq. (7.9) is evaluated from a predictor-corrector philosophy as follows Predictor step. We repeat the continuity equation, Eq. (7.5), below:

المعادلة (7.9) هي اقتطاع سلسلة تايلور (Taylor's series)، والذي يبدو من الدرجة الأولى دقيق. ومع ذلك، $(\partial\varrho/\partial t)_{ave}$ هو مشتق متوسط الوقت الذي يستغرقه بين الزمن t و t + Δt. يتم تقييم هذا المشتق في مثل هذه الحالة عبر حساب $\varrho_i^{t+\Delta t}$ ذلك من المعادلة. (7.9) يصبح من الدرجة الثانية دقيقة. متوسط مشتق الوقت في المعادلة. (7.9) يتم تقييم من فلسفة التنبؤ والتصحيح كما توابع الخطوات

المتنبأة. نكرر معادلة الاستمرارية، المعادلة. (7.5)

أدناه:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{A}\rho u \frac{\partial A}{\partial x} - u\frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (7.5\ \text{repeated})$$

In Eq. (7.5), calculate the spatial derivatives from the known flow field values at time t using forward differences. That is, from Eq. (7.5),

في المعادلة. (7.5)، حساب المشتقات المكانية من القيم المعروفة لمجال التدفق في الزمن t باستخدام الاختلافات إلى الأمام. وهذا هو، من المعادلة. (7.5)،

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t = -\frac{1}{A}\left[\rho_i^t u_i^t\left(\frac{A_{i+1} - A_i}{\Delta x}\right)\right] - u_i^t\left(\frac{\rho_{i+1}^t - \rho_i^t}{\Delta x}\right) - \rho_i^t\left(\frac{u_{i+1}^t - u_i^t}{\Delta x}\right) \qquad (7.10)$$

Obtain a predicted value of density, $\bar{\rho}_i^{t+\Delta t}$, from the first two terms of a Taylor's series, as follows

الحصول على القيمة المتوقعة للكثافة، $\bar{\rho}_i^{t+\Delta t}$، من حيث التعبيرين الأولين من سلسلة لتايلور Taylor's series، على النحو التالي

$$\bar{\rho}_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t \Delta t \qquad (7.11)$$

In Eq. (7.11), ρ_i^t is known, and $(\partial\rho/\partial t)_i^t$ is a known number from Eq. (7.10);

في المعادلة. (7.11)، ρ_i^t معروفة، و$(\partial\rho/\partial t)_i^t$ هو العدد المعروف من المعادلة. (7.10)؛

Hence, $\bar{\rho}_i^{t+\Delta t}$ is readily obtained. In a similar fashion, from the momentum and energy equations, predicted values of

وبالتالي، يتم الحصول على $\bar{\rho}_i^{t+\Delta t}$ بسهولة. بطريقة مماثلة، في معادلات الزخم والطاقة، وتوقع قيمة

the other flow variables such as u $_i^{-t+\Delta t}$, e $_i^{t+\Delta t}$, etc. are obtained.

المتغيرات تدفق أخرى مثل u $_i^{-t+\Delta t}$ ، e $_i^{t+\Delta t}$ ، الخ نحصل عليها.

Corrector step Here, we first obtain a predicted value of the time derivative, $(\partial \rho/\partial t)_i^{t+\Delta t}$, by substituting the predicted values of u $_i^{-t+\Delta t}$, $\rho_i^{-t+\Delta t}$, etc. into Eq. 7.5, using rearward differences.

خطوة مصححة هنا، نحن أولا نحصل على القيمة المتوقعة لمشتقات الوقت، $(\partial \rho/\partial t)_i^{t+\Delta t}$، عن طريق استبدال القيم المتوقعة ل u $_i^{-t+\Delta t}$, $\rho_i^{-t+\Delta t}$ ، وما إلى ذلك في المعادلة. 7.5، وذلك باستخدام الخلافات المؤخرة.

$$\overline{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i}^{t+\Delta t} = -\frac{1}{A}\bar{\rho}_i^{t+\Delta t}\bar{u}_i^{t+\Delta t}\left(\frac{A_i - A_{i-1}}{\Delta x}\right) - \bar{u}_i^{t+\Delta t}\left(\frac{\bar{\rho}_i^{t+\Delta t} - \bar{\rho}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x}\right) - \bar{\rho}_i^{t+\Delta t}\left(\frac{\bar{u}_i^{t+\Delta t} - \bar{u}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x}\right) \tag{7.12}$$

Now calculate the average time derivative as the arithmetic mean between Eqs. (7.10) and (7.12), i.e.

الآن احسب متوسط مشتق الوقت الحسابي بين Eqs. (7.10) and (7.12)، أي

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{ave} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t + \overline{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i}^{t+\Delta t}\right] \tag{7.13}$$

Where numbers for the two terms on the right-hand side of Eq. (7.13) come from Eqs (7.10) and (7.12) respectively. Finally, we obtain the corrected value of $\rho_i^{t+\Delta t}$ from Eq. (7.9), repeated below:

حيث أرقام للمصطلحين على الجانب الأيمن من المعادلة. (7.13) تأتي من Eqs (7.10) and (7.12) على التوالي. وأخيرا، فإننا حصول على قيمة تصحيح ل $\rho_i^{t+\Delta t}$ من المعادلة. (7.9)، وكرر أدناه:

$$\rho_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{ave}\Delta t \qquad \text{(7.9 repeated)}$$

The above predictor–corrector approach is carried out for all grid points throughout the nozzle, and is applied simultaneously to the momentum and energy equations in order to generate $u_i^{t+\Delta t}$ and $e_i^{t+\Delta t}$.In this fashion, the flow field through the entire nozzle at time t +Δt is calculated. This is repeated for a large number of time steps until the steady state is achieved, just as in the case of the Lax Wendroff method described in Sect. 7.2.

MacCormack's technique as described above, because a two-step predictor–corrector sequence is used with forward differences on the predictor and rearward differences on the corrector, is a second-order accurate method. Therefore, it has the same accuracy as the Lax-Wendroff method described in Sect. 7.2. However, the MacCormack method is much easier to apply, because there is no need to evaluate the second time derivatives as was the case for the Lax-Wendroff method. To see this more clearly, recall Eqs. (7.7) and

يتم تنفيذ نهج التنبؤ والتصحيح أعلاه بالنسبة لجميع نقاط الشبكة في جميع أنحاء الفوهة، ويطبق في الوقت نفسه على معادلات الزخم والطاقة من أجل توليد $u_i^{t+\Delta t}$ و $e_i^{t+\Delta t}$. في هذا المجال، مجال التدفق من خلال فوهة كامل في الزمن t +Δt يتم احتسابها. ويتكرر هذا بالنسبة لعدد كبير من خطوات الوقت حتى يتم تحقيق حالة مستقرة، تماما كما هو الحال بالنسبة للطريقة Lax Wendroff وصفها في الطائفة. 7.2.

تقنية ماكورماك MacCormack's technique كما هو مذكور أعلاه، لأنه يستخدم من خطوتين تسلسل التنبؤ والتصحيح مع وجود اختلافات الأمام على التنبؤ والخلافات المؤخرة على مصحح، هو وسيلة دقيقة من الدرجة الثانية. لذلك، فإنه لديه نفس الدقة كأسلوب Lax-Wendroff التي وصفها في الطائفة. 7.2. ومع ذلك، أسلوب ماكورماك MacCormack method هو أسهل بكثير للتطبيق، لأنه ليست هناك حاجة لتقييم المشتقات الوقت الثانية كما كان الحال بالنسبة لطريقة -Lax

(7.8), which are required for the Lax-Wendroff method. These equations represent a large number of additional calculations. Moreover, for a more complex fluid dynamic problem, the differentiation of the continuity, momentum and energy equations to obtain the second derivatives, first with respect to time, and then the mixed derivatives with respect to time and space, can be very tedious, and provides an extra source for human error. MacCormack's method does not require such second derivatives, and hence does not deal with equations such as Eqs. (7.7) and (7.8).

A few comments are made with regard to the specific application to the quasi one dimensional nozzle flow shown in Fig. 7.1. At the inflow boundary (the first grid point at the left), the values of p, T and ϱ are fixed, independent of time, and are assumed to be reservoir values. The inflow velocity, which is a very small

Wendroff. لرؤية هذا أكثر وضوحا، أذكر Eqs. (7.7) and (7.8) ، وهي مطلوبة للأسلوب Lax- Wendroff. وتمثل هذه المعادلات عدد كبير من حسابات إضافية. وعلاوة على ذلك، لمشكلة ديناميكية السوائل أكثر تعقيدا، والتفريق بين الاستمرارية، والزخم والطاقة. المعادلات للحصول على المشتقات الثانية، أولا فيما يتعلق بالوقت، وبعد ذلك مشتقات مختلطة فيما يتعلق بالزمان والمكان، ويمكن أن تكون مملة للغاية، و يوفر مصدرا إضافيا للخطأ البشري. لا يتطلب طريقة ماكورماك MacCormack's technique في مثل هذه المشتقات الثانية، وبالتالي لا يتعامل مع معادلات مثل Eqs. (7.7) and (7.8).

وقدم بعض الملاحظات فيما يتعلق بتطبيق معين على شبه بعد واحد تدفق فوهة هو مبين في الشكل. 7.1. على حدود التدفق (نقطة الشبكة الأولى في اليسار)، قيم p, T وϱ يتم إصلاحها، بغض النظر عن الوقت، ويفترض أن تكون القيم الخزان. يتم

subsonic value, is calculated from linear extrapolation using the adjacent internal points, or it can be evaluated from the momentum equation applied at the first grid point using one-sided differences. At the outflow boundary (the last grid point at the right in Fig. 7.1), all the dependent variables are obtained from linear extrapolation from the adjacent internal points, or by applying the governing equations at this point, using one-sided differences.

Finally, we note that results obtained from the Lax–Wendroff method and from the MacCormack method are virtually identical. For example, these two methods are compared for a vibrationally relaxing, high temperature, non-equilibrium nozzle flow in Ref. [8]; there is no difference between the two sets of results.

حساب سرعة التدفق، والذي هو قيمة صغيرة جدا دون سرعة الصوت، عبر استخدام النقاط الداخلية المجاورة، أو يمكن تقييمها من معادلة الزخم تطبيقها عند نقطة الشبكة الأولى باستخدام الاختلافات من جانب واحد. على حدود التدفق (نقطة الشبكة الماضية في الحق في الشكل. 7.1)، ويتم الحصول على جميع المتغيرات التابعة من استقراء خطية من النقاط الداخلية المجاورة، أو من خلال تطبيق المعادلات التي تحكم في هذه المرحلة، وذلك باستخدام الاختلافات من جانب واحد.

وأخيرا، نلاحظ أن النتائج التي تم الحصول عليها من طريقة Lax-Wendroff وعن الأسلوب ماكورماك MacCormack method متطابقة تقريبا. على سبيل المثال، تتم مقارنة هاتين الطريقتين للاسترخاء الاهتزازي، ارتفاع في درجة الحرارة، وعدم توازن تدفق الفوهة في المرجع. [8]. لا يوجد فرق بين المجموعتين من النتائج.

7.4 Stability Criterionالاستقرار الفرقان

Examine Eq. (7.1), which is vital to the Lax–Wendroff method. Note that it requires the specification of a time increment, Δt. Examine Eqs. (7.9) and (7.11), which are vital to the MacCormack method. They too require the specification of a time increment, Δt. For explicit methods, the value of Δt cannot be arbitrary; rather it must be less than some maximum value allowable for stability. The time-dependent applications described in Sects. 7.2 and 7.3 are dealing with governing flow equations which are hyperbolic with respect to time. Recall our discussion in Sect. 5.4 dealing with the stability criteria for such equations. There, it was stated that Δt must obey the Courant–Friedrichs–Lewy criterion—the so-called CFL criterion. This is embodied in Eq. (5.47), which was derived from the simple model equation given by Eq. (5.42). This is the linear wave

دراسة المعادلة. (7.1)، هو أمر حيوي لطريقة Lax– Wendroff. لاحظ أنه يتطلب مواصفات لزيادة الوقت، Δt. دراسة يكس. (7.9) و (7.11) Eqs. (7.9) and (7.11) ، والتي تعتبر حيوية لطريقة ماكورماكMacCormack method . أنها تتطلب أيضا مواصفات لزيادة الوقت، Δt. للحصول على طرق واضحة، فإن قيمة Δt لا يمكن أن يكون تعسفية، بل يجب أن تكون أقل من المسموح به بنسبة للقيمة القصوى لتحقيق الاستقرار. التطبيقات التي تعتمد على الوقت التي تم وصفها في الطوائف. 7.2 و 7.3 تتعامل مع المعادلات التي تحكم التدفق التي هي القطعي (hyperbolic) فيما يتعلق بالوقت. أذكر مناقشتنا في الطائفة. 5.4 التعامل مع معايير الاستقرار لمثل هذه المعادلات. هناك، قيل إن Δt يجب أن تنصاع ل معيار–ما يسمى المعيار كورانت–فريدريكس–يوي Courant–Friedrichs–Lewy CFL. ويتجسد هذا في المعادلة. (5.47)، والتي

equation, where c is the wave propagation speed. If the wave were propagating through a gas which already has a velocity u, then the wave will travel at the velocity (u + c) relative to the stationary surroundings. For such a case, Eq. (5.47) becomes

كانت مستمدة من معادلة نموذج بسيطة التي قدمتها المعادلة. (5.42). هذه معادلة الموجة الخطية، حيث c هي سرعة انتشار الموجات. اذا تمت الموجة من خلال نشر الغاز التي لديها بالفعل سرعة u، ثم ستتحرك الموجة في سرعة (u + c) نسبة إلى المناطق المحيطة الثابتة. لمثل هذه الحالة، المعادلة. (5.47) تصبح

$$\Delta t = C\left(\frac{\Delta x}{u+c}\right); \quad C \leq 1 \qquad (7.14)$$

Where C is the Courant number, and c is the speed of sound, c = (∂p/∂ρ)s. Eq. (7.14) is the appropriate CFL criterion for the one dimensional, explicit solutions of nozzle flows discussed in Sects. 7.2 And 7.3. The CFL criterion given by Eq. (7.14) says physically that the explicit time step must be no greater than the time required for a sound wave to propagate from one grid point to the next. This author's experience has been that C should be as close to unity as possible, but depending

حيث C هو عدد كورانت Courant number ، و c هي سرعة الصوت، c =(∂p/∂ρ)s. Eq. (7.14)هو المعيار CFL المناسب للحلول أحادية الأبعاد، صريحة من فوهة التدفقات التي تم مناقشتها في الطوائف. 7.2 و 7.3. معيار CFL الذي قدمه المعادلة. (7.14) يقول جسديا أن خطوة الوقت صريحة يجب أن لا تكون أكبر من الوقت اللازم لموجة الصوت لنشر شبكة من نقطة واحدة إلى أخرى. وقد تم تجربة هذا البلاغ بأن C يجب أن تكون الأقرب امكانية إلى الوحدة، ولكن اعتمادا على التطبيق الفعلي، القيمة

upon the actual application, the maximum allowable value of C for stability in explicit time dependent finite difference calculations can vary from approximately 0.5–1.0. Keep in mind that the stability criteria exemplified by Eqs. (5.47) and (7.14) are based on analysis of linear equations. On the other hand, the governing equations for a general fluid flow are highly non-linear. Therefore, we would not expect the CFL criteria to apply exactly to such cases; instead, it provides a reasonable estimate of Δt for a given non-linear problem, and as a result the value of the Courant number in Eq. (7.14) can be viewed as an adjustable parameter to compensate for such non-linearities. Return for a moment to the nozzle flow application discussed in Sects. 7.2 and 7.3. Here, at any given time t, Eq. (7.14) is evaluated at each grid point throughout the flow. Because u and c vary with x, then the local value of Δt

القصوى للاستقرار المتاحة ل C في الوقت الصريح تعتمد على حسابات الفرق المحدودة يمكن أن تختلف من حوالي 0.5-1.0. نأخذ في الاعتبار أن معايير الاستقرار تتضح من Eqs. (5.47) and (7.14) تستند إلى تحليل المعادلات الخطية. من ناحية أخرى، فإن المعادلات التي تحكم تدفق السوائل العام هي خطية غير عالية. لذلك، لن نتوقع معايير CFL للتطبيق بالضبط لمثل هذه الحالات؛ بدلا من ذلك، فإنه يوفر تقدير معقول للΔt لمشكلة غير خطية معينة، ونتيجة لذلك قيمة الرقم كورانت Courant number في المعادلة. (7.14) يمكن أن ينظر إليها باعتبارها عامل متغير في التجربة قابلة للتعديل adjustable parameter للتعويض عن تلك غير التخطيطية. العودة لحظة لتطبيق تدفق فوهة مناقشتها في الطوائف. 7.2 و 7.3. هنا، في أي وقت من الأوقات t ، المعادلة. (7.14) يتم تقييم في كل نقطة في الشبكة في جميع أنحاء التدفق. لأن u and c تختلف مع x، ثم القيمة المحلية لΔt المرتبطة بكل نقطة الشبكة ستكون

associated with each grid point will be different from one point to the next. The value of Δt actually employed in Eqs. (7.1) and (7.9) to advance the flow field through the next step in time should be the minimum Δt calculated over all the grid points.

[Some CFD applications have employed the 'local time step method', wherein the local values of Δt are used at each grid point in Eqs. (7.1) and (7.9). In this case, the transient variations calculated over many time steps do not hold physically; a type of 'time-warped' flow field is developed, where all the new flow variables calculated for a subsequent time step actually pertain to different total values of time. This 'local time step method' frequently results in a faster convergence to the steady state, that is, fewer total time steps are required to obtain the steady state. On the other hand, the calculated transients have no physical meaning, and some

مختلفة من نقطة إلى أخرى. قيم Δt يعملون فعلا في يكس. (7.1) و (7.9) Eqs. (7.1) and (7.9) للمضي قدما في مجال تدفق من خلال الخطوة التالية في الوقت المناسب يجب أن يكون الحد الأدنى لΔt محسوبة على جميع نقاط الشبكة.

[بعض التطبيقات CFD قد استخدمت " طريقة خطوة الوقت المحلي"، حيث يتم استخدام القيم المحلية من Δt في كل نقطة الشبكة في يكس. (7.1) و (7.9)Eqs. (7.1) and (7.9) . في هذه الحالة، فإن الاختلافات العابرة the transient variations محسوبة على العديد من خطوات الوقت لا يخفون فيزيائيا. تم تطوير نوع من مجال تدفق "مشوه الوقت"، حيث كل متغيرات التدفق الجديدة المحسوبة لخطوة لاحقة تتعلق بالوقت فعلا للقيم الإجمالية المختلفة من الزمن. هذه " طريقة خطوة الوقت المحلي' نتائج كثيرا في التقارب أسرع اقترابا إلى حالة مستقرة، وهذا هو، هناك حاجة ل أقل مجموع خطوات الوقت للحصول على حالة مستقرة. من ناحية أخرى، احتساب العابرين ليس لها أي معنى فيزيائي، وبعض خبراء CFD

يتساءل علنا عن الدقة الشاملة لمثل هذا الأسلوب، حتى بالنسبة للنتائج الحالة المستقرة النهائية.]

CFD experts wonder openly about the overall accuracy of such a method, even for the final steady state results.]

وأخيرا، نلاحظ أن لتدفق اثنين أو ثلاثة أبعاد، امتدادا من المعادلة. (7.14) هو:

Finally, we note that for a two or three-dimensional flow, an extension of Eq. (7.14) is:

$$\Delta t = \mathrm{Min}(\Delta t_x, \Delta t_y) \tag{7.15a}$$

where

$$\Delta t_x = C \frac{\Delta x}{u + c} \tag{7.15b}$$

and

$$\Delta t_y = C \frac{\Delta y}{v + c} \tag{7.15c}$$

7.5 تطبيقات مختارة من تقنيات المعتمدة على الزمن صريح (Explicit Time-Dependent Technique)

والغرض من هذا القسم هو لتوضيح بعض التطبيقات لهذه التقنية الواضحة، نعتمد الوقت الموضح في الأقسام السابقة من هذا الفصل. هذه التطبيقات تحتوي على العديد من ميزات CFD التي نوقشت طوال هذه الملاحظات.

The purpose of this section is to illustrate some applications of the explicit, time dependent technique described in the previous sections of this chapter. These applications contain many of the CFD features that have been discussed throughout these notes.

7.5.1 Non-equilibrium Nozzle Flows

References [5,6,8] represent the first application of the time-dependent technique to vibrational and chemical non-equilibrium nozzle flows. A purely steady flow analysis of such flows, which involves forward marching from the reservoir to the exit of the nozzle, encounters a saddle-point singularity at the nozzle throat. This singularity greatly complicates steady-state numerical solutions of the flow. On the other hand, as first demonstrated in Refs. [5,6], the time-dependent numerical solution circumvents such problems in the throat region, and therefore constitutes a relatively straightforward numerical solution of such flows. The analysis of vibrational non-equilibrium nozzle flows requires the inclusion of a vibrational rate equation, such as

المراجع [5،6،8] تمثل أول تطبيق لهذه التقنية المعتمدة على الزمن للذبذبات وكيميائية فوهة التدفقات غير المتوازن. تحليل بحتي للتدفق المستمر في هذه التدفقات، والذي ينطوي قدما بمسيرة من الخزان للخروج من الفوهة، واجه التفرد سرج نقطة في الحلق فوهة. هذا التفرد يعقد إلى حد كبير الحالة المستقرة للحلول العددية للتدفق. من ناحية أخرى، أول تفسير في الحكام. [5،6]، والحل العددي المعتمد على الزمن تلتف مثل هذه المشاكل في منطقة الحلق، ويشكل ذلك حلا عدديا بسيطا نسبيا للتحليل مثل هذه الذبذبات في سريان فوهة التدفقات غير المتوازن يتطلب إدراج من معادلة معدل الذبذبات، مثل

$$\frac{\partial e_{\text{vib}}}{\partial t} = \frac{1}{\tau}[(e_{\text{vib}})_{\text{eq}} - e_{\text{vib}}] - u\frac{\partial e_{\text{vib}}}{\partial x} \tag{7.16}$$

Where e_vib is the local non-equilibrium value of molecular vibrational energy per unit mass of gas, $(evib)_{eq}$ is the local equilibrium value, and τ is the vibrational relaxation time which is a function of local p and T. The analysis of chemical non equilibrium nozzle flows requires the inclusion of species continuity equations— one for each chemical species present in the gas —which are of the form

حيث e_vib هو قيمة محلية غير متوازنة لطاقة الذبذبات في وحدة الكتلة الجزيئية للغاز، $(evib)_{eq}$ هي القيمة التوازن المحلي، وτ هو وقت استرخاء الذبذبات التي هي وظيفة p المحلية وT. التحليل الكيميائي لتدفقات الفوهة غير المتوازنة يتطلب إدراج الأنواع لمعادلات الاستمرارية – واحد لكل الأنواع الكيميائية الموجودة في الغاز– والتي هي من النموذج

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} = \dot{w}_i - u\frac{\partial \eta_i}{\partial x} \tag{7.17}$$

Where η_i is the mole–mass ratio (moles of species i per unit mass of mixture), and w_i is the rate of formation (or extinction of species i) due to finite-rate chemical reactions. The form of w_i involves chemical rate constants and the local concentrations of the chemical species. For an introductory development of Eqs. (7.16) and (7.17), see Chaps. 13 and 14 of Ref. [3]. Note that, in the same vein as Eqs. (7.2), (7.3) and (7.4),

حيث ηi هي نسبة الخلد الشامل mole–mass ratio (مولات moles الأنواع في وحدة كتلة i من خليط)، وw_iهو معدل تكوين rate of formation (أو انقراض الأنواع i) بسبب التفاعلات الكيميائية المحدودة الصرف finite-rate. شكل w_i ينطوي الثوابت الكيميائية ومعدل تركيز المحلية من الأنواع الكيميائية. لتطوير التمهيدي من المعادلات. (7.16) و (7.17)، انظر الفصول. 13 و 14

من المرجع. [3]. نلاحظ أنه، وعلى نفس المنوال المعادلات. (7.2)، (7.3) و (7.4) ويكس. Eqs (7.16) و (7.17) مكتوبة في شكل مشتق الوقت على الجانب الأيسر، والمشتقات المكانية على الجانب الأيمن. في المقابل، يتم حساب المتغيرات غير المتوازية evib و ηi في الخطوات من الوقت في نفس منوال ,ρ u and e من المعادلات. (7.2)، (7.3) و (7.4). في الواقع، من أجل الحل المعتمد على الزمن غير المتوازن لتدفقات الفوهة يكس.Eqs (7.2)، (7.3) (7.4)، (7.16) و (7.17)، تحل بنفس الطريقة في كل خطوة إلى جانب الوقت كما هو موضح في الطوائف. 7.2 و 7.3. ومع ذلك، هناك قيد واحد إضافي للاستقرار الناجم عن الظواهر غير المتوازن. ل الحلول الصريحة من التدفقات غير المتوازنة، بالإضافة إلى معيار CFL التي نوقشت في الفرع 7.4، يجب أن تكون قيمة Δt أيضا أقل من الوقت المخصص ل أسرع معدل محدود يجري في النظام. وهذا هو

Eqs. (7.16) and (7.17) are written in the form of a time derivative on the left-hand side, and spatial derivatives on the right-hand side. In turn, the nonequilibrium variables evib and ηi are calculated in steps of time in the same fashion as ρ, u and e from Eqs. (7.2), (7.3) and (7.4). Indeed, for the time-dependent solution of non-equilibrium nozzle flows, Eqs (7.2), (7.3) (7.4), (7.16) and (7.17) are coupled, and are solved in the same coupled fashion at each time step as described in Sects. 7.2 and 7.3. However, there is one additional stability restriction brought about by the non-equilibrium phenomena. For explicit solutions of non equilibrium flows, in addition to the CFL criterion discussed in Sect. 7.4, the value of Δt must also be less than the characteristic time for the fastest finite rate taking place in the system. That is

$$\Delta t < B\Gamma$$

حيث $\Gamma = \tau$ لذبذبات عدم التوازن، $\Gamma = (\partial w_i/\partial \eta_i)^{-1}$ هو وقت الاسترخاء الكيميائي الفعال. (وانظر الحكام [5، 6] لمزيد من التفاصيل) لهذه المشكلة، تحول الشبكة أمر غير ضروري، والحيز الفيزيائي والحاسوبي هي واحدة في داخل نفسه.

Where $\Gamma = \tau$ for vibrational non-equilibrium, and $\Gamma = (\partial w_i/\partial \eta_i)^{-1}$ which is an effective chemical relaxation time. (See Refs. [5, 6] for more details.) For this problem, no grid transformation is necessary; the physical and computational planes are one-in-the-same.

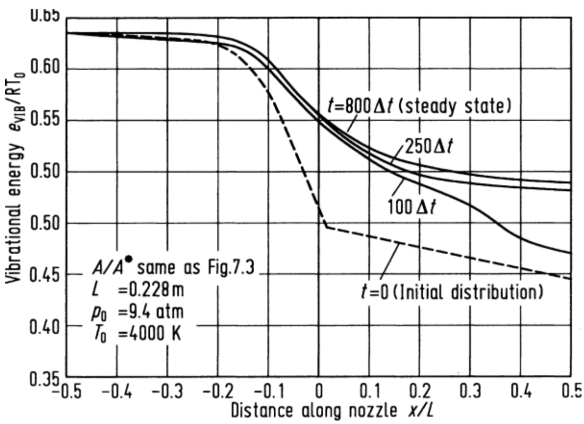


Fig. 7.4 Transient and final steady-state evib distributions for the non-equilibrium expansion of N2 obtained from the present time-dependent analysis

الشكل. 7،4 عابر و حالة الاستقرار الأخيرة لتوزيعات evib للتوسع غير المتوازن ل N2 تم الحصول عليها من التحليل المعتمدة على الزمن الحاضر

وتظهر النتائج التي تم الحصول عليها نموذجية مع تقنية تعتمد على الوقت LAX-Wendroff في الشكل. 7.4 و 7.5، من المرجع. [5]. ويتضح حالة

Typical results obtained with the Lax–Wendroff time-dependent technique are shown in Figs. 7.4 and 7.5, from Ref. [5]. The case of the vibrational non-equilibrium expansion of pure N2 is illustrated in Fig. 7.4. Here, the time-dependent nature of the non-equilibrium value of evib as a function of distance through the nozzle is shown. The dashed line represents the assumed initial distribution at t = 0. Several intermediate distributions, after 100 and 250 time steps, are shown, along with the final steady state after 800 time steps. A different case, namely that of the non equilibrium chemically reacting expansion of dissociated oxygen, is illustrated in Fig. 7.5. Here, the dashed line represents the initially assumed variation of the mass fraction of atomic oxygen through the nozzle at t = 0. Several intermediate curves after 100 and 400 time steps are shown, along with the final, converged steady state after 2800 time steps. This final steady state distribution agrees well with an earlier steady flow solution carried out by Hall and Russo

التوسع غير المتوازن للذبذبات ل N2 النقي في الشكل. 7.4. هنا، يظهر طبيعة المعتمدة على الزمن من قيمة غير متوازنة ل evib بوصفها وظيفة من المسافة من خلال الفوهة. خط متقطع يمثل التوزيع الأولي المفترضة في T = 0. توزيعات المتوسطة بعد 100 و 250 خطوة ، وتظهر، جنبا إلى جنب مع حالة ثابتة للخطوات النهائية بعد 800 خطوة زمن. وهناك حالة مختلفة مشتقة، وهي ان من عدم التوازن الكيميائي يرد توسيع نشر الأكسجين، في الشكل. 7.5. هنا، خط متقطع يمثل الاختلاف يفترض في البداية من جزء من كتلة الأكسجين الذري من خلال فوهة في T = 0. وتظهر منحنيات وسيطة بعد 100 و 400 خطوة زمنية، جنبا إلى جنب مع المباراة النهائية، تقارب ل حالة مستقرة بعد 2800 خطوة زمنية. هذا النهائي التوزيع ل حالة مستقرة يتفق تماما مع حل تدفق مطرد في وقت سابق قام بها هال وروسو Hall and Russo [9]، والذي يظهر كالدوائر الصلبة في الشكل. 7.5

[9], which is shown as the solid circles in Fig. 7.5.

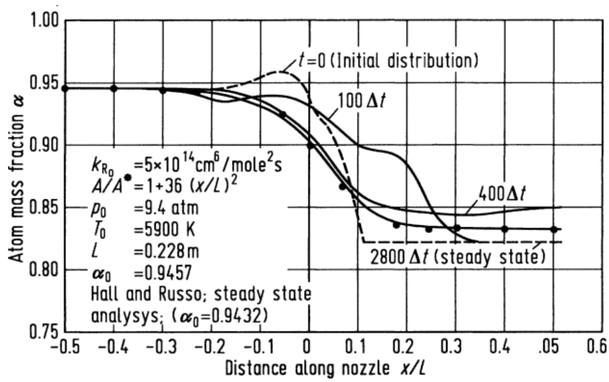


Fig. 7.5 Transient and final steady-state atom mass fraction distributions for the non-equilibrium expansion of dissociating oxygen obtained from the present time-dependent method; the steady state distribution is compared with the steady-flow analysis of Ref. [9]

الشكل. 7.5 حالة استقرار توزيعات جزء كتلة الذرة العابرة والأخيرة لتوسيع عدم متوازن النأي الأكسجين لذلك تم الحصول عليها من طريقة تعتمد على الوقت الحالي؛ وبالمقارنة توزيع الحالة مطرد مع تحليل تدفق مستمر من المرجع. [9]

7.5.2 Flow Field over a Supersonic Blunt Body

We assume inviscid flow; hence the governing flow equations are represented by Eq. (2.65) with U, F, G, and H given by the inviscid expressions in Sect. 2.9. For the present case, body forces are negligible and hence $J = 0$.The physical plane is shown at the top of Fig. 7.6; the curve BC is the body and curve AD is the shock wave. The x-coordinates of the shock and body are given by s and b respectively. The local shock detachment distance is given by $\delta = s-b$. During the time-dependent solution, the body is stationary, hence b = b(y). However, the shock wave will change shape and location with time, hence s = s(y, t). Therefore,

ونحن نفترض تدفق غير لزج. وبالتالي يتم تمثيل المعادلات التي تحكم التدفق بواسطة المعادلة. (2.65) مع U ، F، G، H التي قدمتها التعبيرات غير اللزجة في الطائفة. 2.9. لهذه القضية، قوات الجسم تكاد لا تذكر، وبالتالي يظهر J = 0 .التخطيط الفيزيائي في الجزء العلوي من الشكل. 7.6. BCمنحنى الجسم ومنحنى AD هو موجة صدمة. يتم إعطاء الإحداثيات X من الصدمة والجسم عن طريق s and b على التوالي. ونظرا لمسافة صدمة الانفصال المحلية التي كتبها δ = s–b. خلال الحل الذي يعتمد على الوقت، الجسد ثابت، وبالتالي b = b(y). ومع ذلك، فإن موجة صدمة تغيير شكل ومكان مع مرور الوقت، وبالتالي s = s(y, t). لذلك،

$$\delta(y,t) = s(y,t) - b(y) \tag{7.18}$$

The computational plane (ξ, η) is shown in Fig. 7.6b, and is obtained from the transformation

الحيز الحاسوبي (ξ، η) هو مبين في الشكل. 7.6b، ويتم الحصول عليها من التحول

$$\xi = \frac{x-b}{\delta}; \qquad \eta = y;\ \tau = t \tag{7.19}$$

Where δ is obtained from Eq. (7.18). Note that this transformation is an example of a boundary-fitted coordinate system as discussed in Sect. 5.5. Typical results, obtained from Ref. [10], are shown in Figs. 7.7, 7.8 and 7.9.

These results were obtained using the Lax–Wendroff method. In Fig. 7.7, the time dependent wave motion is illustrated, starting from its initially assumed value of t = 0, and progressing to its steady state shape and location after 500 time steps. The time variations of the centreline wave velocity and the stagnation point pressure are shown in Figs. 7.8 and 7.9 respectively. Note in all three Figs. 7.7, 7.8 and 7.9, that the most rapid changes occur at early times, and the steady state is approached rather asymptotically at large times.

حيث يتم الحصول على δ من المعادلة. (7.18). لاحظ أن هذا التحول هو مثال على نظام احداثيات الحدود المجهزة كما نوقش في الطائفة. 5.5 النتائج نموذجي ، تم الحصول عليها من المرجع. [10]، وتظهر في الشكل. 7.7، 7.8 و 7.9.

تم الحصول على هذه النتائج باستخدام طريقة Lax–Wendroff. في الشكل. 7.7، ويتضح من موجة الحركة التي تتغير مع الوقت، بدءا من قيمتها المفترضة في البداية t = 0، وتتقدم على شكل حالة مستقرة، بعد 500 خطوة وقت. وتظهر اختلافات الوقت ل منتصف centreline موجة السرعة و نقطة الركود الضغط stagnation point pressure في الشكل. 7.8 و 7.9 على التوالي. نلاحظ في كل الأشكال الثلاثة. 7.7، 7.8 و 7.9، أن أكثر التغيرات السريعة تحدث في العصور الأولى، واقترب من حالة مستقرة بدلا مقارب في بعض الأحيان.

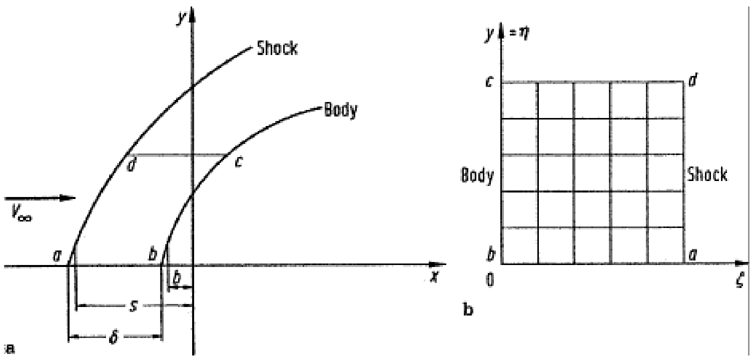


Fig. 7.6 Coordinate system for the blunt body problem

Fig. 7.7 Time-dependent shock wave motion, parabolic cylinder, $M_\infty = 4$

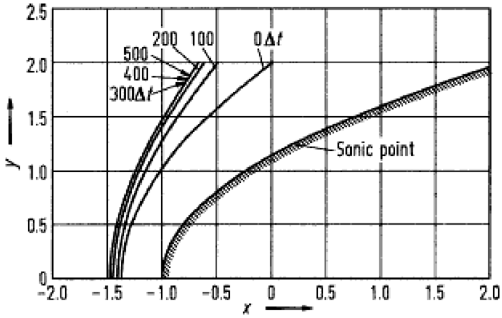


Fig. 7.8 Time variation of wave velocity; parabolic cylinder, $M_\infty = 4$

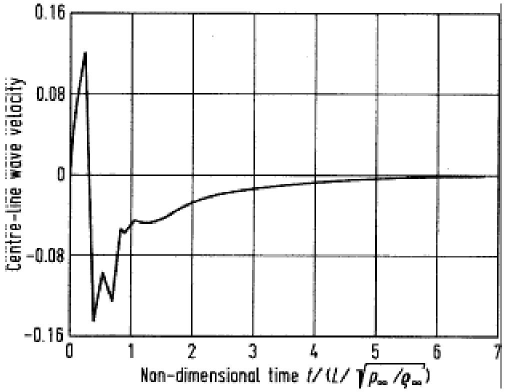
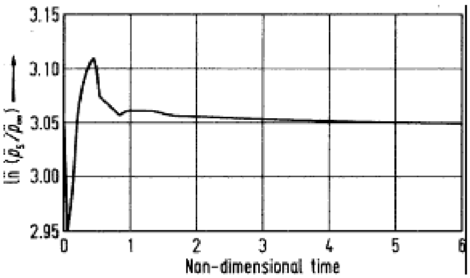


Fig. 7.9 Time variation of stagnation point pressure; parabolic cylinder, $M_\infty = 4$



7.5.3 Internal Combustion Engine Flows

Consider the flow inside an internal combustion engine as modelled by the pistoncylinder geometry shown in Fig. 7.10. The

النظر في التدفق داخل محرك الاحتراق الداخلي والتي على غرار هندسة مكبس الأسطوانة piston cylinder المبين في الشكل. 7.10. المكبس يتحرك صعودا وهبوطا داخل الاسطوانة، والتدفق يدخل من خلال صمام السحب والمخارج من خلال صمام أمان exhaust valve. مجال التدفق في هذه المشكلة هو متقلب حقا، والهدف من ذلك حساب هذا التدفق غير المستقر من خلال هذه التقنية المعتمدة على الزمن. هنا، لا يتم الحصول على أي وقت مضى أي حالة مقاربة ثابتة، بل يتم احتساب تدفق دوري تكرار المجال على مدى دورة مدتها أربع أشواط كاملة من الضغط، الطاقة، و العادم. سننظر تدفق غير لزج inviscid، وبالتالي هي التي تحكم المعادلات المعادلة. (2.65) و U، F، G، H ناقلات العمود من الطائفة 2،9 ويستخدم لحدود المجهزة لسريان غير لزج. نظام الإحداثيات، حيث تحول هو

$$\xi = x/H(t); \eta - y, \tau = t$$

الشكل. 7،10 هندسة IC اسطوانة مكبس ثنائي الأبعاد نموذج متحرك يظهر ترتيب الشبكة (أ) المكبس وضعه علىTDC ، 17 × 10نقاط الشبكة متباعدة

piston moves up and down inside the cylinder, and the flow enters through the intake valve and exits through the exhaust valve. The flow field in this problem is truly unsteady, and the objective is to calculate this unsteady flow by means of the time-dependent technique. Here, no asymptotic steady state is ever obtained; rather, a repeatable cyclic flow field is calculated over the complete four-stroke cycle of intake, compression, power and exhaust. We will consider inviscid flow, and hence the governing equations are Eq. (2.65) and the U, F, G, and H column vectors from Sect. 2.9 for an inviscid flow. A boundary-fitted coordinate system is used, where the transformation is

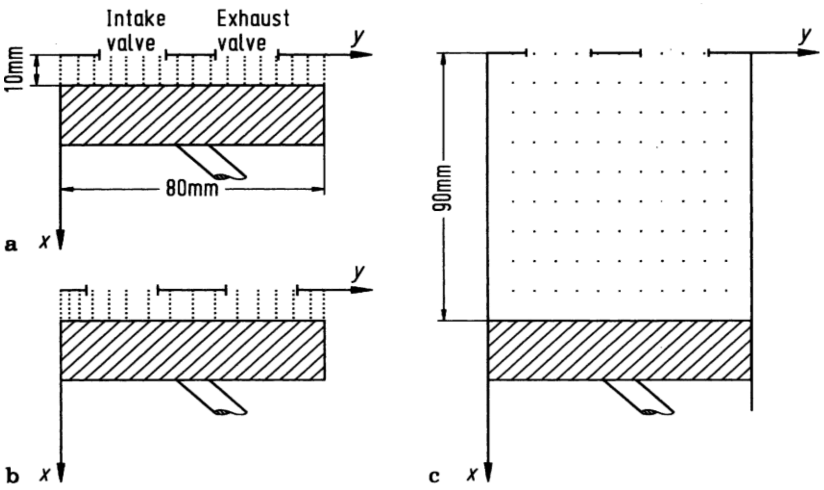
$$\xi = x/H(t); \eta - y, \tau = t$$

Fig. 7.10 Geometry of two-dimensional cylinder-piston I.C. engine model showing grid arrangement.(a) Piston positioned at TDC, 10 × 17

بشكل موحد؛ (ب) وضعه على المكبس TDC، 10 × 17 نقاط الشبكة متباعدة بنسب مختلفة (فقط في اتجاه(Y-))، (ج) وضع المكبس في BDC، 10 × 17 نقاط الشبكة متباعدة بشكل موحد

uniformly spaced grid points; (b) Piston positioned at TDC, 10 × 17 variably spaced grid points (only in y-direction); (c) Piston positioned at BDC, 10×17 uniformly spaced grid points

Fig. 7.10



وحيث H (t) هي مسافة زمنية تتراوح بين الجزء العلوي من الاسطوانة والجزء العلوي من المكبس. نلاحظ في الشكل. 7،10 تظهر أن احداثيات x على طول المحور العمودي للاسطوانة، والإحداثيات Y هي في الاتجاه شعاعي عبر الاسطوانة لهذا التدفق في الشكل. 7،11، 7،12، 7،13 و 7.14، مأخوذة من المرجع. [11]. ويتم الحل باستخدام

and where H(t) is the time-varying distance between the top of the cylinder and the top of the piston. Note in Fig. 7.10 that the x coordinate is along the vertical axis of the cylinder, and the y-coordinate is in the radial direction across the cylinder.Results for this flow are shown in Figs. 7.11, 7.12, 7.13 and 7.14, taken from Ref. [11]. The solution is carried out using

MacCormack's technique as described in Sect. 7.3. Figures 7.11, 7.12, 7.13 and 7.14 shows the flow field associated with bottom dead centre of the intake stroke, three locations of the piston during the compression stroke, near bottom dead centre of the power stroke, and an intermediate location of the exhaust stroke, respectively. Note that a circulatory flow is created during the intake stroke, and that this circulatory flow persists throughout the four stroke cycle.

تقنية ماكورماك MacCormack's technique على النحو المبين في الفرع 7.3. أرقام 7،11، 7،12، 7،13 7،14 وإظهار حقل التدفق المرتبط بمركز امتصاص الحركة المتكررة، ثلاثة مواقع للمكبس خلال تكرار ضغط، بالقرب من مركز الطاقة، والموقع الوسيط من خروج الضربة، على التوالي. لاحظ أن يتم إنشاء دورة التدفق أثناء تناول امتصاص الضربة، وأن دورة هذا التدفق استمرت طوال دورة.

7.5.4 Supersonic Viscous Flow over a Rearward-Facing Step With Hydrogen Injection

Consider the two-dimensional supersonic viscous flow over a rearward facing step, where H2 is injected into the flow downstream of the step as sketched in Fig. 7.15. Unlike the examples mentioned above, this case deals with the solution of the complete Navier–Stokes Equations, given by Eq. (2.65)

النظر في تدفق لزج ثنائي الأبعاد الأسرع من الصوت على مدى المؤخرة التي تواجه الخطوة، حيث يتم حقن H2 في تدفق المصب أن الخطوة رسمت في الشكل. 7،15. على عكس الأمثلة المذكورة أعلاه، تتناول هذه القضية في حل المعادلات نافيير ستوكس Navier–Stokes كاملة، التي قدمتها المعادلة.

with the U, F and G column vectors given in essence in Sect. 2.9 for viscous flow. This system is slightly modified for the presence of mass diffusion, which adds a diffusion term in the energy equation, and adds another equation, namely, the species continuity equation with diffusion terms. (See Refs. [12, 13] for more details.) The numerical technique used here is MacCormack's method discussed in Sect. 7.3. The present calculations were made on a uniform grid throughout the physical space. In combination with the rectangular geometry already existing in the physical plane (as can be seen by examining Fig. 7.15), this means that no grid transformation is needed.

Typical results obtained from Refs. [12, 13] are given in Figs. 7.16, 7.17, 7.18 and 7.19. In Fig. 7.16, a velocity vector diagram is shown for the case with no H2 injection. The external Mach number is 2.19, and the Reynolds

(2.65) مع U، F وG ناقلات العمود الواردة في جوهر الفرع. 2،9 لتدفق لزج. يتم تعديل هذا النظام قليلا لوجود نشر الشامل، الذي يضيف مصطلح نشرها في معادلة الطاقة، ويضيف معادلة أخرى ، وهما معادلة الاستمرارية مع الأنواع النشر. (انظر الحكام. [12، 13] لمزيد من التفاصيل.) هذه التقنية تستخدم العددية هنا طريقة ماكورماك MacCormack's method المناقشة في الطائفة. 7.3.الحسابات الحالية الموجودة على الشبكة الموحدة في جميع أنحاء الحيز الفيزيائي. في تركيبة مع هندسة مستطيلة الموجودة بالفعل في الحيز الفيزيائي (كما يمكن أن يرى من خلال دراسة الشكل 7.15)، وهذا يعني أن لا حاجة لتحويل الشبكة.

نتائج نموذجية تم الحصول عليها من الحكام. [12، 13] وترد في الشكل. 7،16، 7،17، 7.18 و7.19 . في الشكل. 7،16، يظهر رسم تخطيطي لناقل السرعة في حال عدم حقن H2. عدد ماخ Mach number الخارجي 2.19، وعدد رينولدز

Reynolds number على أساس ارتفاع الخطوة 70,000. وتشمل هذه الحسابات أيضا نموذجا الاضطراب على غرار تلك ل بالدوين ووماكس Baldwin and Lomax [14]. لاحظ إعادة تدوير التدفق المفصول فقط لمصب الخطوة. الشكل 7.17 هو مخطط ناقل السرعة مع حقن H2.

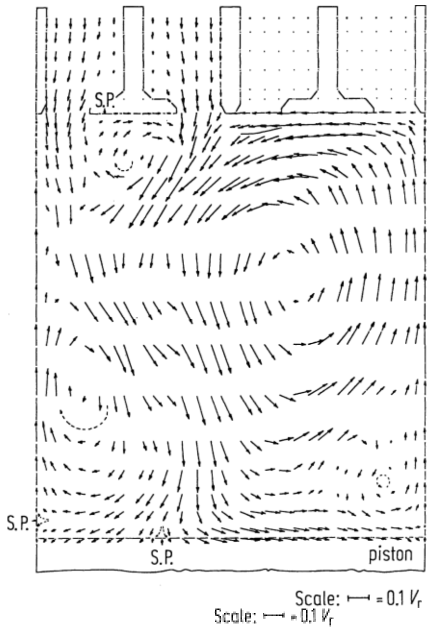
وينظر الآن إعادة تدوير التدفقات المفصولة بين الخطوة وتدفق H2، بالإضافة كما المصب من التدفق. الشكل 7،18 يظهر عدد ماخ Mach number لحدود التدفق (خطوط رقم ماخ الثابتة constant Mach number). الرقم 7.19 يوضح معالم ثابتة جزء H2 الشامل، وهذا الرقم يعمل على تحديد مدى وشكل تدفق طائرة.

number based on step height is 70,000. These calculations also include a turbulence model patterned after that of Baldwin and Lomax [14]. Note the recirculating separated flow just downstream of the step. Figure 7.17 is a velocity vector diagram with H2 injection.

Recirculating separated flows are now seen between the step and the H2 jet, as well as downstream of the jet. Figure 7.18 shows a Mach number contour plot of the flow (lines of constant Mach number). Figure 7.19 illustrates the contours of constant H2 mass fraction; this figure serves to define the extent and shape of the jet flow.

Fig. 7.11 Velocity pattern on the intake stroke.

X∗p = 8.78,CA = 161∘,t = 8.95msec = 3080Δt,22×30mesh



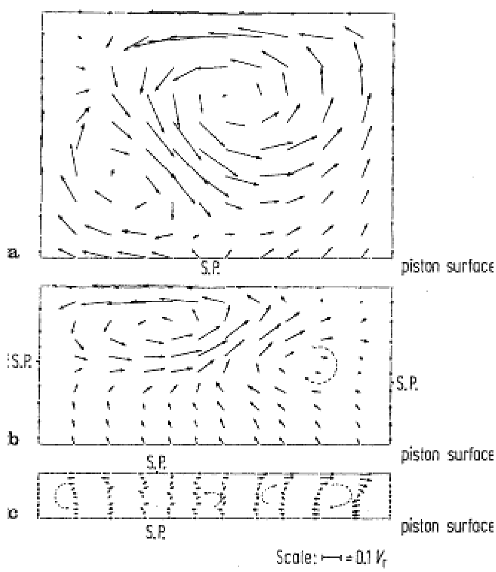


Fig. 7.12 Velocity distributions on compression stroke for the manifold-valve-engine model, 12 × 12 mesh. **(a)** $X_p^* = 5.63$, CA = 261°, $t = 14.5$ msec = 3970 Δt; **(b)** $X_p^* = 3.56$, CA = 291°, $t = 16.2$ msec = 4250 Δt; **(c)** $X_p^* = 1.0$, CA = 359°, $t = 19.9$ msec = 6300 Δt

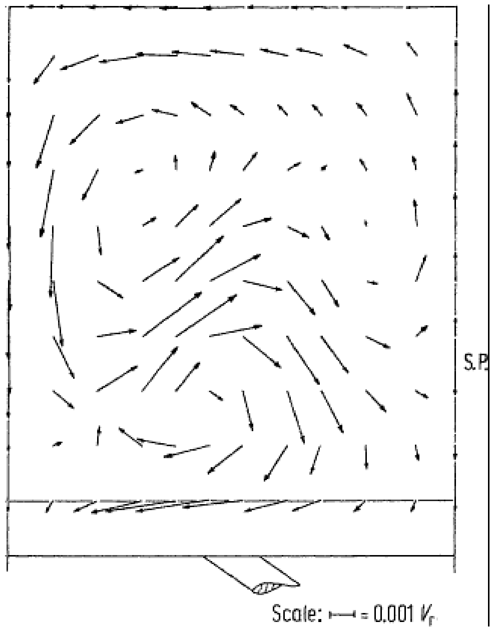


Fig. 7.13 Velocity pattern near end of power stroke; $X_p^* = 8.99$, CA = 539°, $t = 29.9\,\text{msec} = 9950\,\Delta t$

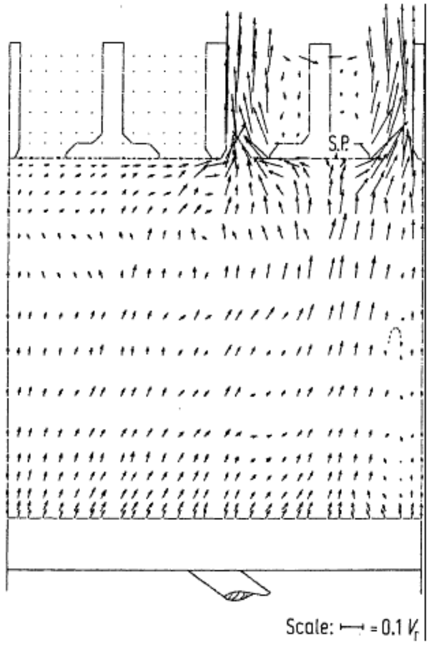


Fig. 7.14 Velocity distribution on exhaust stroke; $X_p^* = 6.99$, CA = 600°, $t = 33.3$ msec = 11560 Δt, 30 × 22 mesh

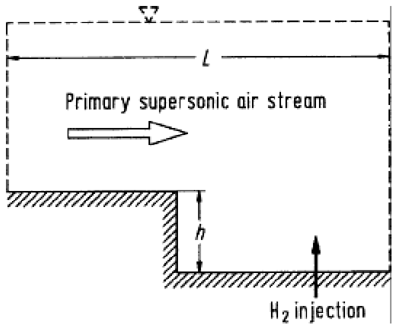


Fig. 7.15 Rearward facing step geometry

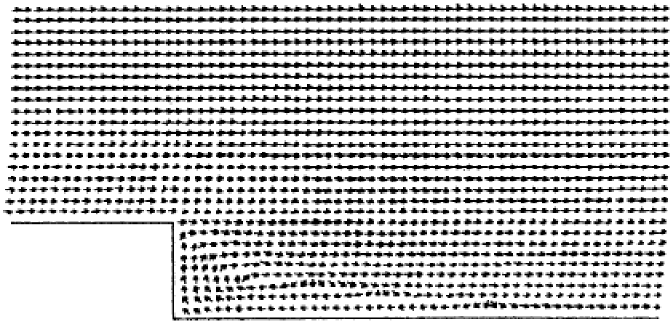


Fig. 7.16 Velocity vectors with no H_2 injection

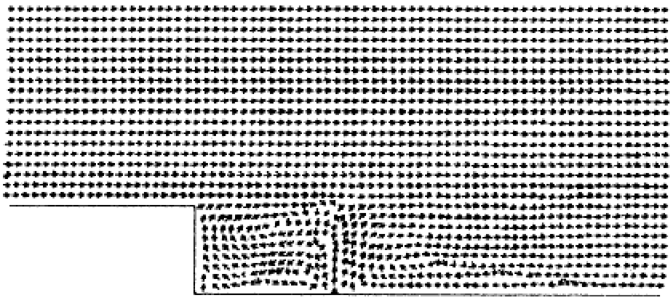


Fig. 7.17 Velocity vectors with H_2 injection

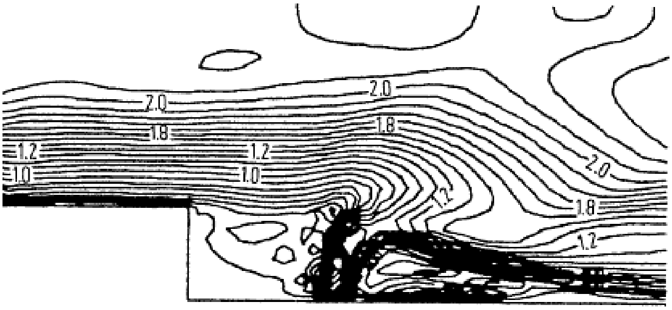


Fig. 7.18 Lines of constant Mach number with H_2 injection

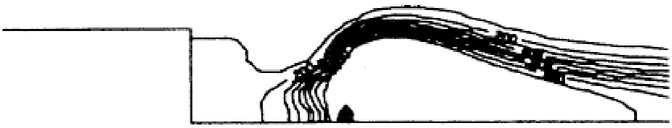


Fig. 7.19 Lines of constant H_2 mass fraction

7.5.5 Supersonic Viscous Flow over a Base

In a somewhat related fashion, consider the supersonic viscous flow over a base, as illustrated in Fig. 7.20. Here, the same viscous flow equations are used as discussed in Sect. 7.5.4 above. However, for this calculation a stretched grid is used, as given in detail in Sect. 6.4, and as shown in Fig. 6.4. Again, MacCormack's technique is used. Some sample

بطريقة ذات صلة إلى حد ما، والنظر في تدفق الصوت لزج لأكثر من قاعدة، كما هو موضح في الشكل. 7،20. هنا، يتم استخدام نفس معادلات التدفق اللزج كما نوقش في الفرع. 7.5.4 أعلاه. ومع ذلك، لهذا الحساب يستخدم شبكة تمتد، على النحو الوارد بالتفصيل في الفرع. 6.4، وكما هو مبين في الشكل. 6.4. مرة أخرى، تقنية ماكورماك MacCormack's technique هي المستخدمة. بعض نتائج العينة من الحكام[15،16]. وترد في الشكل. 7،21 7،22 والتي لا تتعامل مع أي حقن ثانوي في القاعدة. الشكل 7.21 يوضح الرسم التخطيطي لناقل السرعة لحالة مع عدد ماخ Mach number الخارجي من 2.25 وعدد رينولدز Reynolds number من 477 000 استنادا إلى ارتفاع القاعدة. لاحظ إعادة تدوير المصب تدفق فصل من القاعدة. الشكل 7.22 يوضح معالم الضغط المستمر في التدفق، و تعتبر موجة التوسع قاب قوسين أو أدنى مع إعادة الضغط على وينظر بشكل واضح المصب صدمة للقاعدة المصب من قاعدة بوضوح. الأشكال 7،23 و 7.24 تظهر نفس النوع من النتائج، باستثناء الآن لحالة حقن الهواء من وسط القاعدة. نلاحظ أن يغير الحقن كثيرا في حقل التدفق، كما يمكن أن يرى في المقارنة مع الشكل. 7، 21 و 7،22.

results from Refs. [15, 16] are given in Figs. 7.21 and 7.22, which deal with no secondary mass injection at the base. Figure 7.21 shows the velocity vector diagram for the case with an external Mach number of 2.25 and a Reynolds number of 477 000 based on the height of the base. Note the recirculating separated flow downstream of the base. Figure 7.22 illustrates the contours of constant pressure in the flow; the expansion wave around the corner and the recompression shock downstream of the base are clearly seen. Figures 7.23 and 7.24 shows the same type of results, except now for the case of air injection from the centre of the base. Note that injection greatly changes the flow field, as can be seen in comparison with Figs. 7.21 and 7.22.

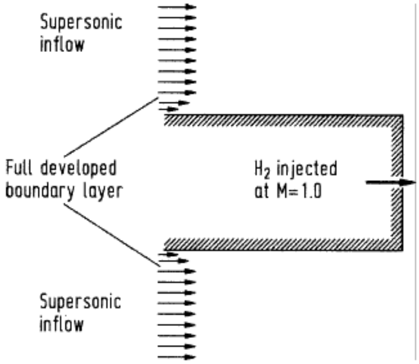
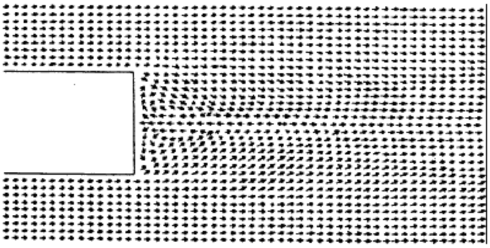


Fig. 7.20 Base flow with mass injection

Fig. 7.21 Velocity vectors with no base injection



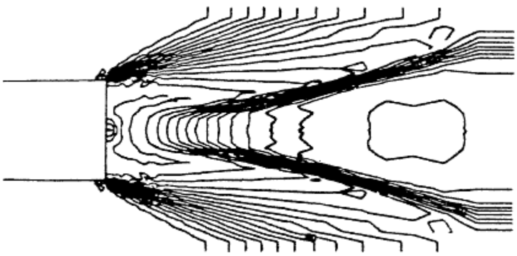


Fig. 7.22 Lines of constant pressure with no base injection

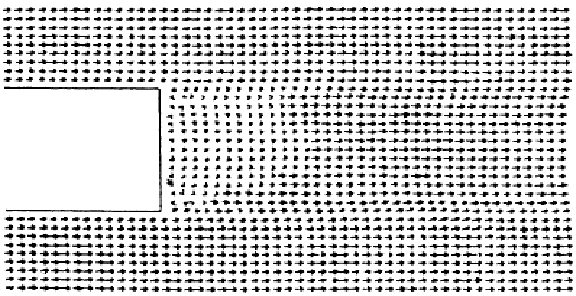


Fig. 7.23 Velocity vectors with injection from the center of the base

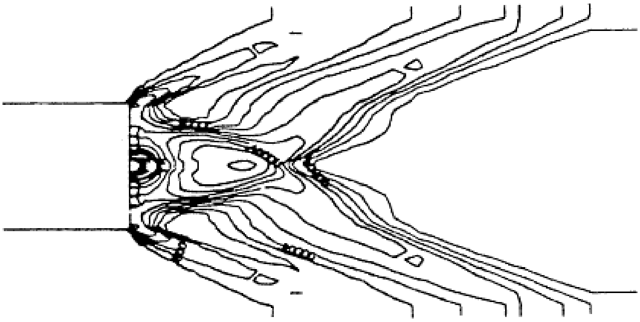


Fig. 7.24 Lines of constant pressure with injection from the center of the base

In recent years, some modern texts on CFD have been published (Refs. [19–23]); these texts are recommended for advanced studies of the subject. In particular, Fletcher's two volumes (Refs. [19, 20]) Contain a nice theoretical discussion of the subject. Of special note are the two volumes by Hirsch (Refs. [21, 22;([these volumes represent an authoritative presentation of the mathematical and numerical fundamentals of CFD, the modern techniques used in CFD, and how these techniques are used in various practical applications. Reference [23], by Hoffmann, is a crisp presentation of CFD for use by engineers.

All of these books are recommended for more advanced study of computational fluid dynamics. Also, for an extended presentation of the elementary, introductory ideas contained in the present book, as well as a lengthy discussion of the overall philosophy of CFD and its role in modern engineering, see the book by the present author (Ref. [24]); this is written for a senior-level undergraduate course in CFD, and assumes absolutely no prior knowledge of the subject. This author wishes you happy reading, and happy computing in your further expeditions into the world of computational fluid dynamics.

في السنوات الأخيرة، وقد تم نشر بعض النصوص الحديثة على CFD (المراجع [19-23])؛ ينصح بهذه النصوص للدراسات المتقدمة في هذا الموضوع. على وجه الخصوص، مجلدي فليتشر Fletcher (المراجع. [19، 20]) تحتوي على مناقشة جيدة نظرية للموضوع. من ملاحظة خاصة هي مجلدين من قبل هيرش Hirsch (المراجع [21، 22].)، وهذه الكميات تمثل عرضا رسميا لأساسيات الرياضية والعددية للCFD، والتقنيات الحديثة المستخدمة في CFD، وكيفية استخدام هذه التقنيات في مختلف التطبيقات العملية. إشارة [23]، من خلال هوفمان Hoffmann، هو عرض هش من CFD للاستخدام من قبل المهندسين. ويوصى جميع هذه الكتب لمزيد من الدراسة المتقدمة لديناميكيات السوائل الحسابية. أيضا، لعرض موسع للابتدائية والأفكار التمهيدية الواردة في هذا الكتاب، فضلا عن مناقشة مطولة للفلسفة العامة للCFD ودورها في مجال الهندسة الحديثة، راجع كتاب من قبل المؤلف الحالي (المرجع [24])؛ هذا هو مكتوب لدورة الجامعيين على مستوى رفيع في CFD، ويفترض على الإطلاق أي معرفة مسبقة للموضوع. يتمنى لك هذا الكاتب قراءة سعيدة، والحوسبة سعيدة في مزيد من البعثات الخاصة بك في عالم ديناميات الموائع الحسابية.

7.5.6 References

1. Anderson, John D., Jr., Fundamentals of Aerodynamics, 2nd Edition McGraw-Hill, New York, 1991.

2. Anderson, John D., Jr., 'Computational Fluid Dynamics—An Engineering Tool?' in A.A. Pouring (ed.), Numerical Laboratory Computer Methods in Fluid Dynamics, ASME, New York, 1976, pp. 1–12.

3. Anderson, J.D., Jr., Modern Compressible Flow: With Historical Perspective, 2nd Edition McGraw-Hill, New York, 1990.

4. Ames Research Staff, 'Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow,' NACA Report 1135, 1953.

5. Anderson, J.D. Jr., 'A Time-Dependent Analysis for Quasi-One-Dimensional Nozzle Flows with Vibrational and Chemical Nonequilibrium,' NOLTR 69-52, Naval Ordnance Laboratory, White Oak, MD, 1969.

6. Anderson, J.D., Jr., 'A Time-Dependent Analysis for Vibrational and Chemical Nonequilibrium Nozzle Flows,' AIAA Journal, Vol. 8, No. 3, March 1970, pp. 545–550.

7. MacCormack, R.W., 'The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering,' AIAA Paper No. 69–354, 1969.

8. Anderson, J.D., Jr., 'Time-Dependent Solutions of Nonequilibrium Nozzle Flow—A Sequel,' AIAA Journal, Vol. 5, No. 12, Dec. 1970. pp. 2280–2282.

9. Hall, J.G. and Russo, A.L., 'Studies of Chemical Nonequilibrium in Hypersonic Nozzle Flows,' AFOSR TN 59-1090, Cornell Aeronautical Laboratory Report AD-1118-A-6, November 1969.

10. Anderson, J.D., Jr., 'On Hypersonic Blunt Body Flow Fields Obtained with a Time-Dependent Technique,' NOLTR 68–129, Naval Ordnance Laboratory, White Oak, MD, August 1968.

11. Dallospedale, C.L., 'A Numerical Solution for the Two-Dimensional Flowfield in an Internal Combustion Engine with Realistic Valve-Geometry,' M.S. Thesis, Department of Aerospace Engineering, University of Maryland, College Park, MD, 1978.

8 الأحجام المحدودة (Finite volumes)

8.1 نظرة عامة

Finite Volume Methods are based on a discretization of the integral forms of the conservation equations:

وتعتمد طرق حجم محدود على تفريد من الأشكال لا يتجزأ من المعادلات المحافظة:

$$\frac{d}{dt}\int_{CV}\rho\phi dV + \underbrace{\int_{CS}\rho\phi\,(\vec{v}.\vec{n})dA}_{\text{Advective (convective) fluxes}} = \underbrace{-\int_{CS}\vec{q}_{\phi}.\vec{n}\;dA}_{\text{Other transports (diffusion, etc)}} + \underbrace{\sum\int_{CV}s_{\phi}\;dV}_{\text{Sum of sources and sinks terms (reactions, etc)}}$$

In our examples, we will work with:

في الأمثلة لدينا

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)}\rho\phi dV + \int_{S(t)}\rho\phi\,(\vec{v}.\vec{n})dA = -\int_{S(t)}\vec{q}_{\phi}.\vec{n}\;dA + \int_{V(t)}s_{\phi}\;dV$$

Where *V*(*t*) is any discrete control volume. We will assume for now that they don't vary in time: *V*(*t*)=*V*

حيث V (*t*) أي التحكم في مستوى الصوت منفصلة. فإننا نفترض الآن أنها لا تختلف مع الوقت: V (*t*) = V

To integrate discrete CV equation:

لدمج المعادلة CV منفصلة

$$\frac{d}{dt}\int_{V}\rho\phi dV + \int_{S}\rho\phi\,(\vec{v}.\vec{n})dA = -\int_{S}\vec{q}_{\phi}.\vec{n}\;dA + \int_{V}s_{\phi}\;dV$$

A "time-marching method" needs to be used to integrate $\Phi = \int_V \rho\phi dV$ to the next time step(s)

"طريقة الوقت السائر" يحتاج إلى استخدامها لدمج $\Phi = \int_V \rho\phi dV$ إلى الخطوة القادمة (أو الخطوات)

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\phi dV = \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\phi dV = \frac{d\Phi}{dt}$$

Total flux estimate F_{ϕ} required at the boundary of each CV

إجمالي تقديرات التدفق F_ϕ المطلوبة في حدود كل CV

Total source term must be integratec

$$\int_S \vec{F}_\phi.\vec{n}\, dA = \int_S \rho\phi\,(\vec{v}.\vec{n})dA + \int_S \vec{q}_\phi.\vec{n}\, dA$$

e.g. F_ϕ = advection + diffusion fluxes

$$S_\phi = \int_V s_\phi\, dV$$

Hence cons. eqn. becomes:

$$\frac{d\Phi}{dt} + \int_S \vec{F}_\phi.\vec{n}\, dA = S_\phi$$

يجب أن تكون متكاملة الكلي على المدى المصدر (مجموع المصادر) على كل CV $S_\phi = \int_V s_\phi\, dV$

وبالتالي سلبيات. ؤ. يصبح:

$$\frac{d\Phi}{dt} + \int_S \vec{F}_\phi.\vec{n}\, dA = S_\phi$$

These needs lead to basic elements of a FV scheme, but we need to relate ø and **Φ.**

هذه الاحتياجات تؤدي إلى العناصر الأساسية لمخطط FV، ولكن نحن بحاجة إلى ربط ø وΦ.

"Time-marching method" for CV equation:

"طريقة الوقت–السائر " لمعادلة CV:

$$\frac{d\Phi}{dt} + \int_S \vec{F}_\phi.\vec{n}\, dA = S_\phi$$

$$\frac{d\Phi}{dt} + \int_S \vec{F}_\phi.\vec{n}\, dA = S_\phi$$

The average of ø over a CV cell

$$\boxed{V\frac{d\bar{\Phi}}{dt} + \int_S \vec{F}_\phi.\vec{n}\, dA = S_\phi}$$

متوسط ø فوق خلية CV

$$\boxed{V\frac{d\bar{\Phi}}{dt} + \int_S \vec{F}_\phi.\vec{n}\, dA = S_\phi}$$

Total/Net flux through CV boundary is sum of integrals:

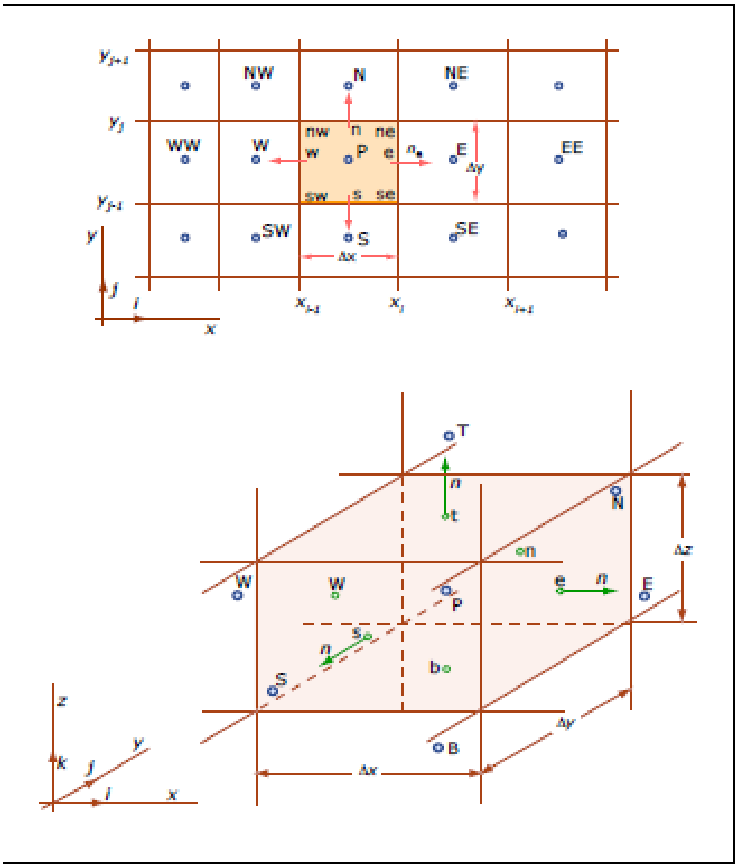
$$\int_S \vec{F}_\phi.\vec{n}\, dA = \sum_k \int_{S_k} f_\phi\, dA$$

إجمالي / صافي تدفق من خلال السيرة الذاتية الحدود هو مجموع التكاملات:

$$\int_S \vec{F}_\phi . \vec{n}\, dA = \sum_k \int_{S_k} f_\phi \, dA$$

To compute surface integral, ø is needed everywhere on surface, but $\bar{\Phi}$ only known at nodal (CV center) values

لحساب السطح المتكامل، وهناك حاجة ø في كل مكان على السطح، ولكن $\bar{\Phi}$ لا يعرفها إلا في العقدي (مركز CV) القيم



1D surfaces (2D CV)

- Goal: estimate

$$F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA$$

- Simplest approximation: midpoint rule (2nd order)

السطوح 1D (2D CV)

- الهدف: تقدير

$$F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA$$

- أبسط تقريب:

– *Fe* is approximated as a product of the integrand at cell-face center (itself approximation of mean valu... over surface) and the cell-face a...

$$F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA = \bar{f}_e S_e = f_e S_e + O(\Delta y^2) \approx f_e S_e$$

– Since *fe* is not available, it has to be obtained by interpolation

Another 2nd order approximation: Trapezoid rule

– F_e is approximated as:

$$F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA \approx S_e \frac{(f_{ne} + f_{se})}{2} + O(\Delta y^2)$$

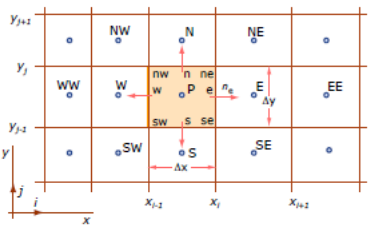
– In this case, it is the fluxes at the corners f_{ne} and f_{se} that need to be obtained by interpolation

Higher-order approximation of surface integrals require more than 2locations

– Simpson's rule (4th order approximation):

$$F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA \approx S_e \frac{(f_{ne} + 4 f_e + f_{se})}{6} + O(\Delta y^4)$$

Values needed at 3 locati...



قاعدة نقطة المنتصف (ثاني أمر)

– ويقترب *Fe* كمنتج من الكمية المتكاملة في مركز الخلية وجه

نفسه تقريب قيمة متو)

– منذ *fe* غير متوفرة، فإنه لابد من الحصول عليها عن طريق

الاستيفاء

آخر أجل تقريب 2: حكم شبه منحرف

– ويقترب F_e على النحو التالي:

– في هذه الحالة، فمن تدفقات في زوايا f_{ne} و f_{se} التي تحتاج

إلى الحصول عليها عن طريق الاستية

العليا تقريب التكاملات سطح تتطلب أكثر من 2locations

– حكم سمبسون (أجل التقريب الرابع):

القيم اللازمة في 3 مواقع

– للحفاظ على دقة جزءا لا يتجزأ: على سبيل المثال استخدام

متعددو الحدود مكعب لتقدير ه

– To keep accuracy of integral: e.g. use cubic polynomials to estimate these values from $\bar{\Phi}_P$'s nearby

Goal: estimate $F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA$ for 3 D CV.

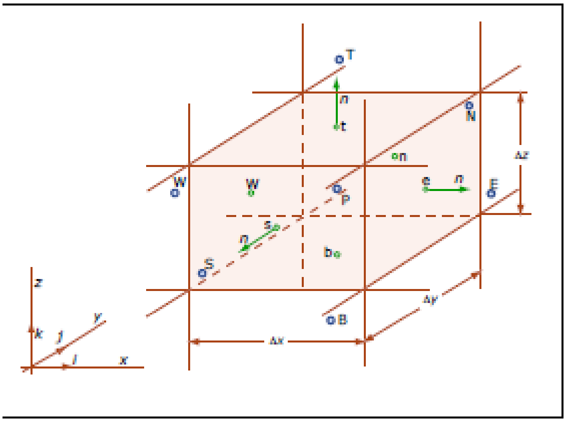
• Simplest approximation: still the midpoint rule (2nd order)

– Fe is approximated as:

$$F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA \approx S_e f_e \quad + O(\Delta y^2, \Delta z^2)$$

• Higher-order approximation possible but more complicated to implement for 3D CV

• Integration easy if variation of *fe* over 2D surface is assumed to have specific easy shape to integrate, e.g. 2D polynomial interpolation, then integration



الهدف: تقدير $F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA$ ل 3 D CV.

• أبسط تقريب: لا تزال قاعدة نقطة المنتصف (أمر 2nd)

– ويقترب الحديد على النحو التالي:

• النظام العالي تقريب ممكن ولكن أكثر تعقيدا لتنفيذ ل 3D CV

• التكامل السهل إذا يفترض الاختلا

أن يكون شكل معين سهل لدمج، على سبيل المثال 2D

الاستيفاء متعدد الحدود، ثم التكامل

• الهدف: تقدير $S_\phi = \int_V s_\phi \, dV$

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{V} \int_V \rho \phi \, dV$$

- أبسط تقريب: المنتج من حجم CV مع القيمة المتوسطة من الكمية المتكاملة (يقترب من القيمة في مركز العقدة P)

– يقترب S_P على النحو التالي:

$$S_P = \int_V s_\phi \, dV = \bar{s}_P V \approx s_P V$$

- إذا تطابق S_P هو ثابت أو الخطية داخل CV
- الترتيب الثاني على خلاف ذلك
- تتطلب العالي أجل تقريب أكثر من المواقع من مجرد مركز
- ارتفاع تقريبية من اجل:

– يتطلب $\bar{\Phi}$ القيم في مواقع أخرى من P

– حصل إما عن طريق التحريف القيم العقدية أو باستخدام وظائف شكل / متعددة الحدود

- النظر في القضية 2D (حجم لا يتجزأ من سطح يتجزأ) باستخدام وظائف الشكل

– ثنائي التربيعية وظيفة الشكل يؤدي إلى أجل التقريب الرابع (9 معاملات)

- Goal: estimate

$$S_\phi = \int_V s_\phi \, dV$$

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{V} \int_V \rho \phi dV$$

- Simplest approximation: product of CV volume with the mean value of the integrand (approximated by the value at the center of the node P)

– S_P approximated as:

$$S_P = \int_V s_\phi \, dV = \bar{s}_P V \approx s_P V$$

- Exact if S_P is constant or linear within CV
- 2nd order accurate otherwise
- Higher order approximation require more locations than just the center
- Higher order approximations:

– Requires $\bar{\Phi}$ values at other locations than P

– Obtained either by interpolating nodal values or by using shape functions/ polynomials

• Consider 2D case (volume integral is a surface integral) using shape functions

– 9 معاملات التي تم الحصول عليها بواسطة *s(x,y)* المناسب إلى 9 مواقع عقدة (مركز، زوايا، المتوسط)،

– Bi-quadratic shape function leads to a 4^{th} order approximation (9 coefficients)

– للشبكة الديكارتية Cartesian grid ، وهذا يعطي:

$$s(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy + a_6 x^2 y + a_7 xy^2 + a_8 x^2 y^2$$

سوى أربع

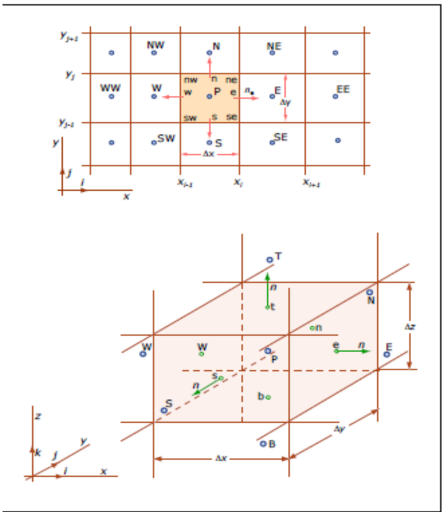
– 9 coefficients obtained by fitting *s(x,y)* to 9 node locations (center, corners, middles)

تعتمد على القيم العقدية 9

– For Cartesian grid, this gives:

$$S_P = \int_V s_\phi \, dV = \Delta x \, \Delta y \left[a_0 + \frac{a_3}{12}\Delta x^2 + \frac{a_4}{12}\Delta y^2 + \frac{a_8}{144}\Delta x^2 \, \Delta y^2 \right]$$

Only four coefficients (linear dependences cancel), but they still depend on the 9 nodal values



• 2D سبيل المثال الحالة، تابع

– للشبكة الديكارتية Cartesian grid موحدة، واحد يحصل على 2D لا يتجزأ بوصفها وظيفة من القيم العقدية 9:

• 2D case example:

– For a uniform Cartesian grid, one obtains the 2D integral as a function of the 9 nodal values:

$$S_P = \int_V s_\phi \, dV = \frac{\Delta x \, \Delta y}{36}\left[16 s_P + 4 s_s + 4 s_n + 4 s_w + 4 s_e + s_{se} + s_{sw} + s_{ne} + s_{nw}\right]$$

منذ القيمة ا

أقحم الحصول على قيم في مواقع السطح

يجب أن يكون 4 على الأقل من أجل الاستيفاء دقيق للاحتفاظ أجل التقريب المتكامل

Since only value at node P is available, one must interpolate to obtain values at surface locations

Has to be at least 4th order accurate interpolation to retain order of integral approximation

• حالة 3D:

– تقنيات مشابهة لحالة 2D: أكثر من أجل التقريب الرابع بمد مباشرة

– للطلب العالي

• الصيغ تقريب متكاملة هي أكثر تعقيدا

• الاستيفاء من القيم العقدة هي أكثر تعقيدا

• 3D case:

– Techniques are similar to 2D case: above 4th order approx directly extended

– For Higher Order

- Integral approximation formulas are more complex
- Interpolation of node values are more complex

Approx. of Surface/Volume Integrals: Classic symbolic formulas

- Surface Integrals $F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA$
  - 2D problems (1D surface integrals)
    - Midpoint rule (2nd order): $F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA = \overline{f}_e S_e = f_e S_e + O(\Delta y^2) \approx f_e S_e$
    - Trapezoid rule (2nd order): $F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA \approx S_e \dfrac{(f_{ne} + f_{se})}{2} + O(\Delta y^2)$
    - Simpson's rule (4th order): $F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA \approx S_e \dfrac{(f_{ne} + 4 f_e + f_{se})}{6} + O(\Delta y^4)$
  - 3D problems (2D surface integrals)
    - Midpoint rule (2nd order): $F_e = \int_{S_e} f_\phi \, dA \approx S_e f_e \quad + O(\Delta y^2, \Delta z^2)$
    - Higher order more complicated to implement in 3D
- Volume Integrals: $S_\phi = \int_V s_\phi \, dV$, $\overline{\Phi} = \dfrac{1}{V} \int_V \rho \phi dV$
  - 2D/3D problems, Midpoint rule (2nd order): $S_P = \int_V s_\phi \, dV = \overline{s}_P \, V \approx s_P \, V$
  - 2D, bi-quadratic (4th order, Cartesian): $S_P = \dfrac{\Delta x \, \Delta y}{36} [16 s_P + 4 s_s + 4 s_n + 4 s_w + 4 s_e + s_{se} + s_{sw} + s_{ne} + s_{nw}]$

2.29 Numerical Fluid Mechanics PFJL Lecture 18, 19

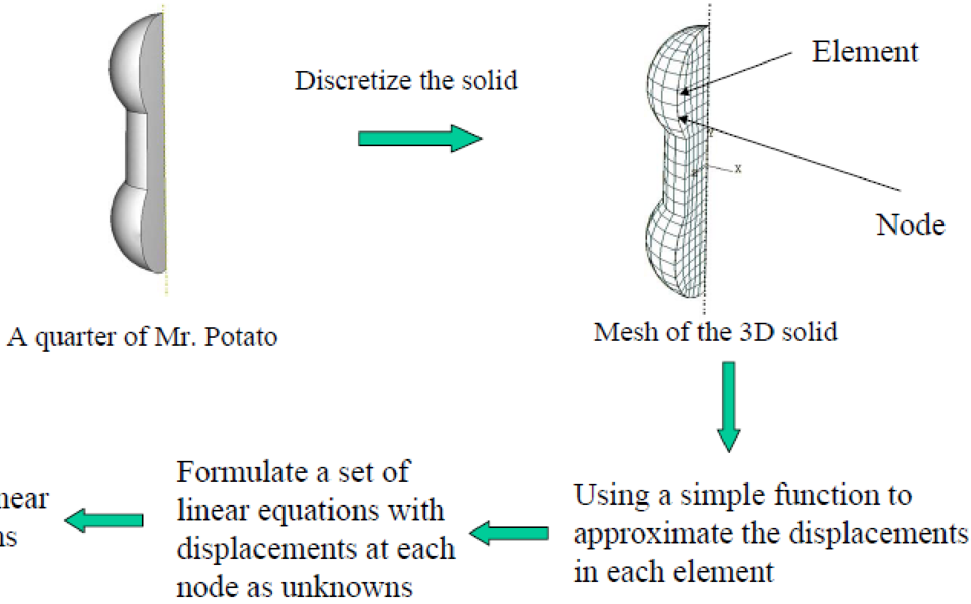
19

9 العناصر المحدودة:

9.1 مدخل الى العناصر المحدودة (Finite elements)

We have to discrete equation to apply the finite element method.

علينا أن المعادلة منفصلة لتطبيق طريقة العناصر المحدودة.



We know equation but we can't solve it.

ونحن نعرف المعادلة ولكن لا يمكننا حلها.

With:

مع:

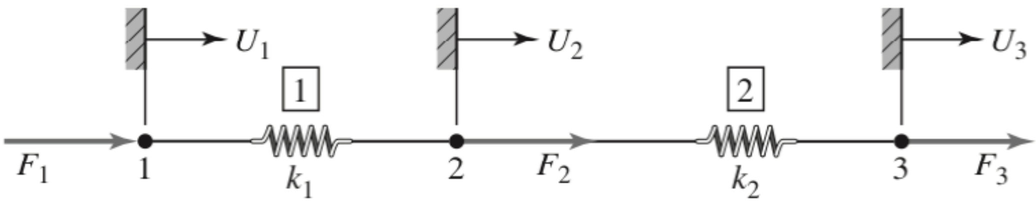
$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{F}\}$$

Property — Behavior — Action

Unknown

	Property $[\mathbf{K}]$	Behavior $\{\mathbf{u}\}$	Action $\{\mathbf{F}\}$
Elastic	stiffness	displacement	force
Thermal	conductivity	temperature	heat source
Fluid	viscosity	velocity	body force
Electrostatic	dialectri permittivity	electric potential	charge

We should obtain these form:



Writing the equations for each spring in matrix form:

كتابة المعادلات لكل ربيع في شكل مصفوفة:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

To begin assembling the equilibrium equations describing the behavior of the system of two springs, the displacement ***compatibility conditions***, which relate element displacements to system displacements, are written as:

لبدء تجميع معادلات التوازن التي تصف سلوك النظام من اثنين من الينابيع، وكتابة الشروط التوافق التشريد، والتي تتعلق النزوح عنصر إلى نزوح النظام، على النحو التالي:

$$u_1^{(1)} = U_1 \qquad u_2^{(1)} = U_2 \qquad u_1^{(2)} = U_2 \qquad u_2^{(2)} = U_3$$

And therefore:

و لذلك:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Here, we use the notation $f^{(j)}{}_i$ to represent the force exerted on element *j* at node *i*.

Expand each equation in matrix form:

هنا، ونحن نستخدم و تدوين (ي) أنا لتمثيل القوة المبذولة على العنصر ي في عقدة ط.

توسيع كل المعادلة ف

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix}$$

Summing member by member:

تلخيص عضو عضو:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Next, we refer to the free-body diagrams of each of the three nodes:

وبعد ذلك، نشير إلى المخططات الجسم خالية من كل من العقد ثلاثة:

$$f_1^{(1)} = F_1 \qquad f_2^{(1)} + f_2^{(2)} = F_2 \qquad f_3^{(2)} = F_3$$

Final form:

الشكل النهائي:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

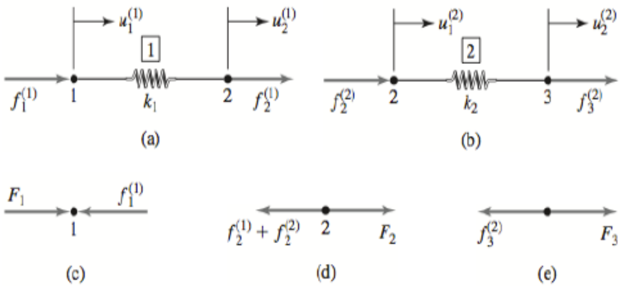
Where the stiffness matrix:

حيث مصفوفة صلابة:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Truss Element Example Solution:

الجمالون العنصر مثال الحل:



Two element
with associated nodal displacements. For element 1, *A*1 = 7*A*0/8 so:

اثنين من عناصر متساوية طول L / 2 مع نزوح العقدي المرتبطة بها. لعنصر 1، A1 = 7A0 / 8 حتى:

$$k_1 = \frac{A_1 E}{L_1} = \frac{7A_0 E}{8(L/2)} = \frac{7A_0 E}{4L}$$

While for elem

أما بالنسبة للعنصر 2، لدينا:

$$A_1 = \frac{5A_0}{8} \quad \text{and} \quad k_2 = \frac{A_2 E}{L_2} = \frac{5A_0 E}{8(L/2)} = \frac{5A_0 E}{4L}$$

Since r
center of the bar, the equilibrium equations for the system of two elements is:

منذ يتم تطبيق عدم التحميل في مركز نقابة المحامين، ومعادلات التوازن للنظام من عنصرين هي:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

Ap
*U*1 = 0 results in:

تطبيق شرط القيد U1 = 0 نتيجة في:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

9.2 مدخل الي طريقة العناصر المنتهية (FEM) في ديناميكيات الموائع الحسابية (CFD)[10]

طريقة العناصر المنتهية (Finite element method) أو يطلق عليها أيضاً تحليل العناصر المنتهية هي طريقة تحليل عددي لإيجاد الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية الجزئية بالإضافة إلى الحلول التكاملية. يعتمد الحل إما على إلغاء المعادلات التفاضلية الجزئية نهائياً (في الحالات الساكنة) أو تقريب المعادلات التفاضلية الجزئية إلى معادلات تفاضلية نظامية والتي يكون من الممكن حلها باستخدام عدة طرق كطريقة

The finite element method (FEM) is a numerical technique for solving partial differential equations (PDE's).

Its first essential characteristic is that the continuum field, or domain, is subdivided into cells, called elements, which form a grid.

The elements (in 2D) have a triangular of a quadrilateral form and can be rectilinear or curved. The grid itself need not be structured. With unstructured grids and curved cells, complex

[10] http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%B7%D8%B1%D9%8A%D9%82%D8%A9_%D8%A7%D9%84%D8%B9%D9%86%D8%A7%D8%B5%D8%B1_%D8%A7%D9%84%D9%85%D9%86%D8%AA%D9%87%D9%8A%D8%A9#.D8.AA.D8.B7.D8.A8.D9.8A.D9.82.D8.A7.D8.AA and [Wendt 2009], Ch. 10.

geometries can be handled with ease.	أويلر (Euler) أو رونغي–كوتا (Runge-Kutta).

The second essential characteristic of the FEM is that the solution of the discrete problem is assumed a priori to have a prescribed form. The solution has to belong to a function space, which is built by varying function values in a given way, for instance linearly or quadratically between values in nodal points.

The nodal points, or nodes, are typical points of the elements such as vertices, mid-side points, mid-element points, etc. Due to this choice, the representation of the solution is strongly linked to the geometric representation of the domain.

The third essential characteristic is that a FEM does not look for the solution of the PDE itself, but looks for a solution of an integral form of the PDE. The most general integral form is obtained from a *weighted residual formulation*. By this formulation the method acquires the ability to naturally incorporate differential type boundary conditions and allows easily the construction of higher order accurate methods.

The ease in obtaining higher order accuracy and the ease of implementation of boundary conditions form a second important advantage of the FEM.

A final essential characteristic of the FEM is the modular way in which the discretization is obtained. The discrete equations are constructed from contributions on the element level which afterwards are *assembled*.

9.3 شرح طريقة العناصر المنتهية

سوف نستخدم مثالين بسيطين لشرح طريقة العناصر المنتهية، والتي من خلالها من الممكن استخلاص الطريقة العامة. في النقاش التالي، يجب على القارئ أن يكون متفهما لمبادئ علم الحسبان والجبر الخطي.

P1 هي مسألة **أحادية البعد**، معطاة على الشكل التالي:

$$\text{P1} \ : \begin{cases} u'' = f \text{ in } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

حيث f معلوم و u هو تابع مجهول للمتحول x ، و u'' هو المشتق الثاني للتابع u بالنسبة للمتحول x.

المسألة ثنائية البعد البسيطة هي مسألة ديركلت (Dirichlet) وتعطى على الشكل التالي:

$$\text{P2} \ : \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

حيث Ω هي منطقة مفتوحة متصلة في المستوي الثنائي البعد (x,y) الذي تكون حدوده $\partial\Omega$ هي عبارة عن مضلع ذو شكل جميل. و u_{xx} و u_{yy} هي المشتقات الثانية للمتحولين x و y على الترتيب.

من الممكن حل المسألة أحادية البعد بحساب المشتق العكسي .لكن هذه الطريقة في حل مسألة القيمة الحدية (boundary value problem) تصلح لحل المسائل أحادية البعد ولا يمكن تعميمها إلى مسائل ذات أبعاد أعلى أو مثال لها الشكل $u + u'' = f$ ولهذا السبب كان من الضروري تطوير طريقة العناصر المنتهية، بدءاً من البعد الأحادي وتعميمها على الأبعاد الأعلى.

الشرح هنا سوف يتم على مرحلتين والتي تعكس المرحلتين الأساسيتين الواجب تطبيقهما لحل مسألة القيمة الحدية باستخدام طريقة العناصر المنتهية:

الخطوة الأولى: تبسيط مسألة القيمة الحدية (boundary value problem) إلى شكل بسيط تنتفي معه الحاجة إلى استخدام الحاسب للحل، بل يكون من الممكن حلها يدوياً باستخدام الورقة والقلم.

الخطوة الثانية: هي التقطيع، حيث يتم تجزئة الشكل إلى عناصر منتهية وحل كل عنصر على حدة.

بعد هذه الخطوة سيكون لدينا صيغة متكاملة لحل مسائل ذات درجات عالية لكن يجب أن تكون خطية والتي حلولها ستكون حلاً تقريبياً لمسألة القيمة الحدية. ومن ثم يتم برمجة هذه الطريقة على الحاسوب.

9.4 الصيغة المتحولية (variational formulation)

Variational formulation = The minimization of an energy integral over the domain.

الصيغة المتحولية هي صيغة طبيعية تكاملية لطريقة العناصر المنتهية (FEM) و لكن في ميدان الميكانيك الموائع – بشكل عام – هو غير ممكن ان توضع الصيغة المتحولية (variational formulation).

الخطوة الأولى هو تحويل P1 و P2 إلى مكافئاتها المتحولية .إذا كان u هو حل لـP1 ، عندها من أجل أي دالة متصلة v يحقق شروط الانتقال الحدي، مثلاً $v = 0$:عند $x = 0$ و $x = 1$، يكون لدينا

(1)

وبشكل معاكس، من أجل قيمة معطاة لـ u فإن (1) تكون محققة من أجل أي دالة متصلة $v(x)$ وعندها من الممكن أن يبرهن أن u ستكون حلاً لـ P1) برهان هذا ليس بالأمر السهل وهو يعتمد على فضاء سوبوليف.(

وباستخدام التكامل بالأجزاء على يمين المعادلة (1) سنحصل على مايلي:

(2)

حيث تم افتراض أن.$v(0) = v(1) = 0$

برهان يظهر وجود حل وحيد

بحيث (0,1) هو عبارة عن تابع مستمر مطلق للثنائية $H_0^1(0,1)$ من الممكن اعتبار أن مثل هذه التوابع تكون ضعيفة (قابلة للاشتقاق .(فضاء سوبوليف انظر) x = 1 وx = 0 عند 0 أن الذي جداء داخلي ومن ثم تعرف ϕ مرة واحدة) وتكشف عن الخريطة الخطية الثنائية المتناظرة ومن ناحية أخرى، فإن الطرف .فضاء هلبرت إلى $H_0^1(0,1)$ يحول الفضاء جداء داخلي، ولكن هذه المرة على هو أيضاً $\int_0^1 f(x)v(x)dx$ الأيسر

على فضاءات هلبرت يظهر أنه يوجد حل لمبرهنة تمثيل رايسز وتطبيق .$L^2(0,1)$ Lp وحيد u وبالتالي يحل المسألة (2) يحل P1.

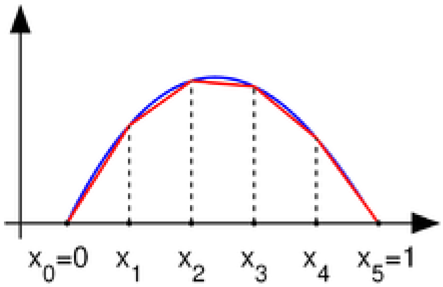
الصيغة المتحولية لـP2

إذا تم التكامل بالأجزاء باستخدام مبرهنة غرين حيث نجد أنه إذا كان u هو حل لـP2 ، فإنه من أجل أي v يكون

$$\int_\Omega f v \, ds = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, ds = -\phi(u,v),$$

حيث ∇ تحقق التدرج وترمز إلى الجداء الداخلي في المستوي ثنائي البعد.

9.5 التقطيع (Discretization)



التابع H^1_0 مع القيم الصفرية عند نقاط النهاية (زرقاء)، والتقريب الخطي الجزئي للمنحني (حمراء).

الفكرة الأساسية في طريقة العناصر المنتهية هو استبدال المسألة الخطية ذات الأبعاد اللانهائية:

أوجد قيمة $u \in H_0^1$ بحيث أن

$$\forall v \in H_0^1,\ -\phi(u,v) = \int fv$$

بصيغة بعدية منتهية:

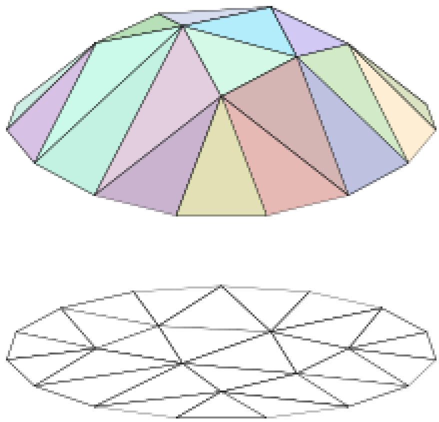
(3)أوجد $u \in V$ such that

$$\forall v \in V,\ -\phi(u,v) = \int fv$$

حيث V هو فضاء جزئي خطي ذو عدد أبعاد منته من H_0^1. هناك العديد من الخيارات لـ V. لكن في طريقة العناصر المنتهية نعتبر V على أنها فضاء للأجزاء الخطية للتابع.

في المسألةP1 ، نأخذ المقطع (0,1) باختيار x n قيم من $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$ ونعرف V على الشكل:

$$V = \{v : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}\ : v \text{ is continuous, } v|_{[x_k,x_{k+1}]} \text{ is linear for } k = 0, ..., n, \text{ and } v(0) = v(1) = 0\}$$



حيث نعرف $x_0 = 0$ و $x_{n+1} = 1$. لاحظ أن التوابع في V هي توابع غير قابلة للاشتقاق بالاعتماد على التعريف المبدئي للحسبان. إذا كان $v \in V$ فإن المشتق يكون عادة غير

معرف عند أي $x = x_k,\ k = 1,\dots,n$. لكن يوجد مشتق عند كل قيمة للمتحول x ومن الممكن استخدام هذا المشتق لغرض التكامل بالأجزاء.

تابع خطي مقطع في المستوي ثنائي الأبعاد.

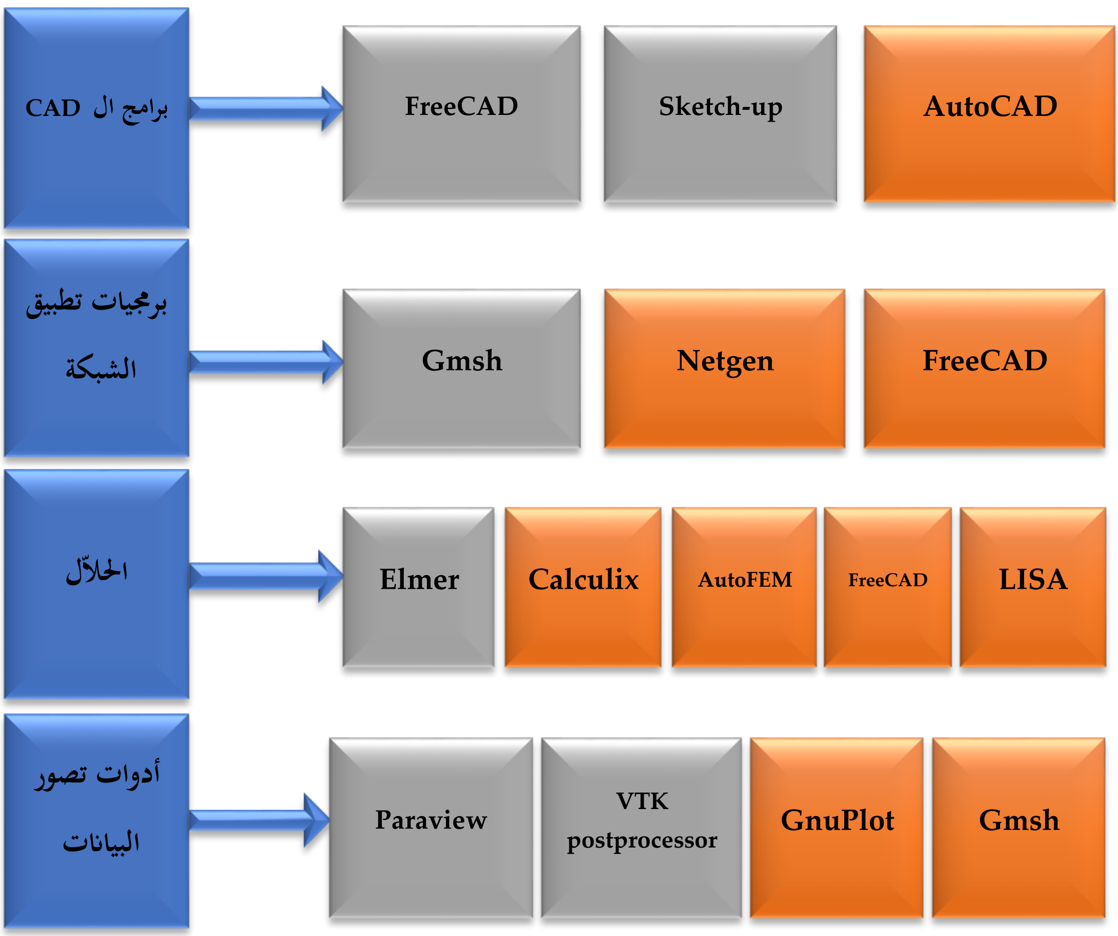
من أجل المسألة P2 نحتاج أن تكون V عبارة عن مجموعة من التوابع من Ω. في الشكل الموضح على اليسار، يظهر تثليث مضلعي لمنطقة مضلعية من 15 ضلع Ω في المستوي (في الأسفل)، والتابع الخطي المجزأ (ملوناً، في الأعلى) لهذا المضلع الذي يكون خطياً على كل مثلث من التثليث. حيث أن الفضاء V سيحتوي على توابع تكون خطية على كل مثلث من التثليث المختار.

تظهر V مكتوبة على الشكل V_h في بعض المراجع، وذلك بسبب أنه يوجد هدف في الحصول على حلول أدق وأدق للمسألة المتقطعة (3) الذي سيكون إلى حد ما سيؤدي إلى حد المسألة الأصلية في إيجاد القيم الحدية للمسألة P2. يتم عنونة التثليث باستخدام معامل ذو قيمة حقيقية $h > 0$ والذي يكون ذو قيمة صغيرة. سوف يتم ربط هذا المعامل بحجم أكبر مثلث وسطي الحجم في التثليث. وعندما نزيد تجزئة التثليث فإن فضاء التقطيع الخطي V يجب أن يتغير مع h كما يوضح الترميز V_h.

10 البرمجيات المستخدمة في النمذجة والمحاكاة

استخدمنا العديد من البرامج في هذه الدراسة ، و اعتمدنا استراتيجيات مختلفة لتحقيق هذا العمل (بشأن التصميم، و وضع الشبكة ، و الحل و التصور للنتائج) .

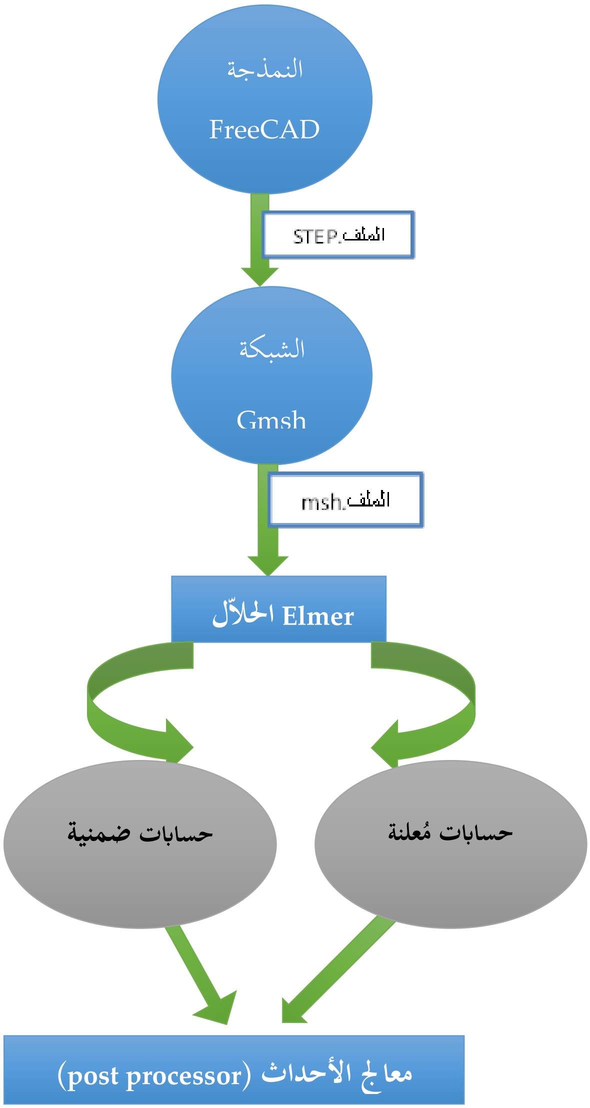
في التخطيطي المبين أدناه وصف لسلسلة من الأدوات المستخدمة . تم تلوين الأدوات المعتمدة في هذه الأطروحة باللون الأخضر و اللاتي ملونة باللون الأحمر كانت معتمدة لفترة لا بأس بها من أجل التجربة ولكن في النهاية لم يتم اعتمادها إما لأنها ليست مجانية أو لأنها لاتعتبر من المصادر المفتوحة أو لأنها محدودة جدا ولا يمكن أن تدعم قيمة كبيرة من البيانات.



10.1 تنسيق الملفات (format of files)

واحدة من الصعوبات التي واجهتنا هي مشكلة الانتقال من برنامج إلى آخر .

عادة يحفظ البرنامج تنسيق لا يستجيب له البرنامج الآخر، و هنا تظهر الحاجة لاكتشاف ما هي الصيغة المقبولة من قبل البرنامج كمدخل، و البرامج التعليمية لا تذكر هذه التفاصيل وهنا يبدأ العمل لاكتشاف الشكل المناسب .



10.2 القيام بالنموذج

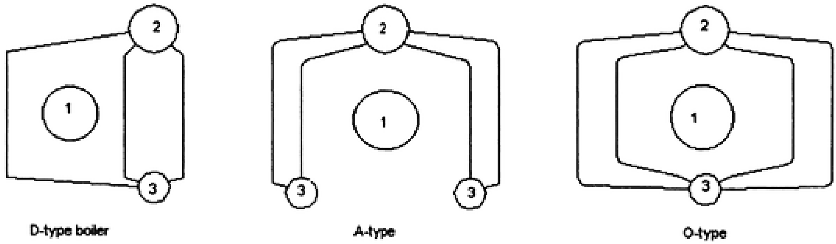
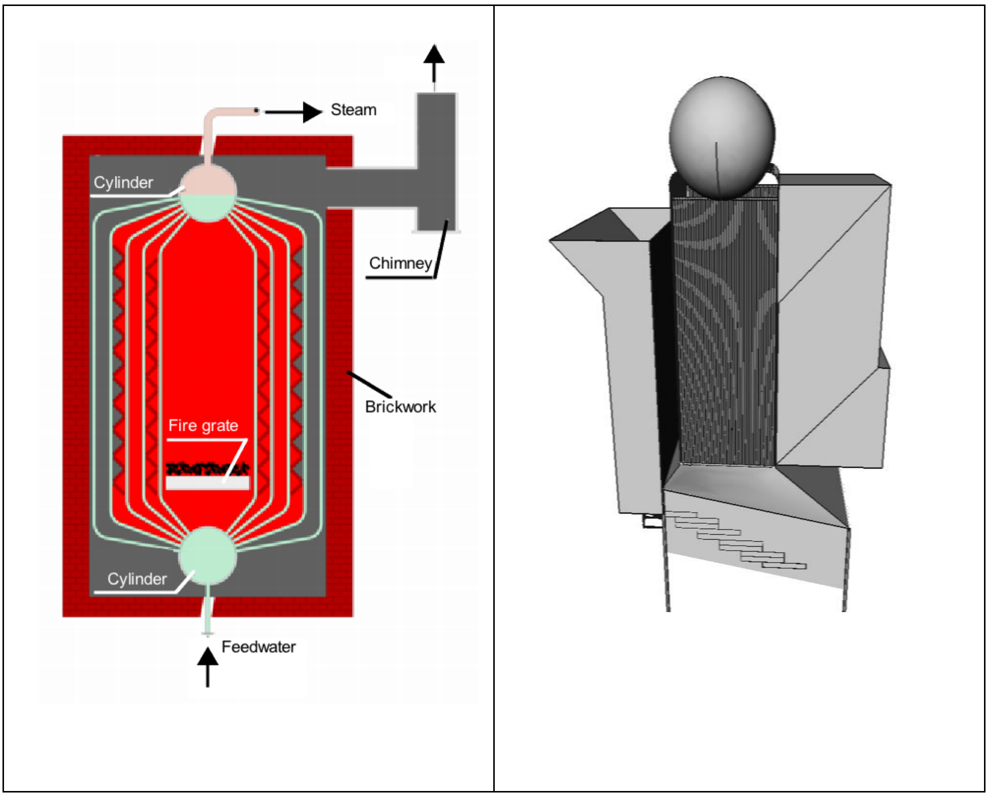


Figure 2.2.1: A-, D- and O-type boiler configurations.1.Burner; 2.Steam drum; ud drum

عدة نماذج موجودة في الدراسات، وقد اعتمدنا في هذه الدراسة الشكل الأكثر بساطة لتسهيل عملية التصنيع سيما و أن صناعة المحرقة ستكون محلية.



10.3 تطبيق الشبكة على النموذج

لوضع الشبكة على نموذج المحرقة المصمم عبر برنامج FreeCAD، اعتمدنا بداية البرنامج عينه أقصد FreeCA ، ولكن تبين لنا أن هذا البرنامج غير قادر على إنجاز الشبكة على كامل النموذج وإنما على عنصر واحد فقط، هذا البرنامج لازال تحت التطوير و ربما في السنوات المقبلة يصبح قادرا على القيام بمثل هكذا مهمة.

وبدأنا البحث عن برمجيات قادرة على القيام بما عجز عنه برنامج FreeCAD ،وبالفعل وجدنا العديد من البرمجيات منها ,Netgen و Gmsh. جميها مجانية وتندرج تحت المصادر المفتوحة.

حاولنا كل هذه البرامج و وجدنا أن الأفضل هو Gmsh من وجهة نظر السرعة و إمكانية تحديد نوع الشكل في FEM وقدرته على وضع الشبكة على نموذج معقّد في وقت قصيرنسبيا مقارنة مع البرمجيات الأخرى .

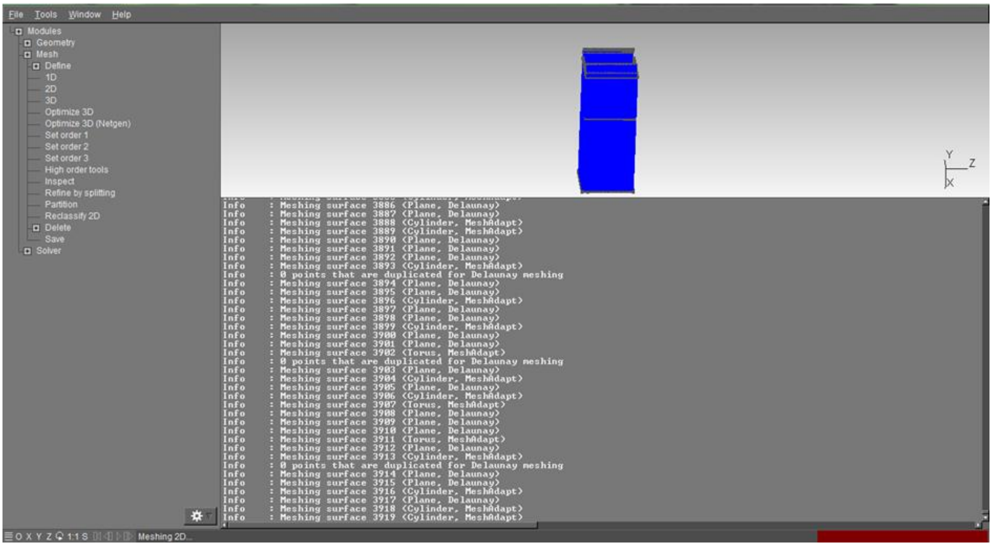
بُني Gmsh حول أربع وحدات: الهندسة ، التشبيك، الحلاّلا ومعالج الأحداث . يمكن السيطرة على كل وحدة إما بشكل تفاعلي باستخدام واجهة المستخدم الرسومية أو باستخدام لغة البرمجة .

تصميم جميع الوحدات الأربع يعتمد على فلسفة بسيطة تكون سريعة وخفيفة و سهلة الاستعمال .

- السرعة : على جهاز كمبيوتر شخصي قياسي في أي لحظة معينة من الزمن ينبغي إطلاق Gmsh

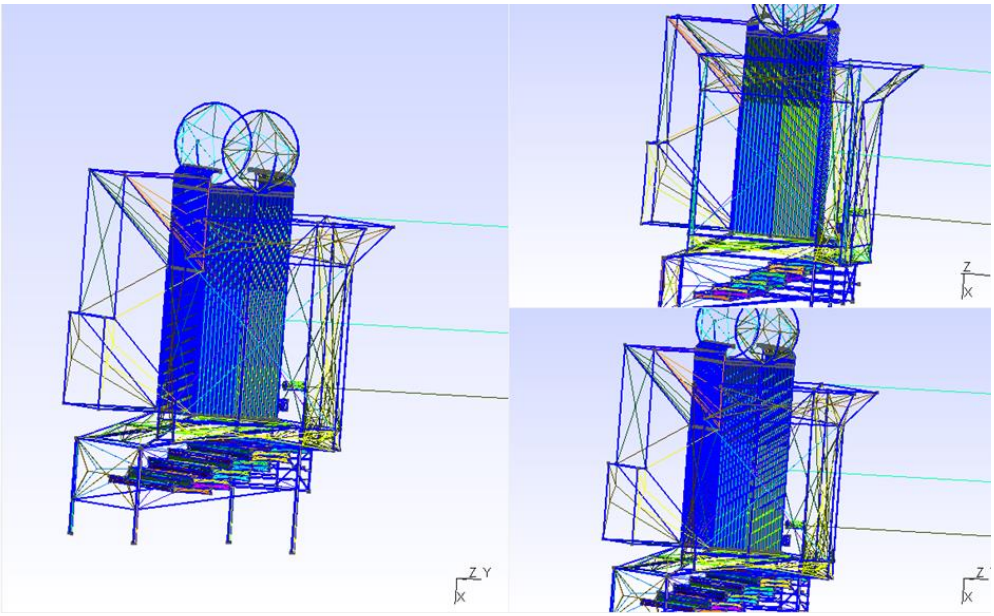
على الفور ، وتكون قادرة على وضع الشبكة بسرعة تصل إلى وضع مليون رباعي الأسطح في دقيقة واحدة .

- الذاكرة: يجب أن يكون أثر الذاكرة من تطبيق الحد الأدنى و يجب أن يكون رمز مصدر صغير بما فيه الكفاية بحيث مطور واحد يمكن أن يفهم ذلك. تثبيت أو



تشغيل البرنامج يجب أن لا يعتمد على أي حزمة برامج طرف ثالث غير متوفرة على نطاق واسع .

- سهولة الاستعمال : تصميم واجهة المستخدم الرسومية تسمح للمستخدم الجديد بإنشاء شبكات بسيطة في غضون دقائق .



10.4 الحلاّل Elmer

Elmer هو مزيج من برامج مختلفة تهدف إلى محاكاة مشاكل فيزيائية باستخدام طريقه العناصر المحددة (FEM) . ثلاثة من هذه البرامج هي: ElmerGUI ،ElmerSolver، ElmerPost . إلمر هو برنامج مفتوح المصدر ، الذي صدر تحت رخصة جنو العمومية (GPL) .

Elmer يمكن استخدامه بطريقتين مختلفتين :

- باستخدام واجهة المستخدم الرسومية (GUI) . (يمكن إنشاء ملف نص الأمر بعد جلسة GUI) .
- باستخدام ملف نص الأمر

Elmer لا يملك القدرة لتوليد الهندسة و التشبيك. ولذلك، كإجراء عام، يجب أن يتم استيراد الهندسة و الشبكة إلى Elmer .

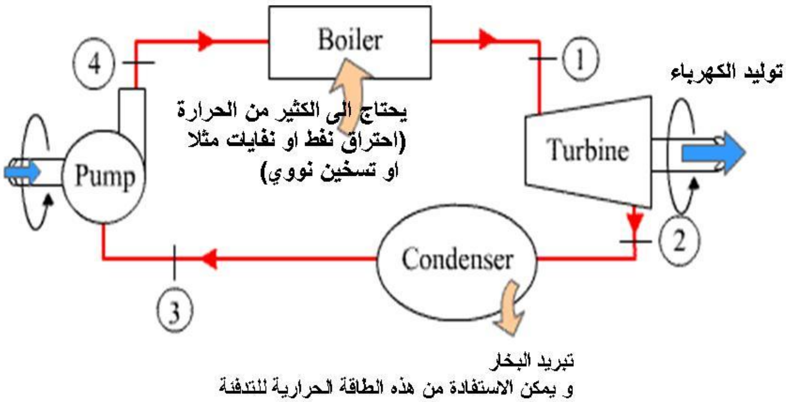
Elmer يقبل الهندسة وشبكات مختلفة الأشكال. من بينها، فإنه يقبل شكل شبكة GMSH .
في أطروحة الماجستير هذه واحدة من المهام الأكثر أهمية هو تحديد موقع المنطقة التي تتعرض لضغوط عالية .

11 استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة فى ميدان ديناميكيات الموائع الحسابية

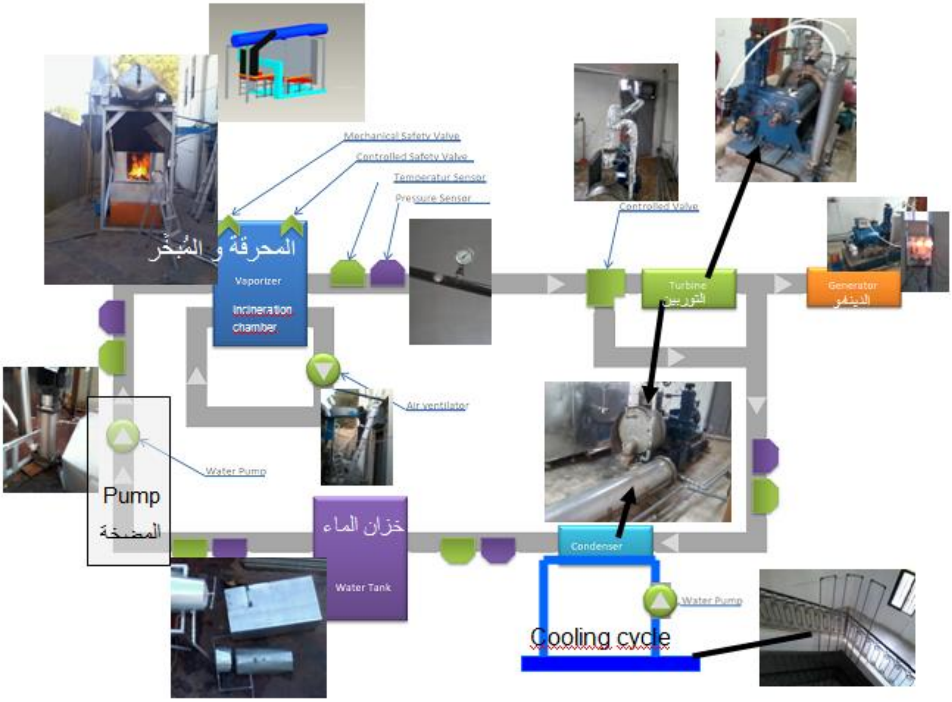
11.1 تحسيب سريان الماء داخل محطة طاقة تعمل على البخار ببرامج جاهزة

محطة طاقة مع توربين تعمل على البخار بشكل عام

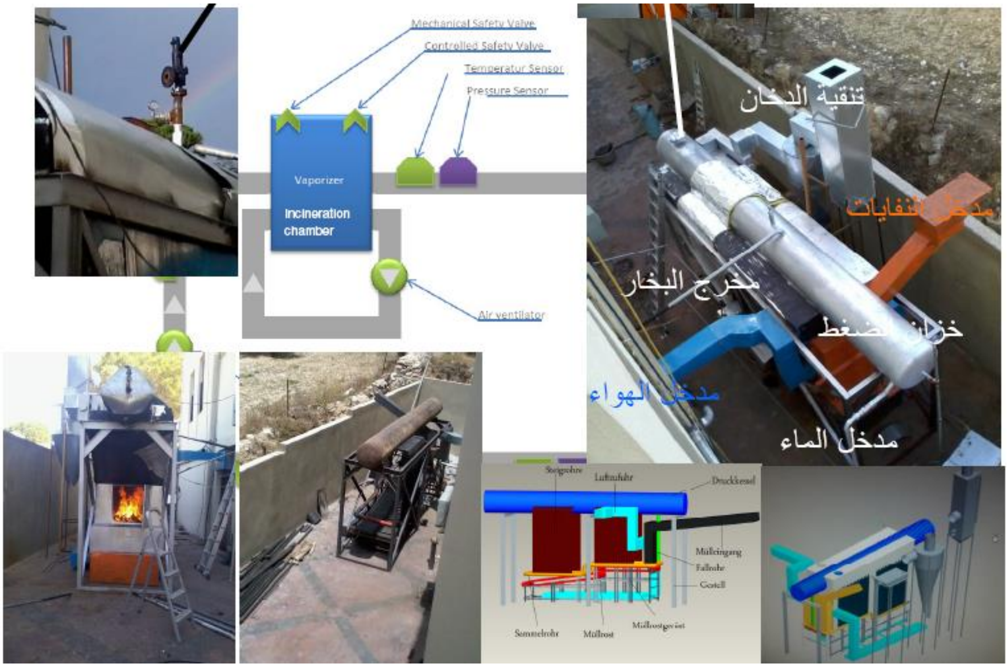
- دورة الماء مُغلقة و تتغير حالة الماء ما بين سائل و بخار.
- وظيفة المحطة هي نقل الطاقة الحرارية الى طاقة كهربائية.



11.1.1 محطة طاقة عن طريق حرق النفايات لتبخير الماء قرب طرابلس الشام



تدخل النفايات الى المحرقة عن طريق المدخل المخصص لها. تحرق النفايات فيتسخن الماء الموجود في الخزان فوق المحرقة حتى يصل الماء الى درجة التبخر. لما يصل ضغط البخار الى 14 بار تُفتح الصمامة والبخار يجري الى التوربين ويولد الكهرباء. يخرج البخار من التوربين الى المكثف حيث يرجع ماءً. هذه الماء تعود الى الخزان البارد و منه عن طريق المضخة مرة اخرى الى خزان المبخر.



محطة الطاقة التجروبية في راسنحاش – البترون قرب طرابلس في شمال لبنان تولد كهرباء عن طريق حرق الخشب او النفايات

11.1.2 مسألة تكبير حجم حتى تستخدم للتخلص من نفايات احدى المدن الكبرى وتغزيتها بالكهرباء

بسم الله الرحمن الرحيم

AECENAR
Association for Economical and Technological Cooperation in the Euro-Asian and North-African Region
www.aecenar.com

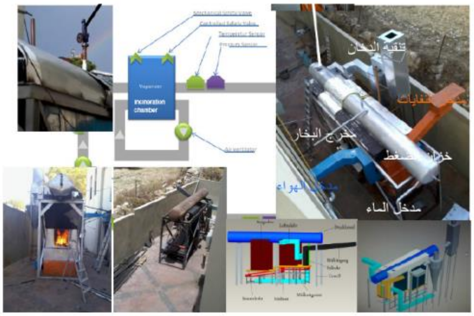
LASeR
Lebanese Association for Scientific Research
الجمعية اللبنانية لدعم البحث العلمي

TEMO Software, Hardware & Consulting e.K.
www.temo-ek.de

MEAE – *A member of AECENAR Applied Research Center*
www.aecenar.com/institutes/meae

Ras Nhache/Batroun - Tripoli, 11th Jan 2015

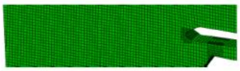
TEMO-IPP Incineration Demonstration Plant Ras Nhache/Batroun, Lebanon



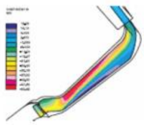
Vaporizer of TEMO-IPP incineration demonstration plant at Ras Nhache/Batroun

Upscaled vaporizer train element (TEMO-IPP has to be upscaled in such a way) (picture is from Dr.-Ing. M. Franz, "Dampferzeuger", www.axpo-holz.ch/Dampferzeuger.pdf)

CFD Analysis step 1: Upscaling CAD Model of vaporizer (to be done by student working on Master Thesis *Mechanical Analysis of an upscaled version of the Vaporizer (pressure vessel and circulation tubes) of the incineration pilot power plant TEMO-IPP*)



CFD Analysis step 2: Grid generation



CFD Analysis step 3: Calculated water/steam flow

Master Thesis

Computational Fluid Dynamics (CFD) Analysis for Water/Steam flow in an upscaled version of the vaporizer of incineration power plant TEMO-IPP

To be able to upscale the TEMO-IPP incineration plant to a commercial incineration plant (about 40 MW) in Tripoli or otherwhere in North Lebanon critical components shall be verified by Computational Fluid Dynamics with the tool Abaqus. The main critical component is the pressure vessel with about 100 bar pressure difference. Working packages:

1. CAD Modeling	2. Mesh Generation	3. Solver	4.Visualization	5.Documen-tation
Upscaling CAD Model with ProE (to be done by other student –see above)	A mesh generation C++ code shall be taken from the open source code OpenFoam and migrated to TEMO_IPP-CFD tool.	A finite difference and a finite volume C++ code shall be taken from the open source code OpenFoam and migrated to TEMO_IPP-CFD tool.	Shall be done with the tool Paraview	
	4 weeks	6 weeks	4 weeks	3 weeks

Keywords: Alternative Energy, Steam Generation in power plant, Computational Fluid Dynamics (CFD), OpenFoam, C++

Contact: Samir Mourad, Email: samir.mourad@aecenar.com

11.1.3 حل المسألة

Working with the combination of FreeCAD, Elmer and Gmsh for an incineration power plant design.

دراستنا هي جريان الماء دخل انابيب محرقة لمحطة طاقة تعمل على حرق النفايات، لذلك يجب علينا ادخال تصميم جزء من هذه المحطة. هذا التصميم هو تصميم انشئ ببرنامج FreeCAD ولذلك علينا ان ننقل تصميم FreeCAD إلى OpenFOAM قبل التشغيل برنامج.

OpenFOAM للحل:

مشكلتنا الآن هو كيف يمكننا أن نفعل هذا النقل:

أولا؛ نفتح تصميم freeCAD على OpenFOAM وحاول استخدام file.VTK لكننا لا الحصول على النتيجة.

الثانية؛ ونحن نحاول لنقل الملف على paraview ثم على OpenFOAM، لكننا لا يحصلون على نتيجة أيضا.

الثالثة؛ نحن نبحث على الانترنت لبعض الرموز، ونحن نحاول التحقق من ذلك، ولكن لا نتيجة.

رابعا؛ نحن إنشاء مجلد جديد أن نسمي اسطوانة للقيام ببعض التجارب، ونحن نقدم الشروط بالاحرف الاولى (p-U)، وحالة النظام (fvSchemes-fvSolutions- controlDict)، ولكن في polyMesh في مجلد المستمر نحن إدراج الإحداثيات الجديدة باعتبارها freeCAD الملف الذي unreaded التي كتبها OpenFOAM.

وجدنا رمز .stl لكن نستنتج أن هذا الرمز هو رمز عكسها عندما نتمكن من نقل من OpenFOAM إلى freeCAD.

نحن نحاول نقل freeCAD الثعبان لOpenFAOM مباشرة ولكن البرنامج لا يقرأها.

حولنا ملف البرنامج الرغوة لـvtkp (foamToVTKP.) والبرنامج لا يزال غير مقروء.

نحن نبحث كيف يمكننا قراءة رموز freeCAD باستخدام Visual C ++ ولكن C ++ البصرية لا يمكن فتح رموز freeCAD.

نحن نستخدم (ast.) رمز لملف كنها ليست القراءة التي OpenFOAM.

نحن إدراج ماكرو في FreeCAD لعرض إحداثيات محطة للطاقة الحرق في OpenFAOM ولكن لا يمكن قراءة الإحداثيات.

باستخدام Gmsh in OpenFOAM حلالا:

وجدنا أن Gmsh بتجميع مع OpenFOAM بالتالي فإننا تثبيت Gmsh في لينكس.

تركيب Gmsh:

الطريقة الأولى لحل:

1. فتح محطة (استخدام سطر الأوامر) في إطار لينكس

2. تصور الدليل README.text

برنامج 3. تشغيل

- إنشاء دليل البناء: MKDIR بناء.
- cmake تشغيل من ضمن الدليل بناء: القرص المضغوط بناء

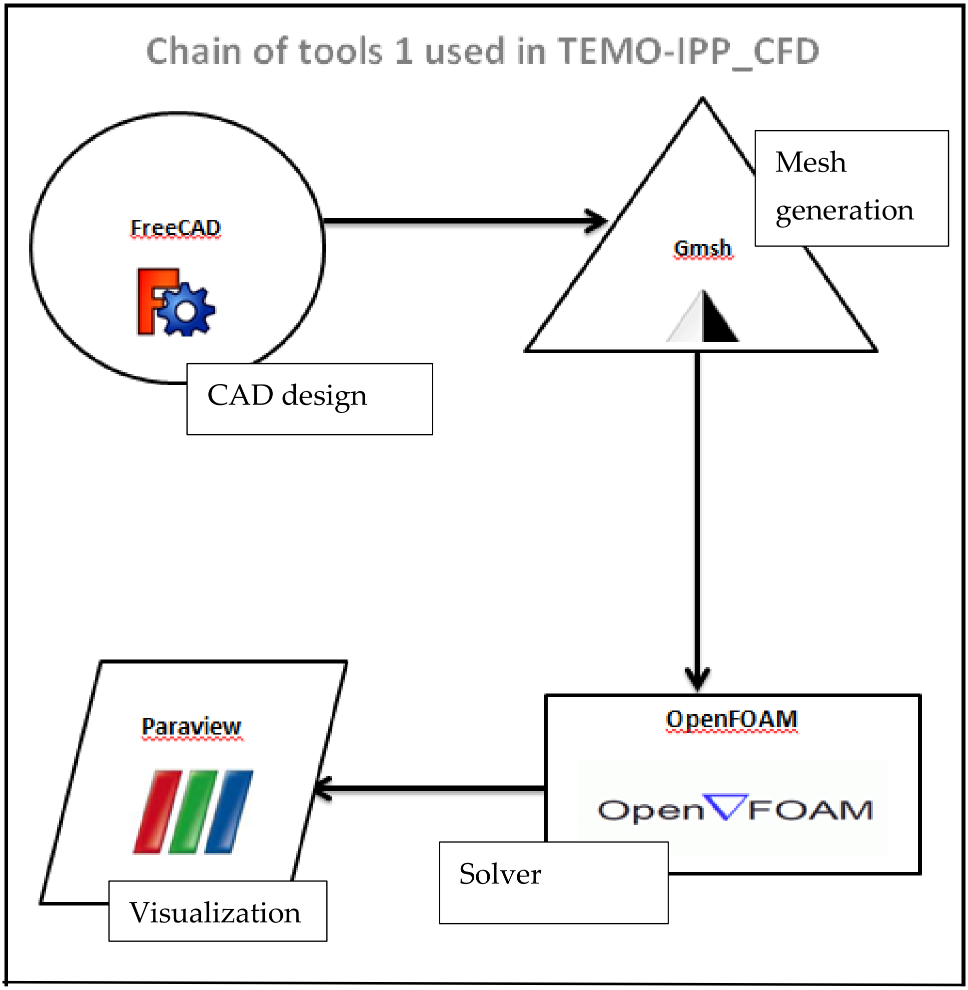
.. cmake

4. بناء Gmsh باستخدام واجهة المستخدم الرسومية لـ CMake.

- CMake ---- ملء -في.
- إضافة الدخول (CMake_PREFIX_PATH "PATH").

- "تكوين" من اختيار المترجم.
- لدينا لإعادة تشغيل "تكوين" في كل مرة نغير بعض الخيارات.
- "إنشاء".
- بناء Gmsh باستخدام مترجم المختار.

11.1.3.1 تجربة لحل المسألة باستخدام Gmsh داخل OpenFOAM



نقوم بتحميل نسخة Gmsh الجديد (gmsh-2.6.1-source.tgz)

تشغيل gmsh:

القطران -zxv*vf* gmsh-2.6.1-source.tgz

ثم يتم بناؤه في دليل البناء منفصل المحرز وتحولت مع:

MKDIR gmsh والبناء

مؤتمر نزع السلاح gmsh والبناء

تم تكوين GMSH مع:

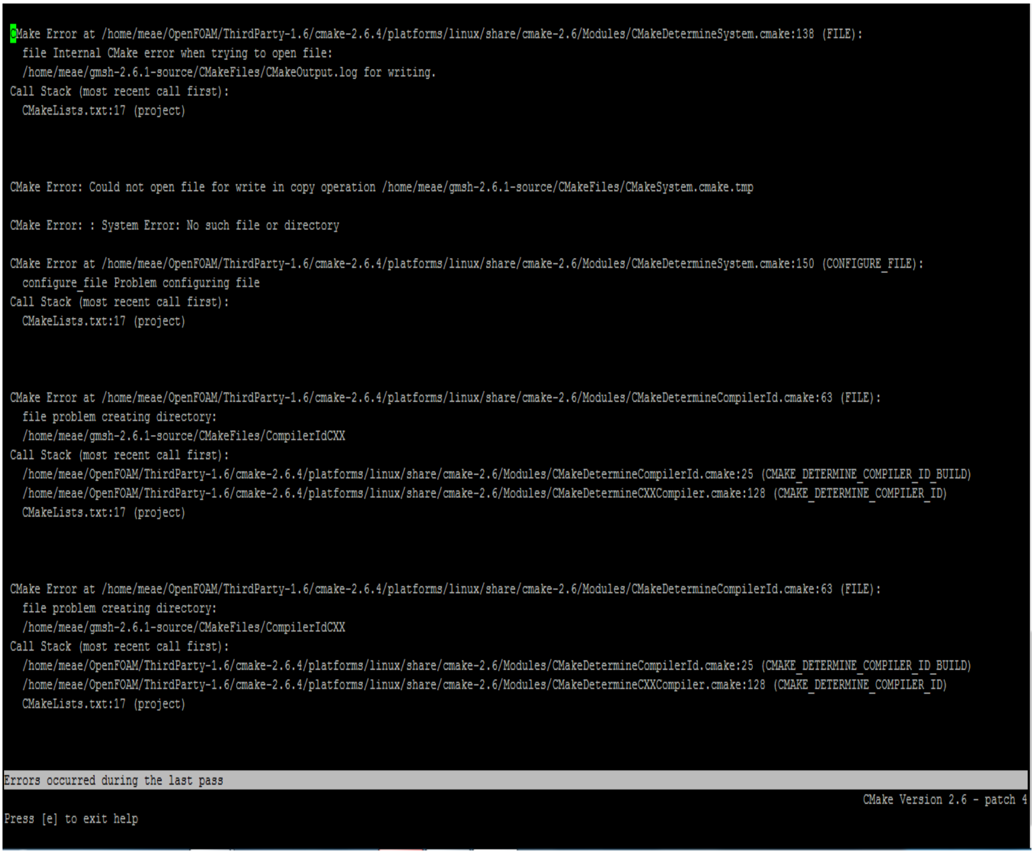
ccmake -i ../gmsh-2.6.1-source

ثم 'ج' لتكوين، 'ج' مرة أخرى لتكوين، 'ز' لتوليد. إذا واجهت 'مساعدة' الشاشات، اضغط على 'ه' للخروج منها.

ثم يتم ترجمة GMSH وتثبيتها مع:

make

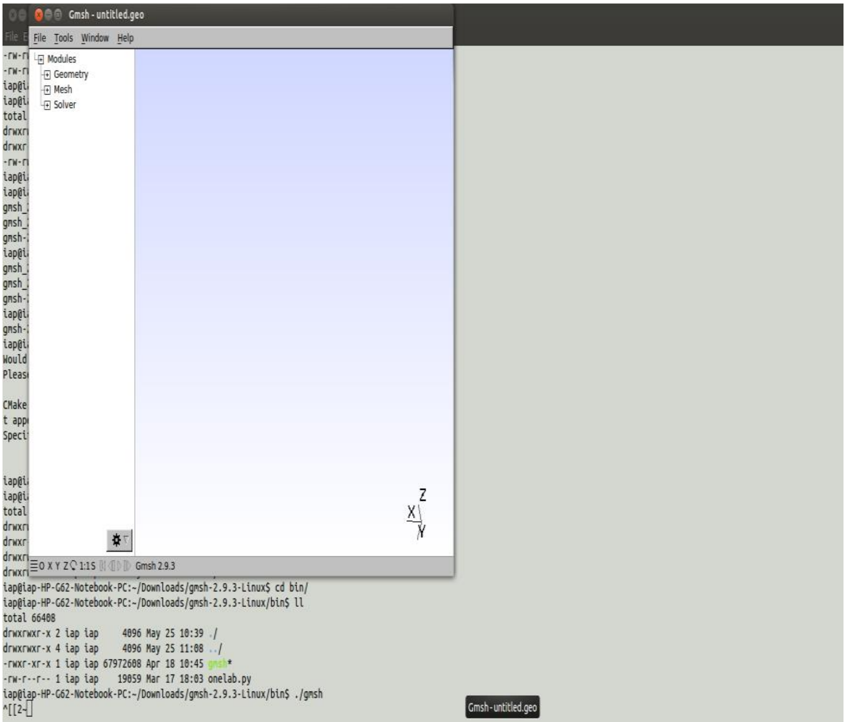
sudo make install



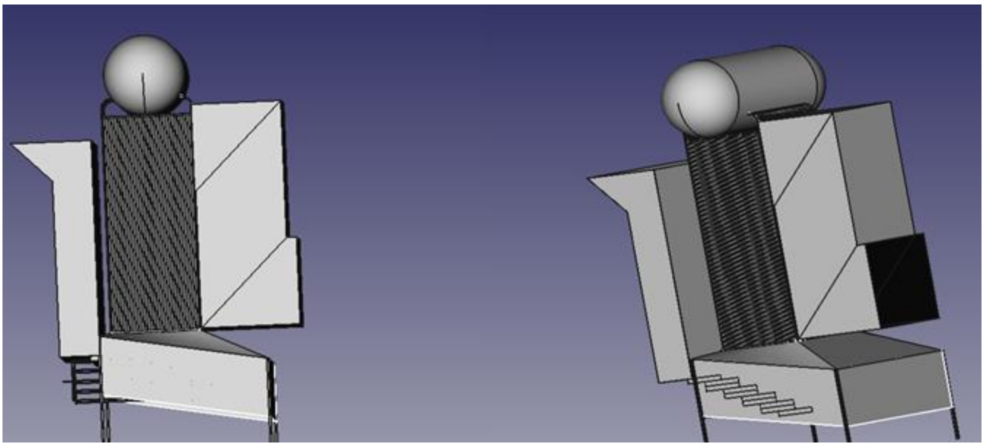
We found some problem that interrupts us to install gmsh on RedHat Linux wich does not contain "configure" and we have to install cmake which doesn't matching with our RedHat version. We do download the gmsh-2.9.3-Linux, in the Ubuntu version, then we found two files (bin and share) enter the bin file we found (gmsh*) we type (./gmsh) and the gmsh installed.	وجدنا بعض المشاكل التي يقطع لنا على ريدهات لينكس لتثبيتgmsh اللي تبونه لا تحتوي على "تكوين" التي لا cmakeو علينا أن تثبيت مطابقة مع نسختنا ريدهات. -gmsh-2.9.3ونحن نفعل تحميل لينكس، في نسخة أوبونتو، ثم وجدنا ملفين (بن وسهم) إدخال ملف بن

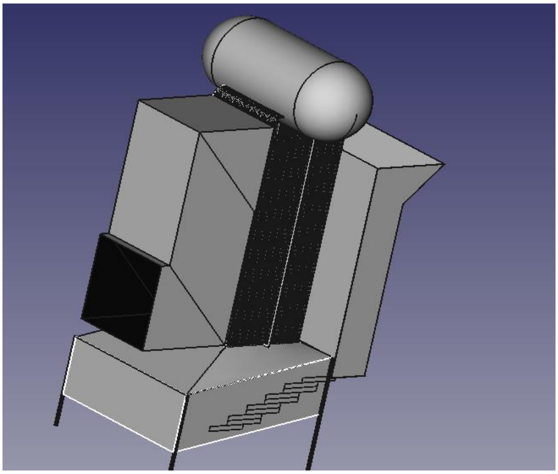
*) نحن اكتب gmshوجدنا (تثبت.gmsh) وgmsh(./	

```
-rw-rw-r--  1 iap iap   100505 May  6 09:56 Re_El_Haoum_04052015.pdf
-rw-rw-r--  1 iap iap        0 Mar 27  2014 touch6517
iap@iap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads$ cd CMakeFiles/
iap@iap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads/CMakeFiles$ ll
total 12
drwxrwxr-x 2 iap iap 4096 May 25 11:06 ./
drwxr-xr-x 6 iap iap 4096 May 25 11:09 ../
-rw-rw-r-- 1 iap iap   85 May 25 11:09 cmake.check_cache
iap@iap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads/CMakeFiles$ cd ..
iap@iap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads$ cmake -i gmsh
gmsh_2.8.5+dfsg-1.1ubuntu1.dsc  gmsh-2.9.3-Linux64.tgz
gmsh_2.8.5+dfsg.orig.tar.xz     gmsh-build/
gmsh-2.9.3-Linux/
iap@iap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads$ cmake -i gmsh
gmsh_2.8.5+dfsg-1.1ubuntu1.dsc  gmsh-2.9.3-Linux64.tgz
gmsh_2.8.5+dfsg.orig.tar.xz     gmsh-build/
gmsh-2.9.3-Linux/
iap@iap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads$ cmake -i gmsh-
gmsh-2.9.3-Linux/       gmsh-2.9.3-Linux64.tgz  gmsh-build/
iap@iap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads$ cmake -i gmsh-2.9.3-Linux
Would you like to see advanced options? [No]:
Please wait while cmake processes CMakeLists.txt files....

CMake Error: The source directory "/home/iap/Downloads/gmsh-2.9.3-Linux" does no
t appear to contain CMakeLists.txt.
Specify --help for usage, or press the help button on the CMake GUI.


iap@iap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads$ cd gmsh-2.9.3-Linux/
iap@iap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads/gmsh-2.9.3-Linux$ ll
total 16
drwxrwxr-x 4 iap iap 4096 May 25 11:08 ./
drwxr-xr-x 6 iap iap 4096 May 25 12:42 ../
drwxrwxr-x 2 iap iap 4096 May 25 10:39 bin/
drwxrwxr-x 4 iap iap 4096 May 25 10:39 share/
iap@iap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads/gmsh-2.9.3-Linux$ cd bin/
iap@iap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads/gmsh-2.9.3-Linux/bin$ ll
total 66408
drwxrwxr-x 2 iap iap     4096 May 25 10:39 ./
drwxrwxr-x 4 iap iap     4096 May 25 11:08 ../
-rwxr-xr-x 1 iap iap 67972608 Apr 18 10:45 gmsh*
-rw-r--r-- 1 iap iap    19059 Mar 17 18:03 onelab.py
iap@iap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads/gmsh-2.9.3-Linux/bin$ ./gmsh
```



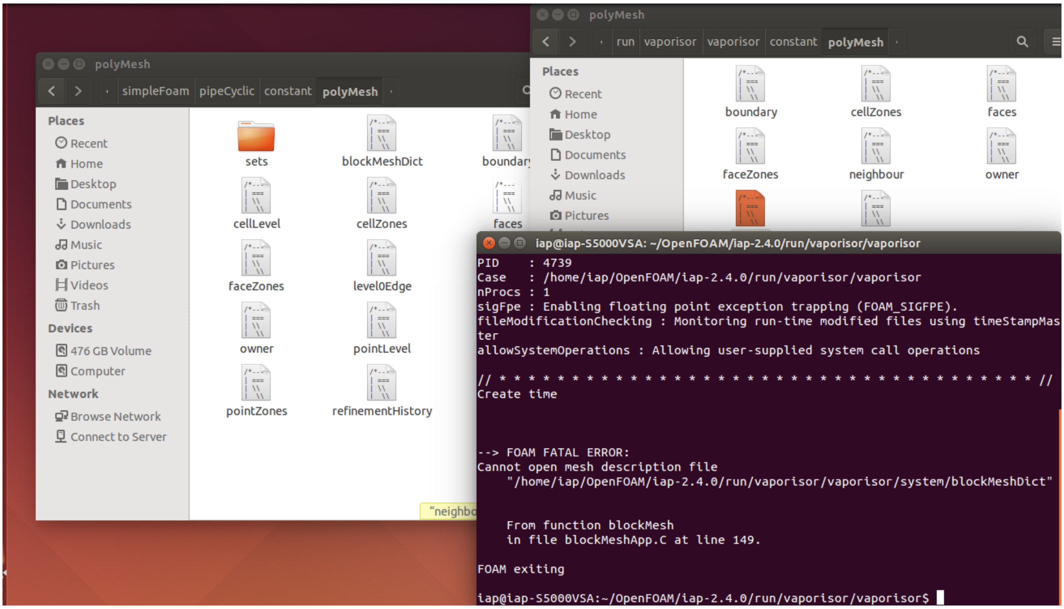
تصميم محطة للطاقة الحرق في برنامج FreeCAD:



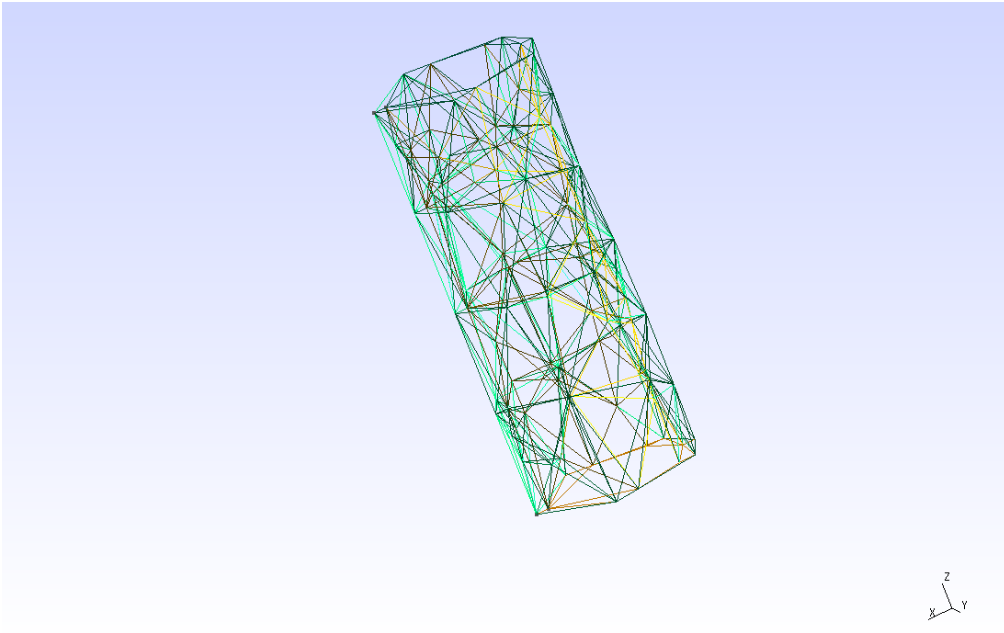


We obtain msh using Gmsh: ---------------------------------- ----------------------------- A. Now we are trying to transport mesh to OpenFOAM: 1. gmshToFoam: not responding. 2. Cp –r $FOAM_TUTORIALS/incompressible/icoFoam/cavity/* ./{files.msh name}: not responding. B. To read gmsh .msh file by OpenFOAM we follow the commands: 1. Gmsh main.geo -3 0 file.msh 2. gmshToFoam file.msh –case vaporisor	نحصل علىMSH باستخدام Gmsh: -------------------------------------- ----------------- ------------- Aل شبكة نقل نحاول الآن .OpenFOAM: .1gmshToFoam.لا يستجيب : - المحافظين حزب .2r $ FOAM_TUTORIALS قابل غير / / للإنضغاطicoFoam اسم * / تجويف / }/.files.msh.لا يستجيب :{ B لقراءة .gmsh. ملف msh التي كتبها OpenFOAM:نتبع الأوامر .1Gmsh main.geo -3 0 file.msh .2gmshToFoam file.msh المجموعة الحالةvaporisor

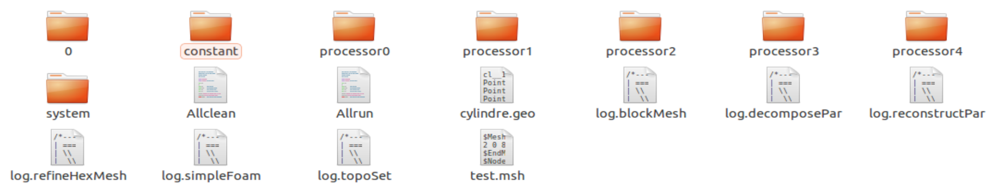
3. blockMesh 4. icoFoam 5. paraFoam But it doesn't affect. C. We change file.msh to file.STL to solve it using snappyMesh but it doesn't affect. D. We follow another way: 1. make new folder into icoFoam 2. copy the initial conditions into this folder from another exist tutorial 3. copy the file.msh into this folder 4. tape fluentMeshToFoam file.msh 5. icoFoam 6. paraFoam But we see that we have to make the boundary conditions of design (boundary, points, faces…).	.3blockMesh .4icoFoam .5paraFoam ولكنه لا يؤثر. C ونحن تغيير .file.msh إلى file.STL لحلها باستخدام snappyMesh ولكنه لا يؤثر. D: نحن نتبع طريقة أخرى . .1 جعل مجلد جديد في icoFoam .2 نسخ الظروف الأولية في هذا المجلد من آخر وجود البرنامج التعليمي .3 نسخ file.msh في هذا المجلد .4 الشريط fluentMeshToFoam file.msh .5icoFoam .6paraFoam ولكننا نرى أن لدينا لجعل الشروط الحدية التصميم (حدود، نقط، وجوه ...).



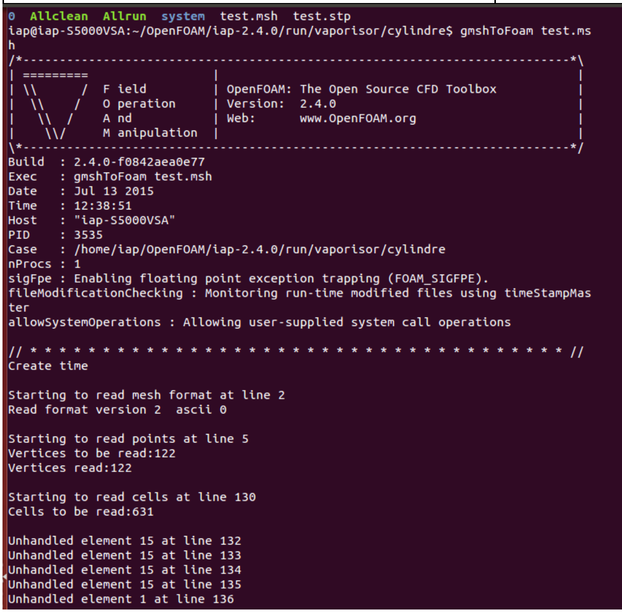
We try to found these boundaries from file.geo design making by gmsh or file.msh the meshing of design making by gmsh too. We try now a new version of gmsh (gmsh 2.3) and we begin with a pipe as an example:	ونحن نحاول العثور على هذه الحدود من file.geo صنع التصميم gmsh أو file.msh والربط من صنع التصميم gmsh جدا. ونحن نحاول الآن نسخة جديدة من gmsh (gmsh 2.3) ونبدأ مع أنبوب كمثال:



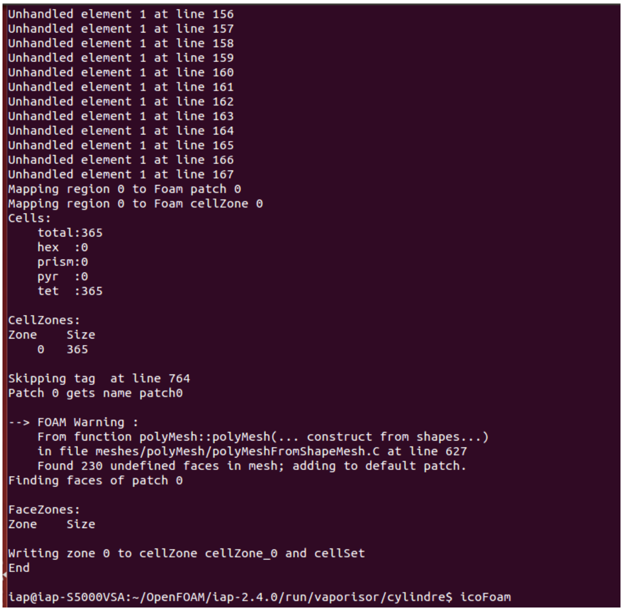
We follow the gmshToFoam from the file the name test.mesh we obtain the file constant that include the initial conditions of design after we create the file 0 and system that include some conditions too we obtain 5 processors after running the system:	اتبعنا gmshToFoam من ملف اسم test.mesh نحصل على ثابت الملفات التي تتضمن الشروط الأولية للتصميم بعد أن إنشاء ملف 0 والنظام التي تتضمن بعض الشروط أيضا نحصل على 5 المعالجات بعد تشغيل النظام:



We apply gmshToFoam for test.msh and we obtain this result:	نطبق gmshToFoamنحن على هذه test.mshل ونحصل النتيجة:

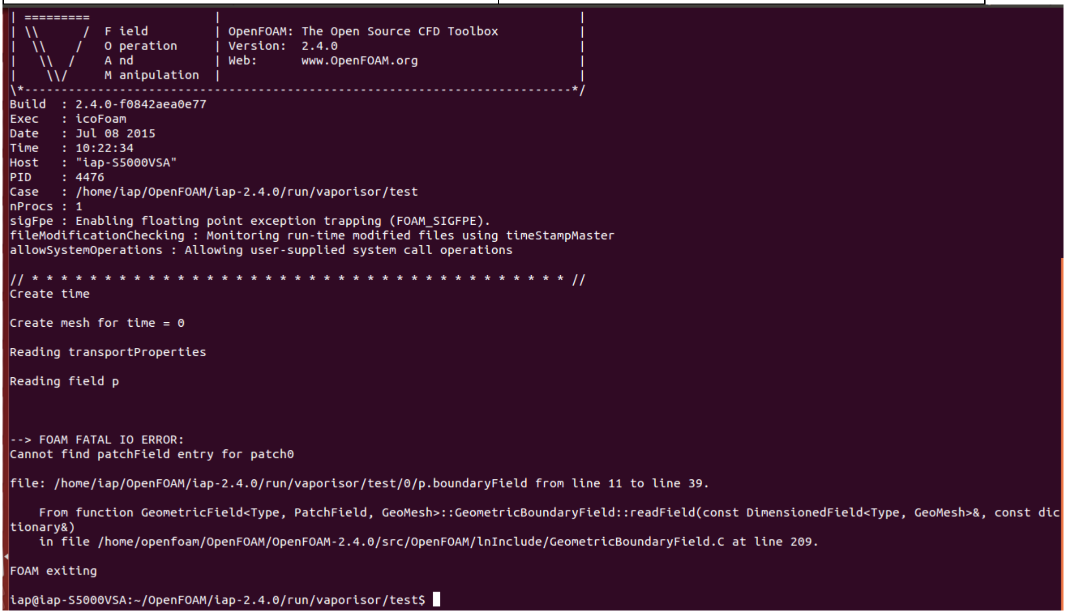


```
0  Allclean  Allrun  system  test.msh  test.stp
iap@iap-S5000VSA:~/OpenFOAM/iap-2.4.0/run/vaporisor/cylindre$ gmshToFoam test.ms
h
/*---------------------------------------------------------------------------*\
| =========                 |                                                 |
| \\      /  F ield         | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox           |
|  \\    /   O peration     | Version:  2.4.0                                 |
|   \\  /    A nd           | Web:      www.OpenFOAM.org                      |
|    \\/     M anipulation  |                                                 |
\*---------------------------------------------------------------------------*/
Build  : 2.4.0-f0842aea0e77
Exec   : gmshToFoam test.msh
Date   : Jul 13 2015
Time   : 12:38:51
Host   : "iap-S5000VSA"
PID    : 3535
Case   : /home/iap/OpenFOAM/iap-2.4.0/run/vaporisor/cylindre
nProcs : 1
sigFpe : Enabling floating point exception trapping (FOAM_SIGFPE).
fileModificationChecking : Monitoring run-time modified files using timeStampMas
ter
allowSystemOperations : Allowing user-supplied system call operations

// * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * //
Create time

Starting to read mesh format at line 2
Read format version 2  ascii 0

Starting to read points at line 5
Vertices to be read:122
Vertices read:122

Starting to read cells at line 130
Cells to be read:631

Unhandled element 15 at line 132
Unhandled element 15 at line 133
Unhandled element 15 at line 134
Unhandled element 15 at line 135
Unhandled element 1 at line 136
```



```
Unhandled element 1 at line 156
Unhandled element 1 at line 157
Unhandled element 1 at line 158
Unhandled element 1 at line 159
Unhandled element 1 at line 160
Unhandled element 1 at line 161
Unhandled element 1 at line 162
Unhandled element 1 at line 163
Unhandled element 1 at line 164
Unhandled element 1 at line 165
Unhandled element 1 at line 166
Unhandled element 1 at line 167
Mapping region 0 to Foam patch 0
Mapping region 0 to Foam cellZone 0
Cells:
    total:365
    hex  :0
    prism:0
    pyr  :0
    tet  :365

CellZones:
Zone    Size
    0   365

Skipping tag  at line 764
Patch 0 gets name patch0

--> FOAM Warning :
    From function polyMesh::polyMesh(... construct from shapes...)
    in file meshes/polyMesh/polyMeshFromShapeMesh.C at line 627
    Found 230 undefined faces in mesh; adding to default patch.
Finding faces of patch 0

FaceZones:
Zone    Size

Writing zone 0 to cellZone cellZone_0 and cellSet
End

iap@iap-S5000VSA:~/OpenFOAM/iap-2.4.0/run/vaporisor/cylindre$ icoFoam
```

But we don't obtain the informations during time when we apply icoFoam:	لكننا لا الحصول على المعلومات خلال الوقت عندما نطبق icoFoam:



```
| =========                 |                                                 |
| \\      /  F ield         | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox           |
|  \\    /   O peration     | Version:  2.4.0                                 |
|   \\  /    A nd           | Web:      www.OpenFOAM.org                      |
|    \\/     M anipulation  |                                                 |
\*---------------------------------------------------------------------------*/
Build  : 2.4.0-f0842aea0e77
Exec   : icoFoam
Date   : Jul 08 2015
Time   : 10:22:34
Host   : "iap-S5000VSA"
PID    : 4476
Case   : /home/iap/OpenFOAM/iap-2.4.0/run/vaporisor/test
nProcs : 1
sigFpe : Enabling floating point exception trapping (FOAM_SIGFPE).
fileModificationChecking : Monitoring run-time modified files using timeStampMaster
allowSystemOperations : Allowing user-supplied system call operations

// * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * //
Create time

Create mesh for time = 0

Reading transportProperties

Reading field p


--> FOAM FATAL IO ERROR:
Cannot find patchField entry for patch0

file: /home/iap/OpenFOAM/iap-2.4.0/run/vaporisor/test/0/p.boundaryField from line 11 to line 39.

    From function GeometricField<Type, PatchField, GeoMesh>::GeometricBoundaryField::readField(const DimensionedField<Type, GeoMesh>&, const dictionary&)
    in file /home/openfoam/OpenFOAM/OpenFOAM-2.4.0/src/OpenFOAM/lnInclude/GeometricBoundaryField.C at line 209.

FOAM exiting

iap@iap-S5000VSA:~/OpenFOAM/iap-2.4.0/run/vaporisor/test$
```

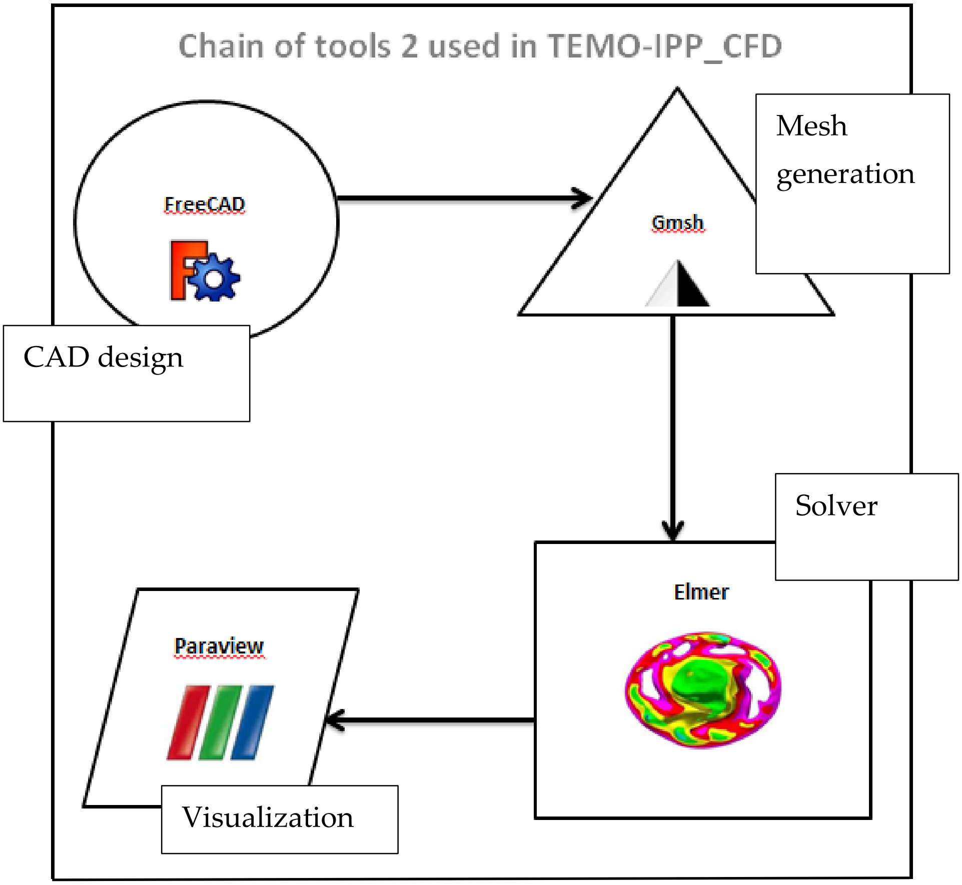
لكننا لا الحصول على المعلومات خلال الوقت عندما نطبق icoFoam:

وOpenFOAM لا يستجيب، ونحن لا يمكن قراءة تصميم gmsh الربط في OpenFAOM. قد يكون ذلك للأسباب التالية:

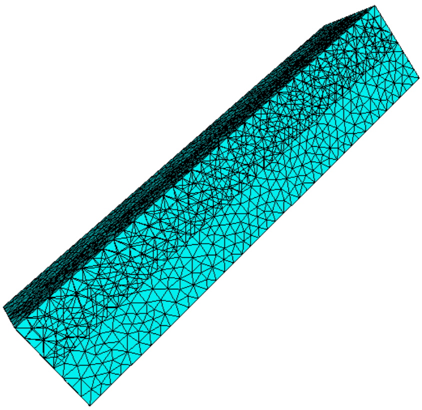
- النسخة OpenFOAM ليست كاملة ولكن هذا ليس منطقيا لأنه يستخدم في البرامج التعليمية على شبكة الانترنت.
- لا يعمل الأمر بعد الآن، والتي هي أكثر منطقية لأننا محاولة العديد من وسائل لتطبيق الأمر ولا شيء يحدث.

لا يعمل ولكن هذا ليس من المنطقي جدا لأننا نستخدم نسخة gmsh• النسخة على معلومات غير كاملة التصميم gmsh، (ولكن قد يكون النقل gmshكثير لأنه لا يعمل في تصميم كبير مثل لدينا)

11.1.3.2 استخدام برنامج Elmer



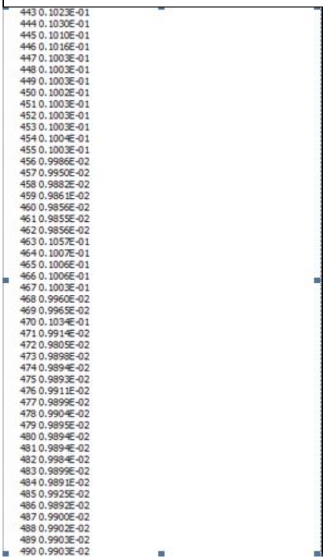
Here we try another tools which Elmer's tools that can read the design of pipe with introduction of:	هنا نحاول أدوات أخرى الأدوات التي إلمر التي يمكن قراءة تصميم الأنابيب مع الأخذ:



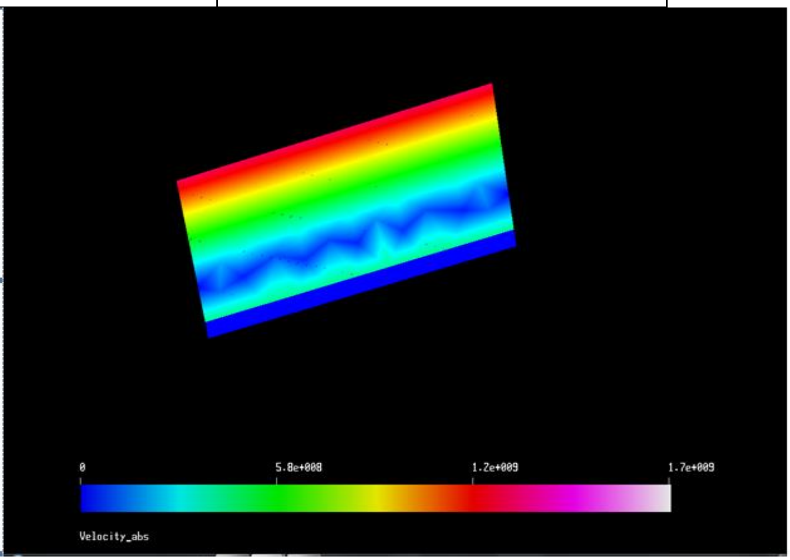
• Design of pipe with meshing on gmsh and saving like file.msh format • Initials conditions • Choose the Navier-Stokes equation • Specify the material use (water (room temperature) for the interne face, and steel (stainless) for the extern face)	• تصميم الأنابيب مع الربط على gmsh وتوفير مثل شكل file.msh • شروط الأحرف الأولى • اختيار معادلة نافيير ستوكس • تحديد استخدام المواد (الماء (درجة حرارة الغرفة) لمواجهة

• Define the boundaries in the design before introduction the condition of each boundary • Select run start solver • Than select start ElmerPost or ElmerVTK.	الداخلية من والصلب (ستيل للوجه خارجي ...) • تحديد الحدود في التصميم قبل إدخال حالة كل الحدود • البدء حدد تشغيل حلالا • ثان حدد بداية ElmerPost أو ElmerVTK.
Before we move to the results, we should now how we obtain the initial conditions: • We needed a turbine generate 30.2 Mwatts, so we search to the same turbine. • This turbine need a pressure that equal 210 bar, temperature equal 520 °C, and mass flow equal 210 t/h=58.33 kg/s. • We use water, so density equal 1000 kg/m³=mass/volume; so $\frac{mass/s}{volume/s}$; we can deduct that the volume flow Q equal 0.058 m³/s. • Q=$\frac{volume}{time}$= $\frac{section*displacement}{time}$= section*velocity; with section=π*radius²=0.003 m². • So velocity equal 19.44 m/s.	قبل أن ننتقل إلى النتائج، علينا أن الآن كيف نحصل على الشروط الأولية: نحن في حاجة إلى توربينات توليد 30.2 Mwatts، لذلك نحن نبحث لنفس التوربينات. هذه التوربينات في حاجة الى الضغط الذي يساوي 210 بار، ودرجة الحرارة يساوي 520 درجة مئوية، وتدفق كتلة مساوية 210 طن / ساعة = 58.33 كجم / ثانية. نحن نستخدم الماء، لذلك كثافة يساوي 1000 كغ / M3 = الكتلة / الحجم؛

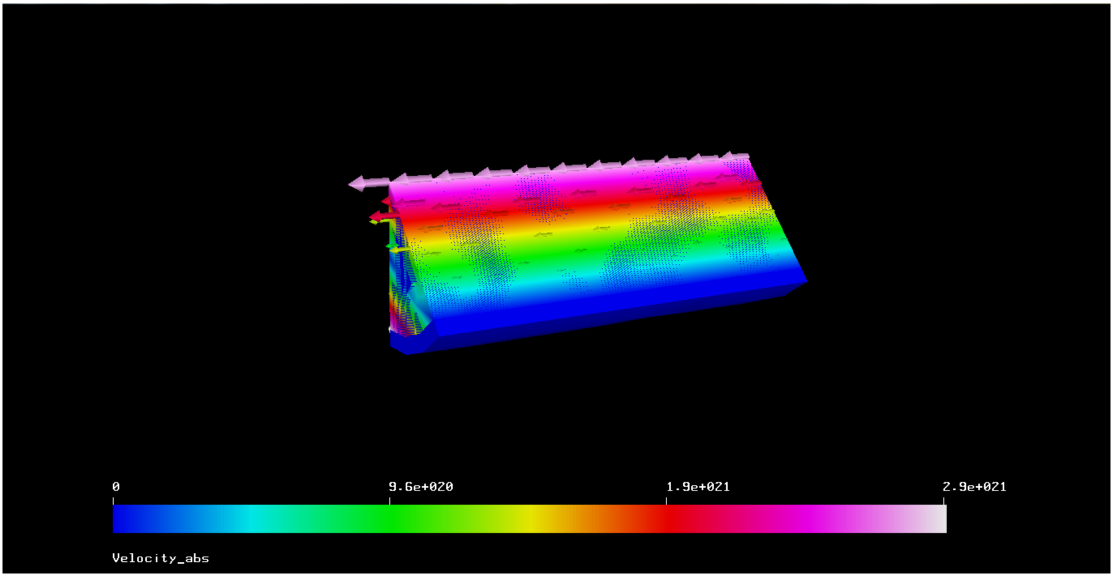
We obtain the velocity values (start solver) and visualization (ElmerPost) of steam:	حتى (الكتلة / ث) / (حجم / ثانية). يمكننا أن تقتطع أن حجم التدفق س يساوي 0.058 M3 / ثانية. Q = الحجم / الوقت = (القسم) * (النزوح) / الساعة = القسم * سرعة. مع القسم = π * radius2 = 0.003 M2. حتى سرعة تساوي 19.44 م / ث. نحصل على قيم السرعة (بدء للحل) والتصور (ElmerPost) البخار:



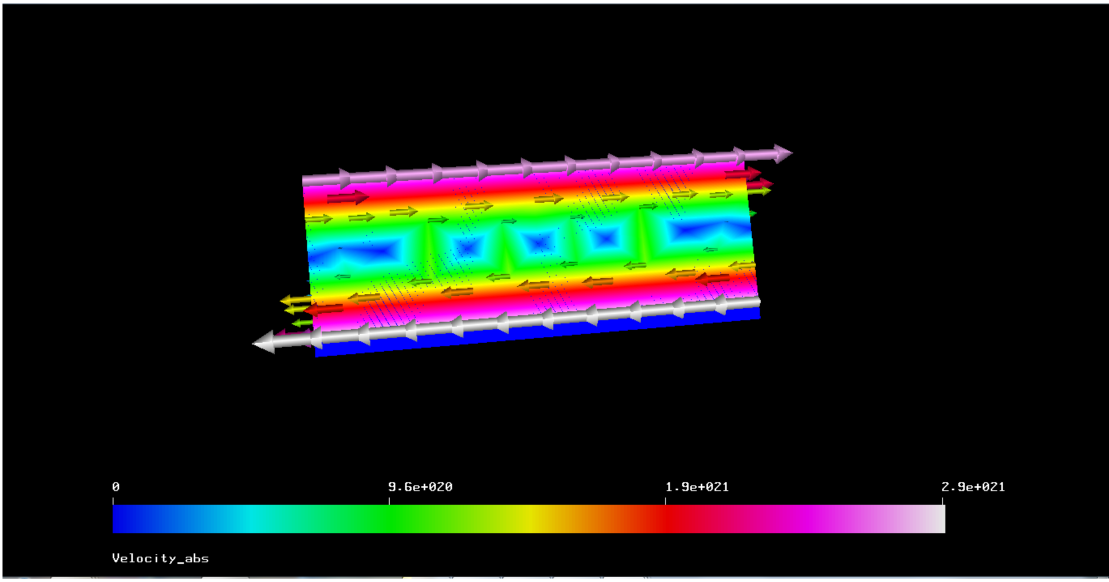
443	0.1023E-01
444	0.1030E-01
445	0.1010E-01
446	0.1016E-01
447	0.1003E-01
448	0.1003E-01
449	0.1003E-01
450	0.1002E-01
451	0.1003E-01
452	0.1003E-01
453	0.1003E-01
454	0.1004E-01
455	0.1003E-01
456	0.9986E-02
457	0.9950E-02
458	0.9882E-02
459	0.9861E-02
460	0.9856E-02
461	0.9855E-02
462	0.9856E-02
463	0.1057E-01
464	0.1007E-01
465	0.1006E-01
466	0.1006E-01
467	0.1003E-01
468	0.9960E-02
469	0.9965E-02
470	0.1034E-01
471	0.9914E-02
472	0.9805E-02
473	0.9898E-02
474	0.9894E-02
475	0.9893E-02
476	0.9911E-02
477	0.9899E-02
478	0.9904E-02
479	0.9895E-02
480	0.9894E-02
481	0.9894E-02
482	0.9984E-02
483	0.9899E-02
484	0.9891E-02
485	0.9925E-02
486	0.9892E-02
487	0.9900E-02
488	0.9902E-02
489	0.9903E-02
490	0.9903E-02



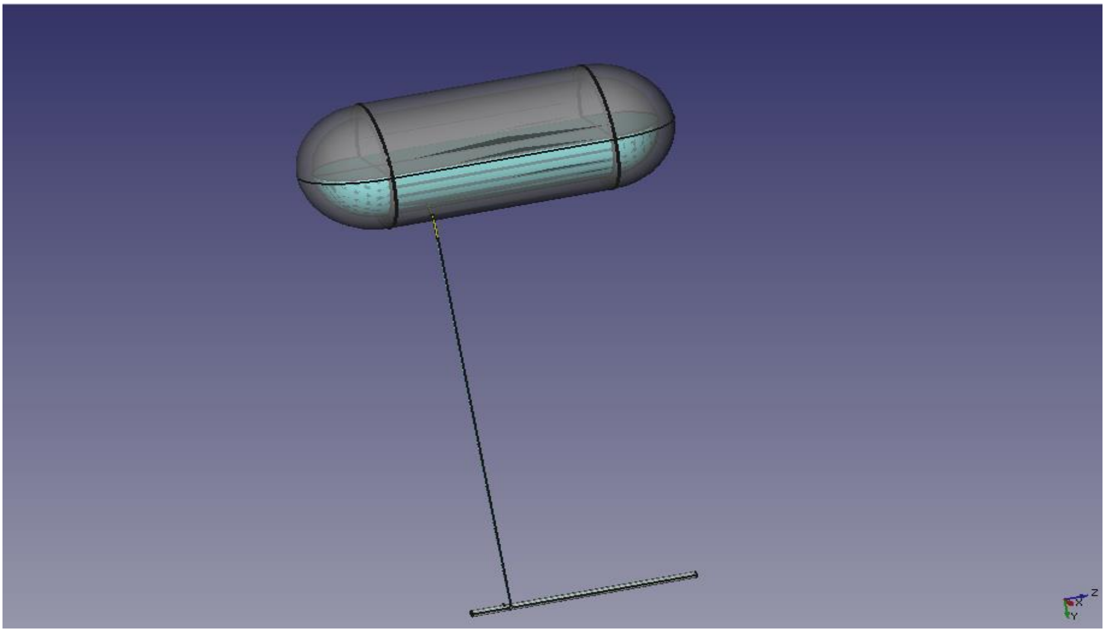
The velocity is change following this form:	سرعة هو تتغير حسب النموذج التالي:



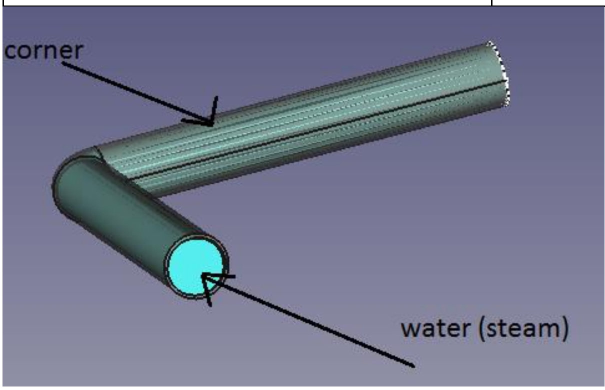
It is maximum in the middle than it decreases going towards the limits of the pipe and that because of friction of pipe in the fluid which illustrated in the following figure:	ذلك هو الحد الأقصى في منتصف يقلل من أنها تسير نحو حدود الأنابيب وأنه بسبب الاحتكاك من الأنابيب في السائل الذي هو موضح في الشكل التالي:

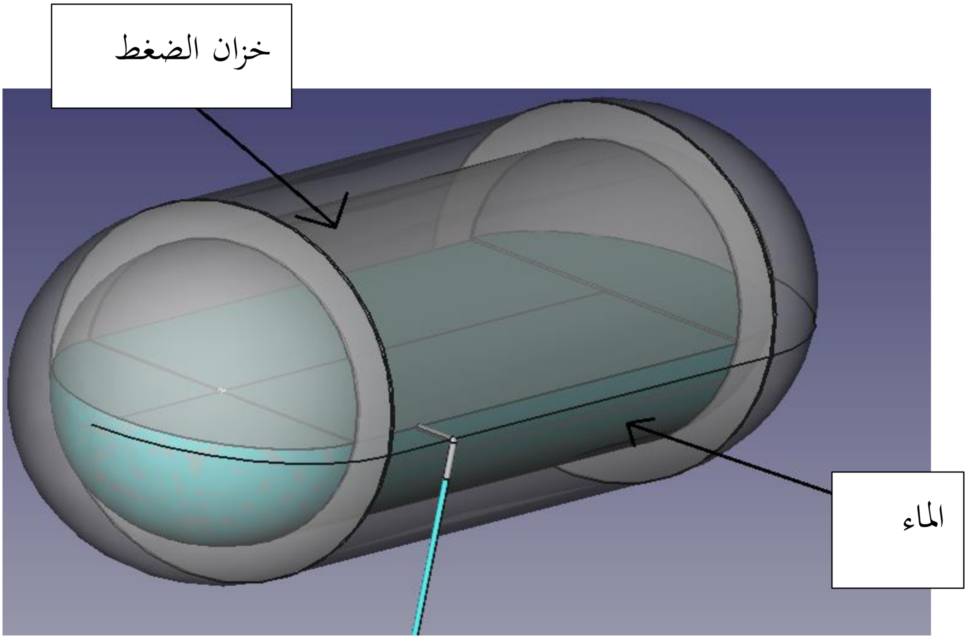


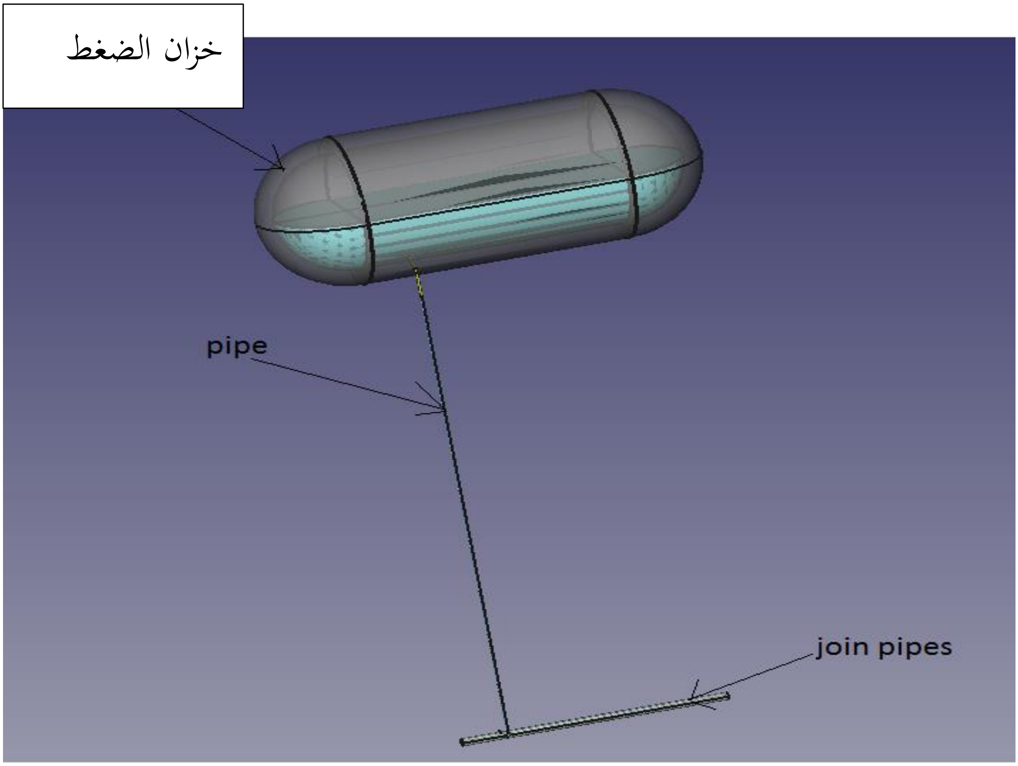
Now we introduce the incineration power plant design to Elmer software but it is impossible to accept the Full format so we introduce the water path only that illustrate in the design in the following figure:	الآن ونحن نقدم تصميم محطة للطاقة الحرق لبرنامج إلمر ولكن من المستحيل أن تقبل شكل كامل حتى ونحن نقدم مسار الماء فقط التي توضح في التصميم في الشكل التالي:



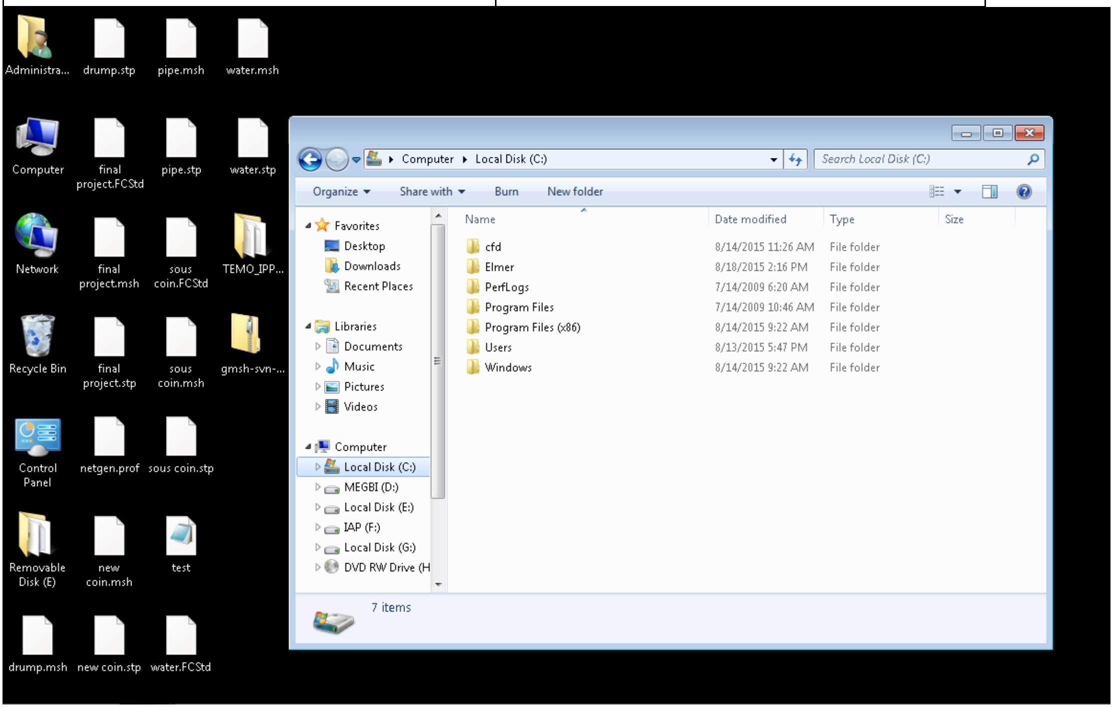
We have to know some notes:	علينا أن نعرف بعض الملاحظات:



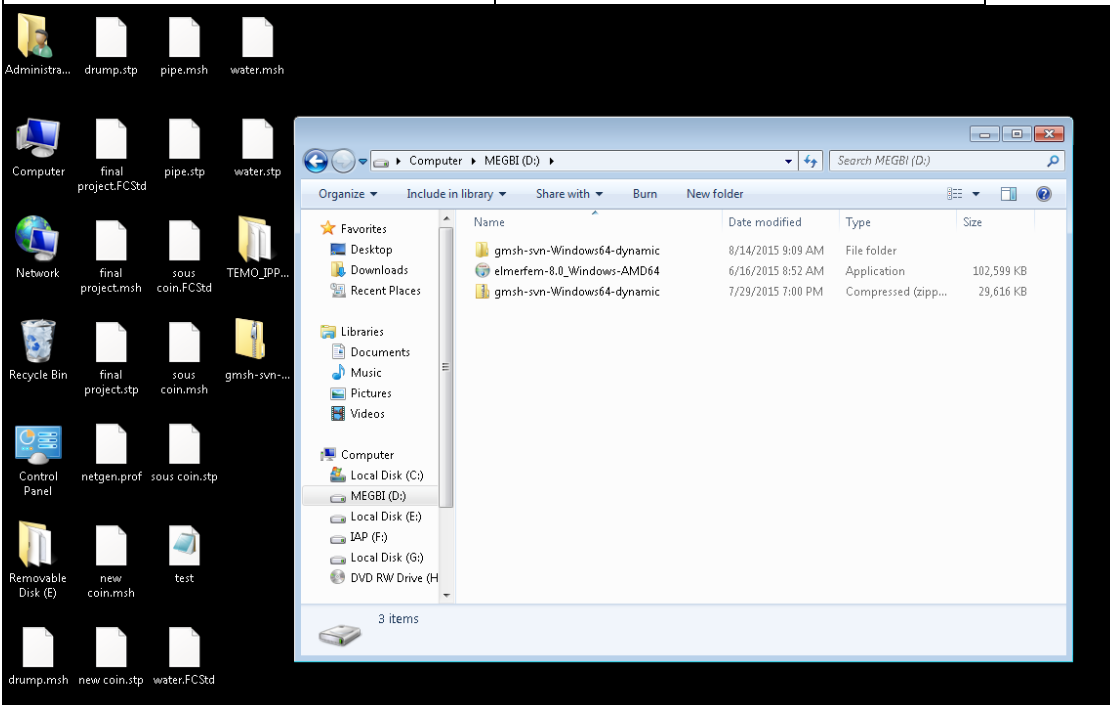

خزان الضغط
الماء


خزان الضغط
pipe
join pipes

Our study is difficult in a personal computer; so we do the studies in a quadriquard server attach in the personal computer. So we make study in the server and move result (files and figures) to the personal computer. The screens shown in the personal computer are: To view the Elmer files that we had save in the Local Disk (C):	دراستنا صعبة في جهاز كمبيوتر شخصي. لذلك نحن لا دراسات في ملقم quadriquard نعلق في أجهزة الكمبيوتر الشخصية. لذلك نحن جعل الدراسة في الخادم والخطوة نتيجة (الملفات والأرقام) لأجهزة الكمبيوتر الشخصية. لعرض ملفات إلمر أننا قد حفظناه في القرص المحلي (C):

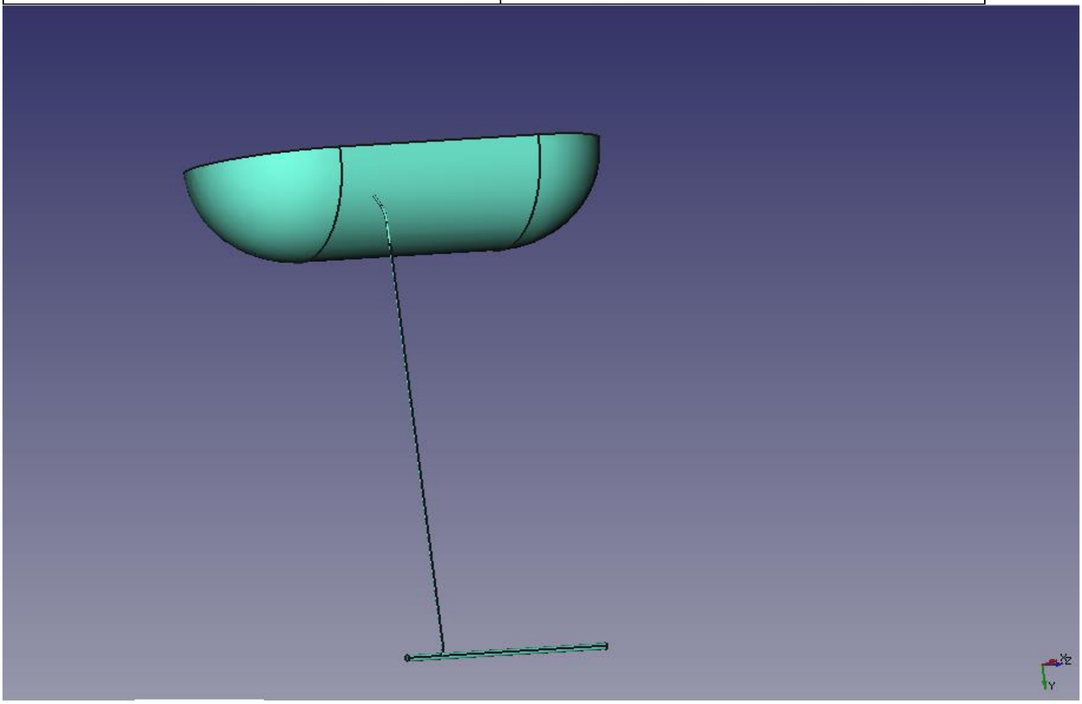


We have to enter to the Local Disk (C) then to the Elmer folder then chose the name of file that we need. Or for the Gmsh and Elmer place are in the MEGBI (D):	لدينا للدخول إلى القرص المحلي (C) ثم إلى المجلد إلمر ثم اختار اسم الملف الذي نحتاج إليه. أو لمكان Gmsh وإلمر هي في MEGBI (D):

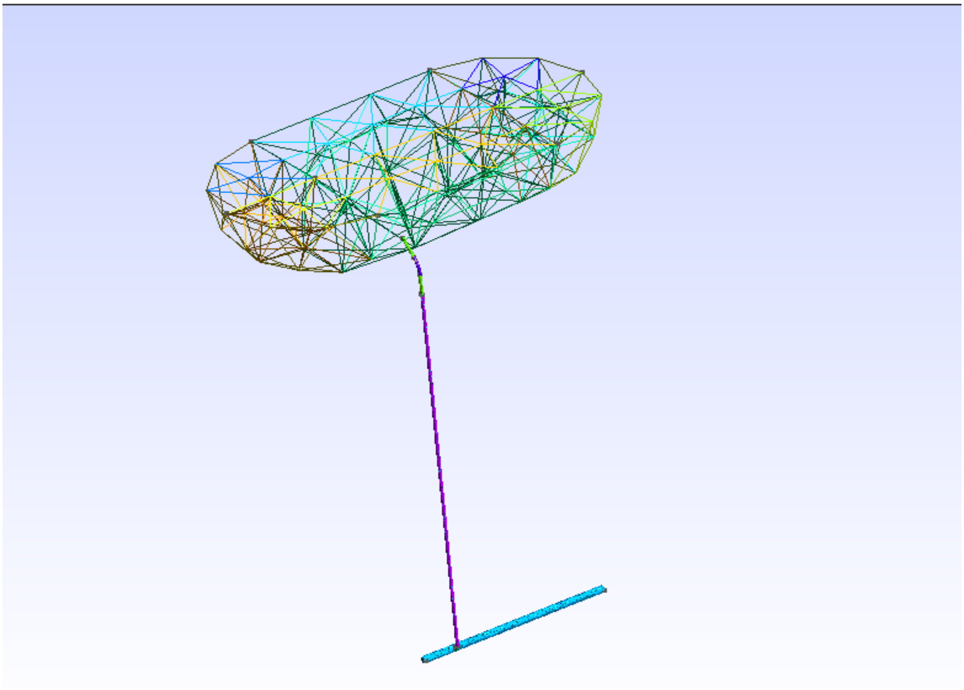


As we see the FreeCAD and Gmsh file are located in the Desktop but we can move it to a special folder that we can name FreeCAD or Gmsh or we can create folder to each type of files.	تقع في Gmsh وFreeCAD كما نرى الملف سطح المكتب ولكن يمكننا نقله إلى مجلد خاص أو Gmsh أو FreeCAD نتمكن من تسمية يمكننا إنشاء مجلد لكل نوع من الملفات.

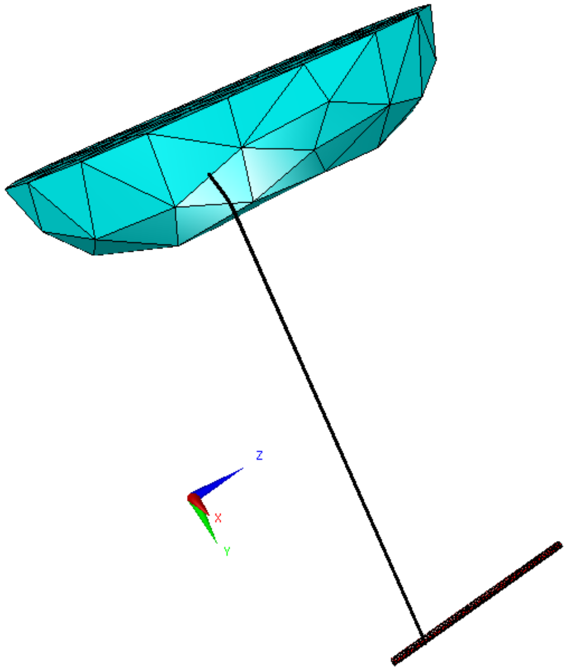
It is important to say that we have to draw the water like a material, because we make the conditions in the water (or steam according to temperature) in Elmer software; so our design will be:	من المهم أن أقول إن لدينا لرسم الماء مثل المواد، لأننا جعل الأوضاع في الماء (أو البخار وفقا لدرجة الحرارة) في برنامج إلمر. لذلك لدينا تصميم سيكون:



Now we have to discretize the design using gmsh or Elmer, but Elmer is unable to discretize a big design so we use gmsh:	الآن علينا أن نجزئ التصميم باستخدام gmsh أو إلمر، ولكن إلمر غير قادر على تجزئة تصميم كبير لذلك نستخدم gmsh:



We introduce the water design to the Elmer software with the initial conditions, velocity equation, and boundary conditions that we make in model-Elmer:	ونحن نقدم تصميم المياه لبرنامج إلمر مع الظروف الأولية، معادلة السرعة، وشروط الحدود التي نتخذها في نموذج إلمر:

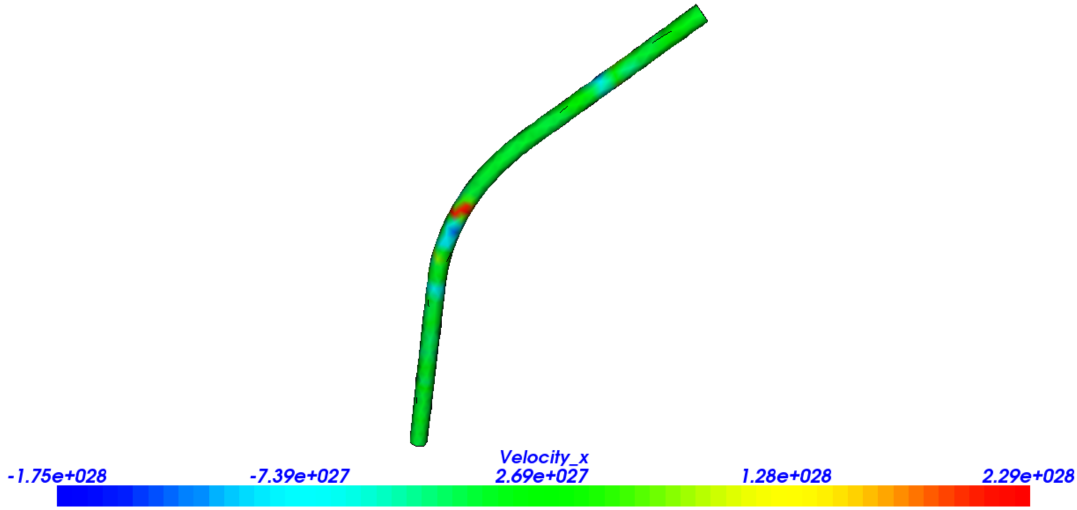


After we run the program following the finite element method, we obtain some files that seen below:	**بعد** أن تشغيل البرنامج وفقا للطريقة العناصر المحدودة، ونحن الحصول على بعض الملفات التي ينظر إليها أدناه:

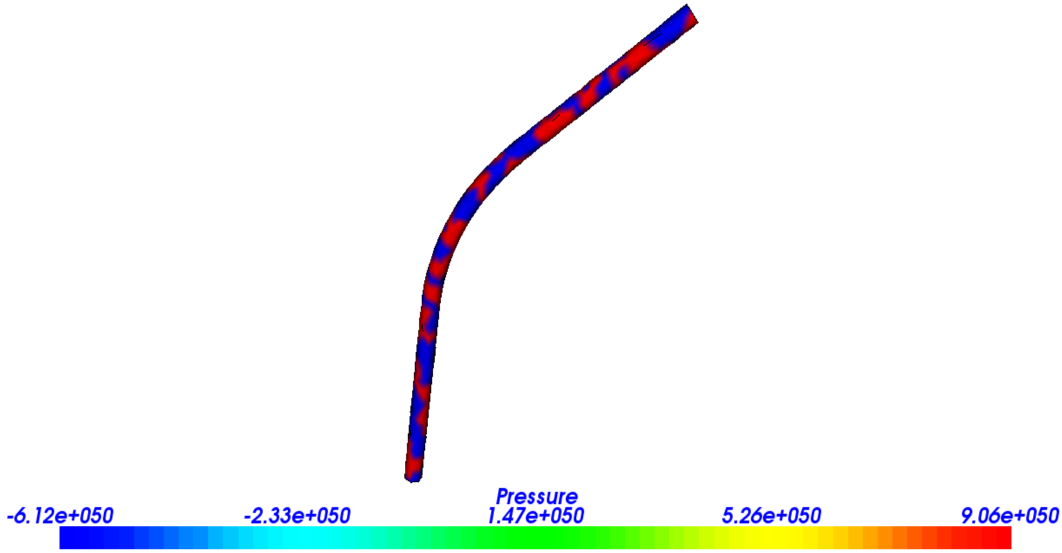
Name	Date modified	Type	Size
case.ep	18/8/2015 11:46 AM	EP File	1,564 KB
case.sif	20/8/2015 11:51 PM	SIF File	3 KB
egproject	17/8/2015 11:02 AM	XML File	96 KB
ELMERSOLVER_STARTINFO	20/8/2015 11:51 PM	File	1 KB
mesh.boundary	18/8/2015 11:44 AM	BOUNDARY File	322 KB
mesh.elements	18/8/2015 11:44 AM	ELEMENTS File	431 KB
mesh.header	18/8/2015 11:44 AM	HEADER File	1 KB
mesh.nodes	18/8/2015 11:44 AM	NODES File	161 KB
netgen.prof	20/8/2015 11:57 PM	PROF File	1 KB
water.FCStd	17/8/2015 11:02 AM	FCSTD File	11 KB
water.msh	17/8/2015 11:02 AM	MSH File	1,028 KB
water.stp	17/8/2015 11:02 AM	STP File	76 KB

Case.ep is the file that contains the velocity and pressure values. Case.sif is the file that contains the conditions introduced. Mesh.boundary is the file that contains number of boundary elements, number of elements belongs to the boundaries, the elements surround the boundary, type of codes of the elements, and the nodes of elements. Mesh.elements is the file that contains identification of the	Case.ep هو الملف الذي يحتوي على القيم السرعة والضغط. Case.sif هو الملف الذي يحتوي على الشروط قدم. Mesh.boundary هو الملف الذي يحتوي على عدد من العناصر الحدودية، وعدد من عناصر تنتمي إلى الحدود، والعناصر المحيطة الحدود، نوع من رموز العناصر، والعقد من العناصر. Mesh.elements هو الملف الذي يحتوي على التعرف على العناصر المادية الجسم لهذا العنصر، نوع من التعليمات البرمجية، والعقد من عنصر.

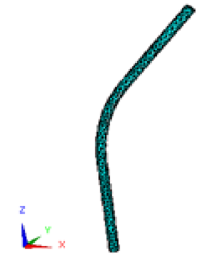
elements, body's material of this element, type of code, nodes of element. Mesh.header is the file that contains number of nodes, number of elements, and number of boundary elements. Mesh.node is the file that contains number of nodes, index of parallel execution nodes, and the node coordinates. Water.FCStd is the FreeCAD design file. Water.stp is the gmsh design file. And water.msh is the Elmer meshing file. The color of variable value of velocity and pressure illustrate:	Mesh.header هو الملف الذي يحتوي على عدد العقد، عدد من العناصر، وعدد من العناصر الحدود. Mesh.node هو الملف الذي يحتوي على عدد من العقد، مؤشر العقد التنفيذ المتوازي، وتنسق العقدة. Water.FCStd هو ملف تصميم FreeCAD. Water.stp هو ملف تصميم gmsh. وwater.msh هو ملف تشبك إلمر. لون قيمة المتغير من السرعة والضغط توضح في:

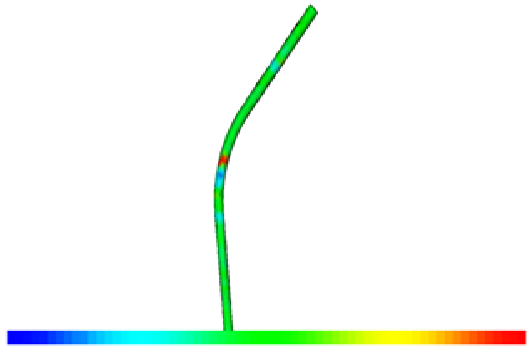


This figure of velocity values shows that the blue color identify the minimum value of velocity; then the value increases to reach the maximum in the red color.	هذا الرقم من القيم سرعة يدل على أن اللون الأزرق تحديد قيمة الحد الأدنى من سرعة. ثم يزيد القيمة لتصل إلى الحد الأقصى في اللون الأحمر.

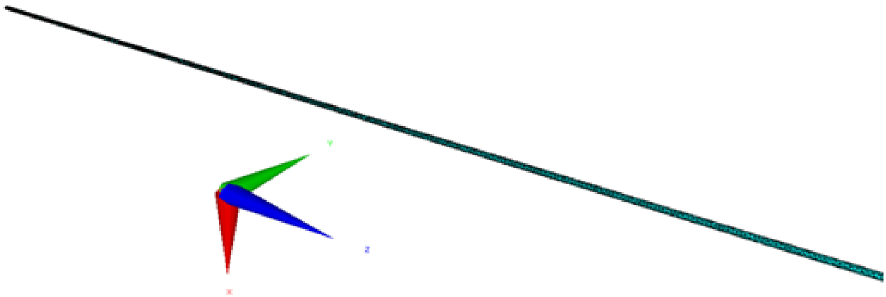


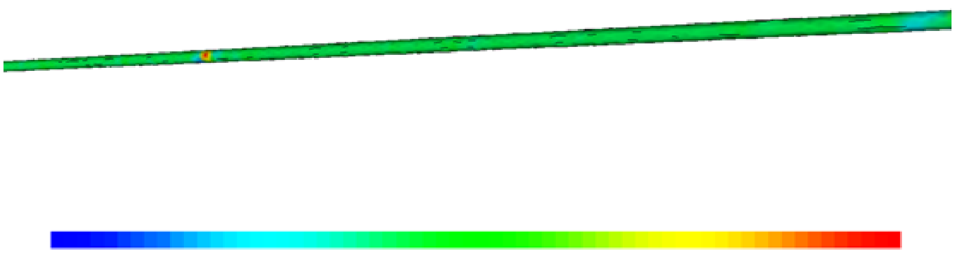
This figure of pressure values shows that the pressure is minimum in the blue color too, and increases until it reaches a maximum value in the red color. So we should interest to the position of green, yellow, and red color for velocity and pressure to now where be study should be fixed. For example the velocity illustrate like: In the corner:	هذا الرقم من قيم الضغط يدل على أن الضغط هو الحد الأدنى في اللون الأزرق أيضا، ويزيد حتى يصل إلى القيمة القصوى في اللون الأحمر. لذلك علينا أن مصلحة لموقف الأخضر والأصفر، والأحمر لون السرعة والضغط الآن حيث أن يجب أن تكون ثابتة الدراسة. على سبيل المثال سرعة توضح مثل: فى الركن:



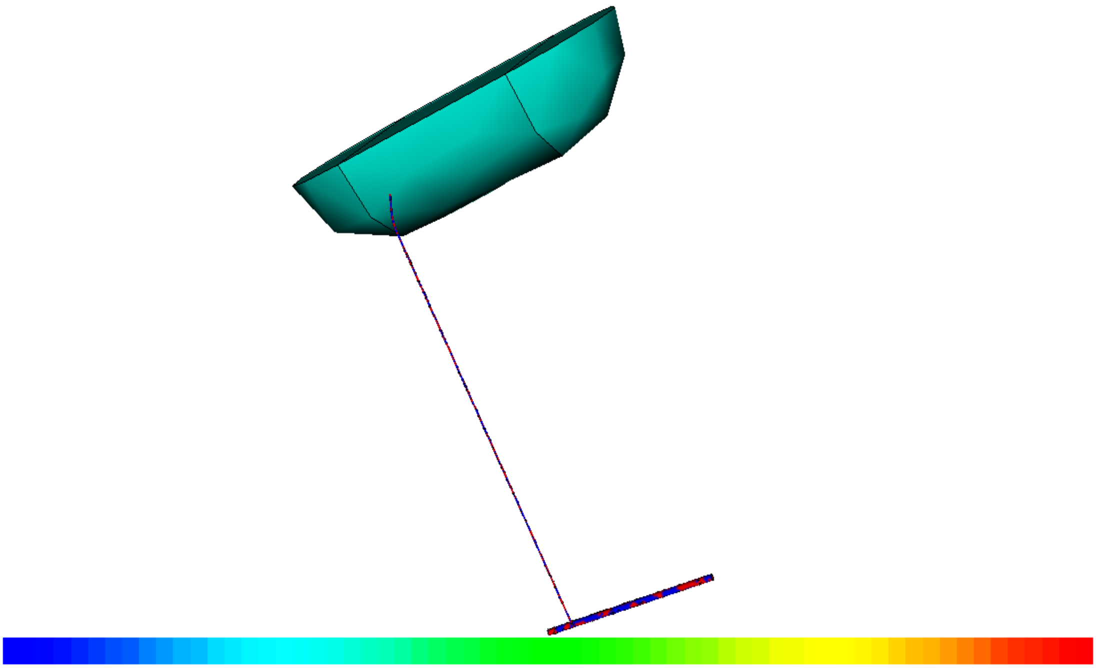


Into the pipe:	في الأنابيب:

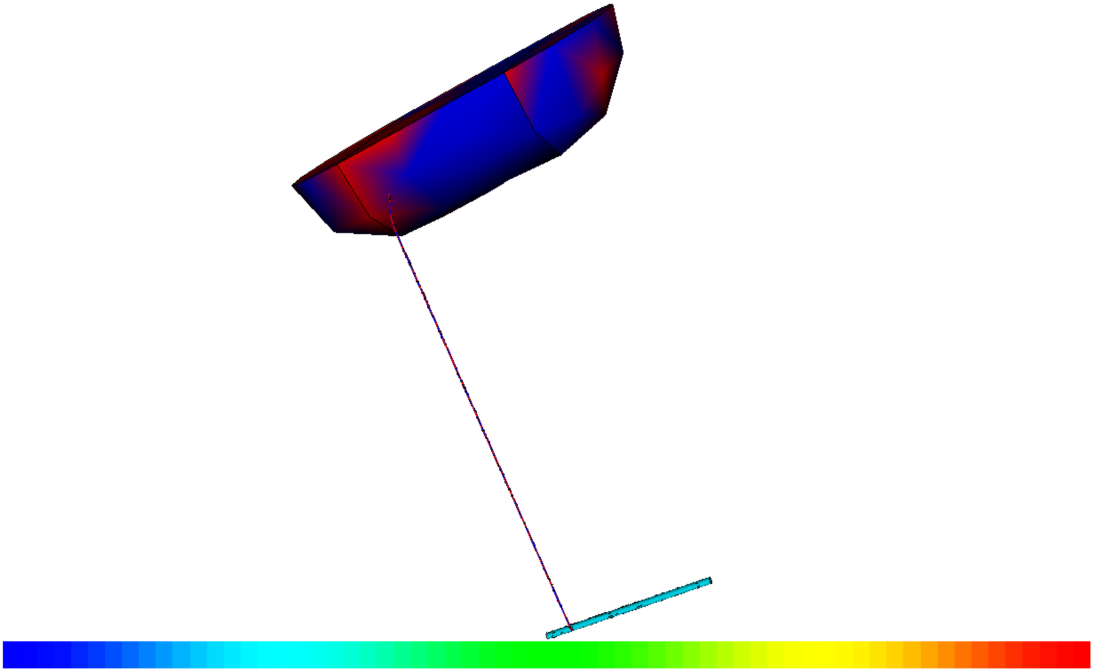




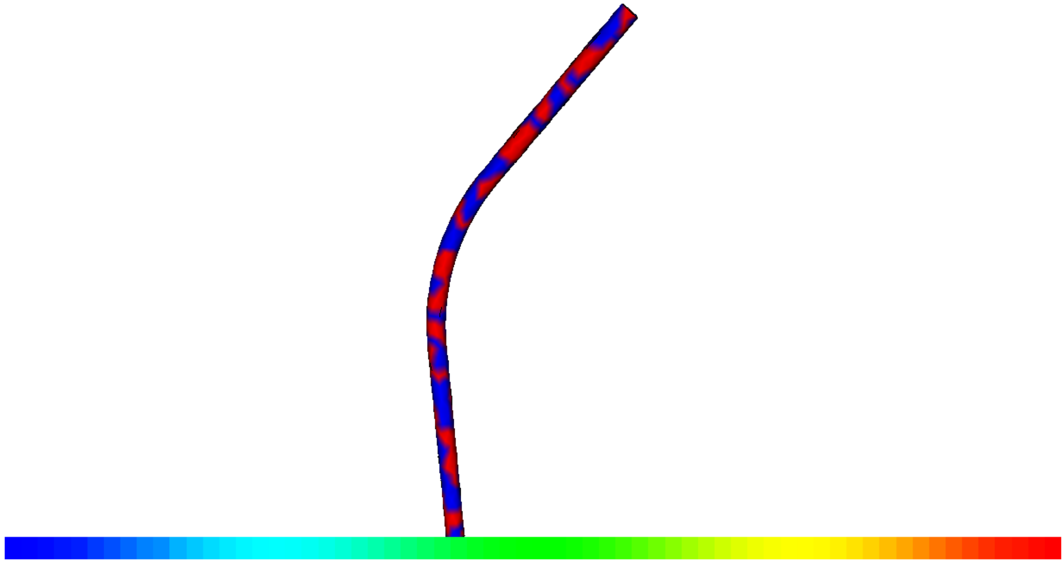
For the water path: The first path when water path from the drum into the pipe then to pipe that join pipes:	لمسار المياه: المسار الأول عند مسار المياه من خزان الضغط الى الأنابيب ثم إلى الأنبوب الذي يجمع الأنابيب:



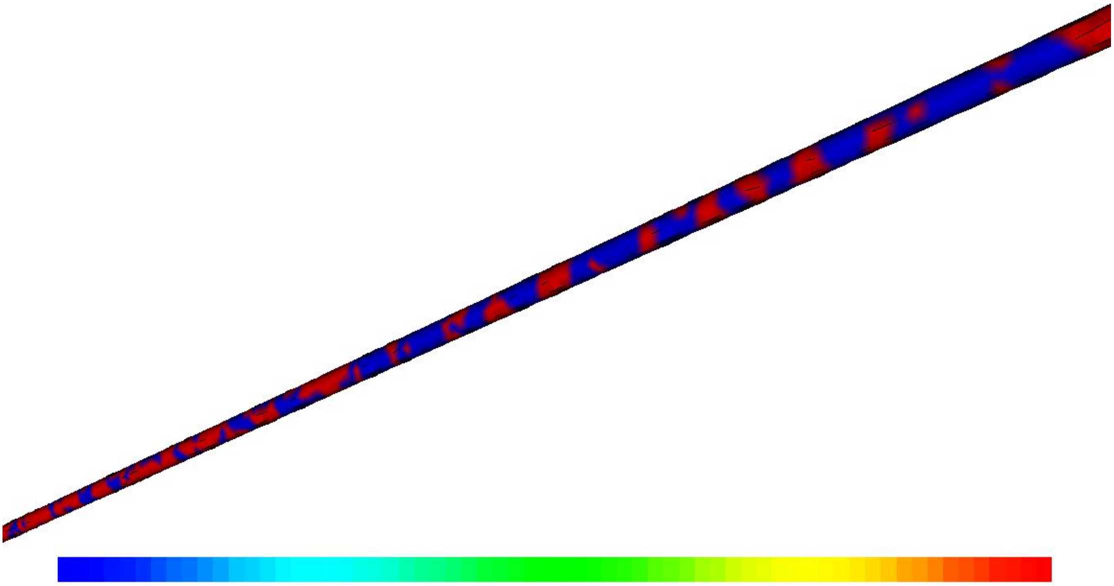
The second path when water path from the join pipes into the pipe then to drum:	المسار الثاني عندما مسار المياه من الانضمام الأنابيب في أنبوب ثم إلى خزان الضغط:



We can deduct that the velocity is maximum in the coin, and in the drum when the water rise, or in the join pipe when the water go down; so we have to take care of material when we will design the power plant. Now we move to the pressure illustrate: In the corner:	يمكننا أن تقتطع أن السرعة هي القصوى في عملة واحدة، وفي خزان الضغط عند ارتفاع منسوب المياه، أو في الانضمام الأنابيب عندما المياه تنخفض. لذلك لدينا لرعاية المواد عند وسوف نقوم بتصميم محطة توليد الكهرباء. الآن ننتقل إلى الضغط توضيح: فى الركن:

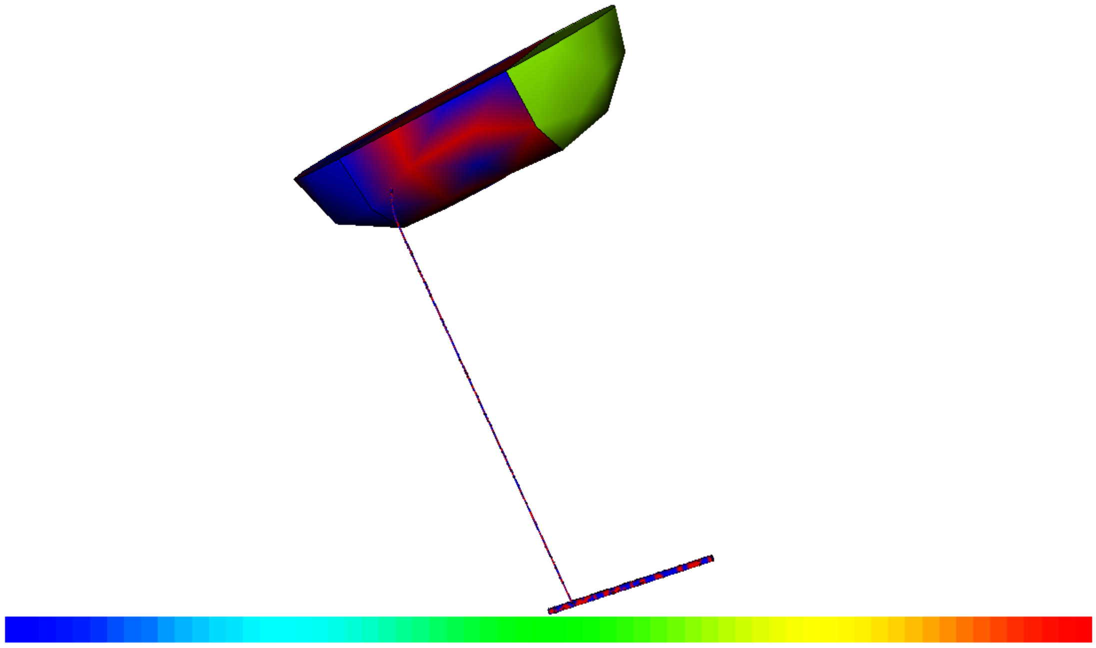


Into the pipe:	في الأنابيب:

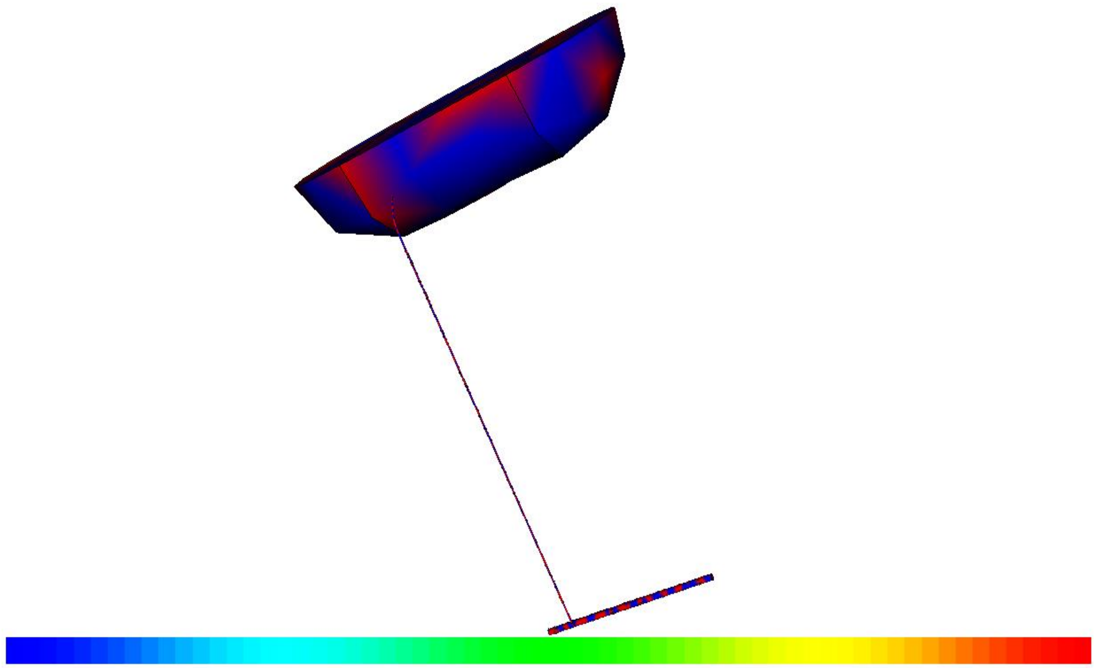


For the water path:	لمسار المياه:

The first path when water path from the drum into the pipe then to pipe that join pipes:	المسار الأول عند مسار المياه من خزان الضغط في الأنابيب ثم إلى الأنبوب الذي يجمع الأنابيب:



The second path when water path from the join pipes into the pipe then to خزان الضغط:	المسار الثاني عندما مسار المياه من الانضمام الأنابيب في أنبوب ثم إلى خزان الضغط:



يمكننا أن تقتطع أن الضغط يمكن أن يكون الحد الأقصى في كل من التصميم؛ لذلك لدينا لجعل المواد في محطة توليد الكهرباء التي يمكن أن تقاوم الضغط.

من المهم أن نقول أن الملفات التي تتضمن معلومات التصميم (سرعة والقيم الضغط) وتقع في DVD مرفق مع الكتاب.

11.1.4 مراجع

- Introduction to Finite Element Analysis (FEA) or Finite Element Method (FEM)
- **Finite Element Analysis**
  (MCEN 4173/5173)
  Fall, 2006
  Instructor: Dr. H. "Jerry" Qi

11.2 انشاء برنامج لتحليل مسألة ما في ميدان ديناميكيات الموائع الحسابية (د.م.ح.)

Writing down the governing equations onto the paper developing the appropriate numerical solution of these equations

writing the C++ program (by using already existing libraries as OpenFOAM) and putting it into the computer

going through all the trials and tribulations of making the program work properly

ويمكن استخدام البرنامج المفتوح OpenFoam لهاذا الغرض.

11.2.1 تحسيب السريان في زاوية باستخدام OpenFOAM

We have to insert program in workbenches list of FreeCAD using OpenFOAM codes. First; we should know OpenFOAM codes in Linux. The principal commands are established in this table:	علينا إدراج البرنامج في قائمة البدلاء من FreeCAD استخدام رموز OpenFOAM. أولا؛ يجب أن نعلم رموز OpenFOAM في Linux الاوامر. الرئيسية و المقامة في هذا الجدول:

Command	Description
cd	Changes Directory to dirname
cp	Copy source file into destination
mkdir	Create a new directory dirname
mv	Move (Rename) an oldname to newname.
pwd	Print current working directory.
rm	Remove (Delete) filename
rmdir	Delete an existing directory provided it is empty.
vi	Opens vi text editor

We write the program on OpenFOAM when we run it and have results:	نكتب البرنامج على OpenFOAM عندما نقوم بتشغيله يكون لها نتائج:

```
ogin as: meae
eae@192.168.1.1's password:
ast login: Sat Mar 28 13:38:24 2015 from 192.168.1.2
meae@server ~]$ pwd
home/meae
meae@server ~]$ cd ..
meae@server home]$ ll
otal 36
rwx------  2 bkerdi bkerdi 4096 Mar 29 12:45 bkerdi
rwx------ 14 fchaar fchaar 4096 Mar 29 17:21 fchaar
rwx------  2 fhamed fhamed 4096 Apr 14 10:29 fhamed
rwx------ 32 iap    iap    4096 Apr 11 12:20 iap
rwxr-xr-x 31 meae   meae   4096 Apr 14 11:12 meae
rwx------ 17 megbi  megbi  4096 Mar 27 10:02 megbi
meae@server home]$ meae
bash: meae: command not found
meae@server home]$ cd meae
meae@server ~]$ ll
otal 75488
rwxr-xr-x  1 root  root  28377109 May 15  2013 150513TEMO_last_-STPP_Report4_en
1_arab.pdf
rwxr-xr-x 12 meae  meae      4096 Dec 31  2013 Central Library
rwxr-xr-x  2 megbi megbi     4096 Apr  3  2010 Desktop
rwxr-xr-x  1 meae  meae     57782 Apr 23  2010 IAP-Logo.JPG
rwxrwxrwx  1 meae  meae        64 Aug  1  2014 link to scilab -> /home/meae/sci
oslab-x11-4.3-1.el5.i386.rpm_FILES/usr/bin/scilab
rwxr-xr-x  1 meae  meae  20456732 Feb 21  2010 martin_liu_dissertation_num_bren
kammer.pdf
rwxr-xr-x  5 meae  meae      4096 Jul 14  2010 OpenFOAM
rwxrwxr-x  2 meae  meae      4096 Jul 18  2011 pluto
rwxr-xr-x  1 meae  meae    386195 May 14  2010 promotion1_fzk
rwxr-xr-x  1 meae  meae  19379104 Jan 25  2014 scicoslab-x11-4.3-1.el5.i386.rpm
rwxr-xr-x  3 meae  meae      4096 Jan 25  2014 scicoslab-x11-4.3-1.el5.i386.rpm
FILES
rwxrwxr-x  2 meae  meae      4096 Aug  1  2014 spa.environ
rwxrwxr-x  4 meae  meae      4096 Jul 17  2011 tools
rwxrwxr-x  2 meae  meae      4096 Jun 21  2010 uebung
rwx------  5 meae  meae      4096 Jan 25  2014 usr
rwxrwxr-x 15 meae  meae      4096 Jul 18  2011 xemacs-21.4.20
rwxr-xr-x  1 meae  meae   8408589 Jul 13  2010 xemacs-21.4.20.tar.tar
meae@server ~]$ cd OpenFOAM/
meae@server OpenFOAM]$ ll
otal 366500
rw-------  1 meae meae       310 Jun 12  2010 Installation Notes
```

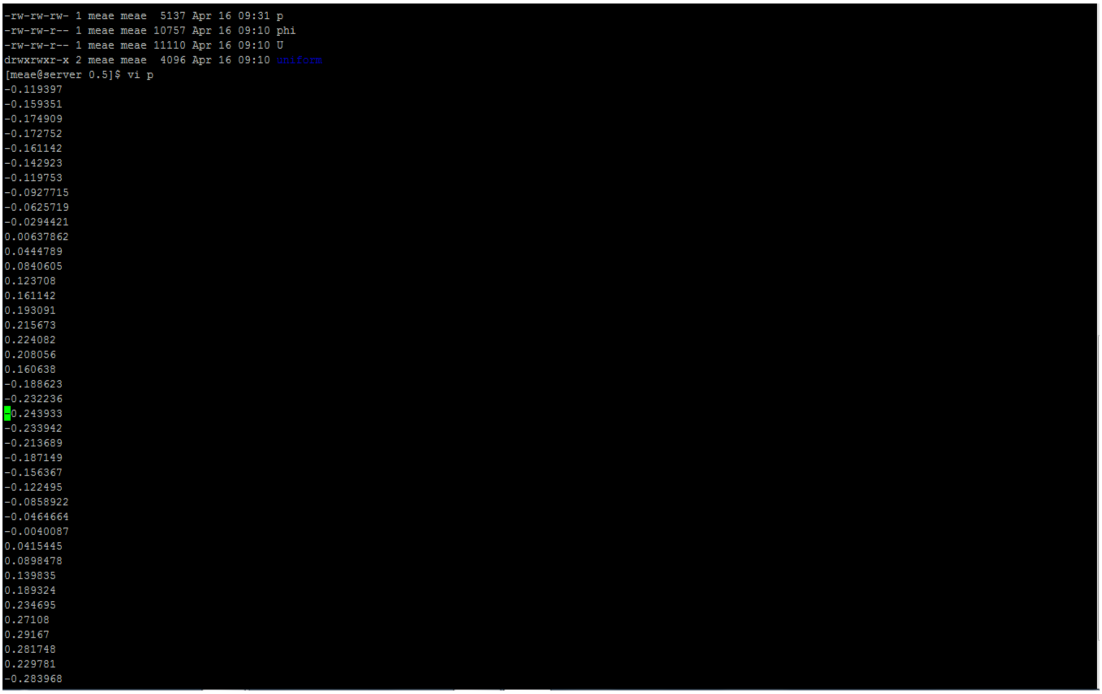
```
[fhamed@server meae]$ ll
total 75488
-rwxr-xr-x  1 root  root  28377109 May 15  2013 150513TEMO_last_-STPP_Report4_en
gl_arab.pdf
drwxr-xr-x 12 meae  meae      4096 Dec 31  2013 Central_Library
drwxr-xr-x  2 megbi megbi     4096 Apr  3  2010 Desktop
-rwxr-xr-x  1 meae  meae     57782 Apr 23  2010 IAP-Logo.JPG
lrwxrwxrwx  1 meae  meae        64 Aug  1  2014 link to scilab -> /home/meae/sci
coslab-x11-4.3-1.el5.i386.rpm_FILES/usr/bin/scilab
-rwxr-xr-x  1 meae  meae  20456732 Feb 21  2010 martin_liu_dissertation_num_bren
nkammer.pdf
drwxr-xr-x  5 meae  meae      4096 Jul 14  2010 OpenFOAM
drwxrwxr-x  2 meae  meae      4096 Jul 18  2011 pluto
-rwxr-xr-x  1 meae  meae    386195 May 14  2010 promotion1_fzk
-rwxr-xr-x  1 meae  meae  19379104 Jan 25  2014 scicoslab-x11-4.3-1.el5.i386.rpm
drwxr-xr-x  3 meae  meae      4096 Jan 25  2014 scicoslab-x11-4.3-1.el5.i386.rpm
_FILES
drwxrwxr-x  2 meae  meae      4096 Aug  1  2014 spa.environ
drwxrwxr-x  4 meae  meae      4096 Jul 17  2011 tools
drwxrwxr-x  2 meae  meae      4096 Jun 21  2010 uebung
drwx------  5 meae  meae      4096 Jan 25  2014 usr
drwxrwxr-x 15 meae  meae      4096 Jul 18  2011 xemacs-21.4.20
-rwxr-xr-x  1 meae  meae   8408589 Jul 13  2010 xemacs-21.4.20.tar.tar
[fhamed@server meae]$ cd OpenFOAM/
[fhamed@server OpenFOAM]$ ll
total 366500
-rw-------  1 meae meae       310 Jun 12  2010 Installation Notes
-rw-------  1 meae meae         0 Jun 12  2010 Installation Notes~
drwxrwxr-x  3 meae meae      4096 Jul 14  2010 meae-1.6
drwxrwxr-x 11 meae meae      4096 Sep 24  2010 OpenFOAM-1.6
-rwxr-xr-x  1 meae meae 241760751 Jun  9  2010 OpenFOAM-1.6.General.gtgz
drwxrwxr-x 15 meae meae      4096 Jun  9  2010 ThirdParty-1.6
-rwxr-xr-x  1 meae meae 133110883 Jun  9  2010 ThirdParty-1.6.General.gtgz
[fhamed@server OpenFOAM]$ cd OpenFOAM-1.6
[fhamed@server OpenFOAM-1.6]$ ll
total 81260
-rwxr-x---  1 meae meae      366 Jul 24  2009 Allwmake
drwxrwxr-x  6 meae meae     4096 Jun  9  2010 applications
drwxrwxr-x  4 meae meae     4096 Jun  9  2010 bin
-rw-r-----  1 meae meae    17994 May  1  2008 COPYING
drwxrwxr-x  5 meae meae     4096 Jun  9  2010 doc
drwxrwxr-x  4 meae meae     4096 Jun  9  2010 etc
drwxrwxr-x  4 meae meae     4096 Jun  9  2010 lib
drwxrwxr-x  5 meae meae     4096 Jun  9  2010 OpenFOAM-1.6
```

```
total 366500
-rw-------  1 meae meae       310 Jun 12  2010 Installation Notes
-rw-------  1 meae meae         0 Jun 12  2010 Installation Notes~
drwxrwxr-x  3 meae meae      4096 Jul 14  2010 meae-1.6
drwxrwxr-x 11 meae meae      4096 Sep 24  2010 OpenFOAM-1.6
-rwxr-xr-x  1 meae meae 241760751 Jun  9  2010 OpenFOAM-1.6.General.gtgz
drwxrwxr-x 15 meae meae      4096 Jun  9  2010 ThirdParty-1.6
-rwxr-xr-x  1 meae meae 133110883 Jun  9  2010 ThirdParty-1.6.General.gtgz
[fhamed@server OpenFOAM]$ cd OpenFOAM-1.6
[fhamed@server OpenFOAM-1.6]$ ll
total 81260
-rwxr-x---  1 meae meae      366 Jul 24  2009 Allwmake
drwxrwxr-x  6 meae meae     4096 Jun  9  2010 applications
drwxrwxr-x  4 meae meae     4096 Jun  9  2010 bin
-rw-r-----  1 meae meae    17994 May  1  2008 COPYING
drwxrwxr-x  5 meae meae     4096 Jun  9  2010 doc
drwxrwxr-x  4 meae meae     4096 Jun  9  2010 etc
drwxrwxr-x  4 meae meae     4096 Jun  9  2010 lib
drwxrwxr-x  5 meae meae     4096 Jun  9  2010 OpenFOAM-1.6
-rwxr-xr-x  1 meae meae 41587474 Jun  8  2010 OpenFOAM-1.6.linuxGccDPOpt.gtgz
-rwxr-xr-x  1 meae meae 41315397 Jun  9  2010 OpenFOAM-1.6.linuxGccSPOpt.gtgz
-rw-r-----  1 meae meae     8813 Jul 27  2009 README
-rw-r-----  1 meae meae    15311 Jul 27  2009 README.html
-rw-r-----  1 meae meae    18461 Jul 27  2009 ReleaseNotes-1.6
-rw-r-----  1 meae meae    32656 Jul 27  2009 ReleaseNotes-1.6.html
drwxrwxr-x 28 meae meae     4096 Jun  9  2010 src
drwxrwxr-x 15 meae meae     4096 Jun  9  2010 tutorials
drwxrwxr-x  6 meae meae     4096 Jun  9  2010 wmake
[fhamed@server OpenFOAM-1.6]$ cd tutorials/
[fhamed@server tutorials]$ ll
total 132
-rwxr-x---  1 meae meae 1779 May 13  2009 Allclean
-rwxr-x---  1 meae meae 3011 May 13  2009 Allrun
-rwxr-x---  1 meae meae 5710 May 13  2009 Alltest
drwxrwxr-x  5 meae meae 4096 Jun  9  2010 basic
drwxrwxr-x  5 meae meae 4096 Jun  9  2010 combustion
drwxrwxr-x 10 meae meae 4096 Jun  9  2010 compressible
drwxrwxr-x  4 meae meae 4096 Jun  9  2010 discreteMethods
drwxrwxr-x  3 meae meae 4096 Jun  9  2010 DNS
drwxrwxr-x  4 meae meae 4096 Jun  9  2010 electromagnetics
drwxrwxr-x  3 meae meae 4096 Jun  9  2010 financial
drwxrwxr-x  8 meae meae 4096 Jun  9  2010 heatTransfer
drwxrwxr-x 13 meae meae 4096 Jun  9  2010 incompressible
drwxrwxr-x  6 meae meae 4096 Jun  9  2010 lagrangian
```

```
drwxrwxr-x 10 meae meae 4096 Jun  9  2010 multiphase
drwxrwxr-x  4 meae meae 4096 Jun  9  2010 stressAnalysis
[fhamed@server tutorials]$ cd incompressible/
[fhamed@server incompressible]$ ll
total 88
drwxrwxr-x 4 meae meae 4096 Jun  9  2010 boundaryFoam
drwxrwxr-x 3 meae meae 4096 Jun  9  2010 channelFoam
drwxrwxr-x 6 meae meae 4096 Jun  9  2010 icoFoam
drwxrwxr-x 4 meae meae 4096 Jun  9  2010 MRFSimpleFoam
drwxrwxr-x 3 meae meae 4096 Jun  9  2010 nonNewtonianIcoFoam
drwxrwxr-x 3 meae meae 4096 Jun  9  2010 pimpleDyMFoam
drwxrwxr-x 3 meae meae 4096 Jun  9  2010 pimpleFoam
drwxrwxr-x 4 meae meae 4096 Jun  9  2010 pisoFoam
drwxrwxr-x 3 meae meae 4096 Jun  9  2010 shallowWaterFoam
drwxrwxr-x 6 meae meae 4096 Jun  9  2010 simpleFoam
drwxrwxr-x 4 meae meae 4096 Jun  9  2010 simpleSRFFoam
[fhamed@server incompressible]$ cd icoFoam/
[fhamed@server icoFoam]$ ll
total 56
-rwxr-x--- 1 meae meae  381 Feb 17  2009 Allclean
-rwxr-x--- 1 meae meae 2797 Jul  9  2009 Allrun
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Jun  9  2010 cavity
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Jun  9  2010 cavityClipped
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Jun  9  2010 cavityGrade
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Jun  9  2010 elbow
-rw-r----- 1 meae meae  160 Jul  9  2009 resetFixedWallsScr
[fhamed@server icoFoam]$ cd cavity
[fhamed@server cavity]$ ll
total 24
drwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Jun  9  2010 0
drwxrwxr-x 3 meae meae 4096 Jun  9  2010 constant
drwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Jun  9  2010 system
[fhamed@server cavity]$ cd constant/
[fhamed@server constant]$ ll
total 16
drwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Jun  9  2010 polyMesh
-rw-r----- 1 meae meae  917 Jul 23  2009 transportProperties
[fhamed@server constant]$ cd polyMesh/
[fhamed@server polyMesh]$ ll
total 16
-rw-r----- 1 meae meae 1346 Jul 24  2009 blockMeshDict
-rw-r----- 1 meae meae 1228 Jul 23  2009 boundary
[fhamed@server polyMesh]$ cd blockMeshDict
-bash: cd: blockMeshDict: Not a directory
```

```
drwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Jun  9  2010 system
[fhamed@server cavity]$ cd constant/
[fhamed@server constant]$ ll
total 16
drwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Jun  9  2010 polyMesh
-rw-r----- 1 meae meae  917 Jul 23  2009 transportProperties
[fhamed@server constant]$ cd polyMesh/
[fhamed@server polyMesh]$ ll
total 16
-rw-r----- 1 meae meae 1346 Jul 24  2009 blockMeshDict
-rw-r----- 1 meae meae 1228 Jul 23  2009 boundary
[fhamed@server polyMesh]$ cd blockMeshDict
-bash: cd: blockMeshDict: Not a directory
[fhamed@server polyMesh]$ chown blockMeshDict
chown: missing operand after `blockMeshDict'
Try `chown --help' for more information.
[fhamed@server polyMesh]$ chown --help blockMeshDict
Usage: chown [OPTION]... [OWNER][:[GROUP]] FILE...
  or:  chown [OPTION]... --reference=RFILE FILE...
Change the owner and/or group of each FILE to OWNER and/or GROUP.
With --reference, change the owner and group of each FILE to those of RFILE.

  -c, --changes          like verbose but report only when a change is made
      --dereference      affect the referent of each symbolic link, rather
                         than the symbolic link itself (this is the default)
  -h, --no-dereference   affect each symbolic link instead of any referenced
                         file (useful only on systems that can change the
                         ownership of a symlink)
      --from=CURRENT_OWNER:CURRENT_GROUP
                         change the owner and/or group of each file only if
                         its current owner and/or group match those specified
                         here.  Either may be omitted, in which case a match
                         is not required for the omitted attribute.
      --no-preserve-root do not treat `/' specially (the default)
      --preserve-root    fail to operate recursively on `/'
  -f, --silent, --quiet  suppress most error messages
      --reference=RFILE  use RFILE's owner and group rather than
                         the specifying OWNER:GROUP values
  -R, --recursive        operate on files and directories recursively
  -v, --verbose          output a diagnostic for every file processed

The following options modify how a hierarchy is traversed when the -R
option is also specified.  If more than one is specified, only the final
one takes effect.
```

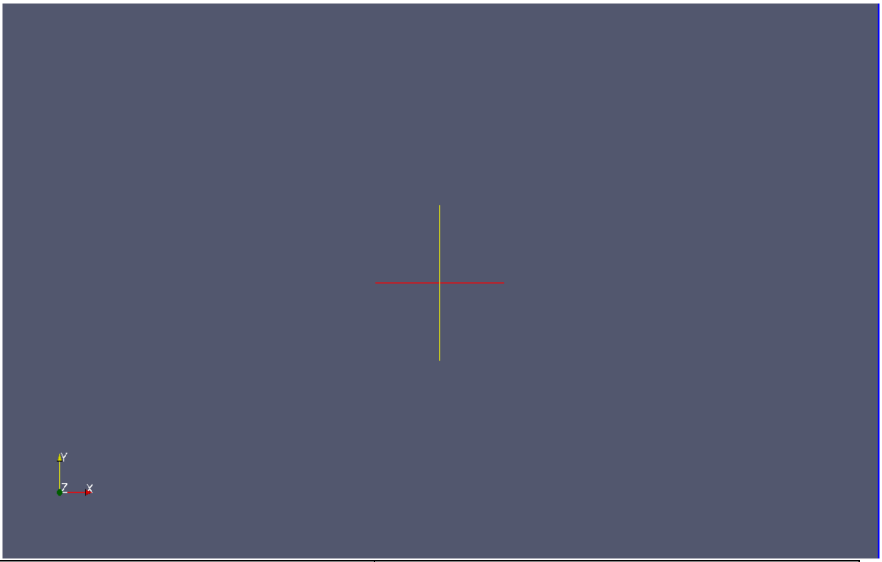
After enter in cavity file we should run program using Allrun we obtain the values of p for example in each point already seen in vertices:	بعدcavity إدخال في ملف تجويف علينا تشغيل البرنامج باستخدام Allrun نحصل على قيم p على سبيل المثال في كل نقطة رأينا بالفعل في القمم:



```
-rw-rw-rw- 1 meae meae  5137 Apr 16 09:31 p
-rw-rw-r-- 1 meae meae 10757 Apr 16 09:10 phi
-rw-rw-r-- 1 meae meae 11110 Apr 16 09:10 U
drwxrwxr-x 2 meae meae  4096 Apr 16 09:10 uniform
[meae@server 0.5]$ vi p
-0.119397
-0.159351
-0.174909
-0.172752
-0.161142
-0.142923
-0.119753
-0.0927715
-0.0625719
-0.0294421
0.00637862
0.0444789
0.0840605
0.123708
0.161142
0.193091
0.215673
0.224082
0.208056
0.160638
-0.188623
-0.232236
-0.243933
-0.233942
-0.213689
-0.187149
-0.156367
-0.122495
-0.0858922
-0.0464664
-0.0040087
0.0415445
0.0898478
0.139835
0.189324
0.234695
0.27108
0.29167
0.281748
0.229781
-0.283968
```

Visualization using Paraview:

Second; we have to visualize the program using paraview.	ثانيا؛ علينا أن نصور البرنامج باستخدامparaview.

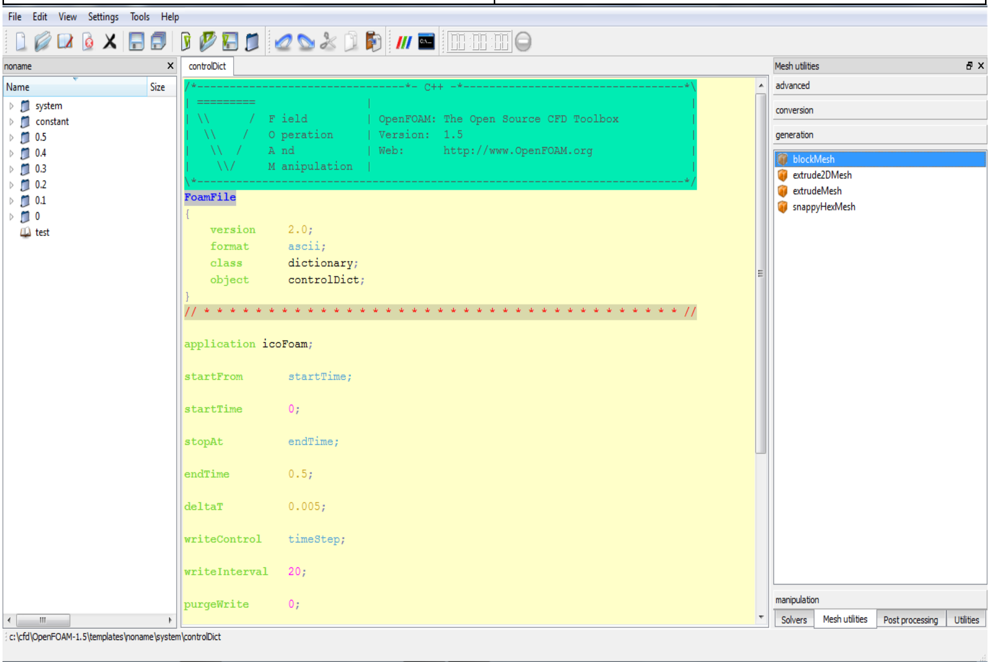


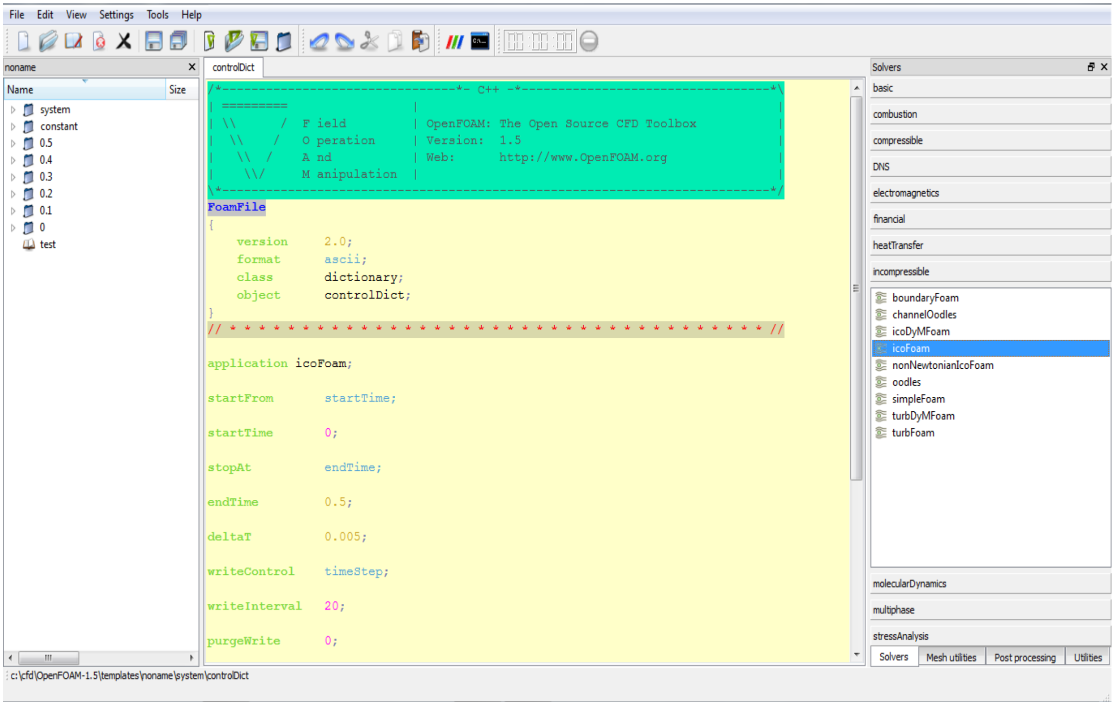
But our problem is to transport data from Linux OpenFOAM to windows paraview; we have to find format to transport data. 1. We show the VTK format to transport:	ولكن مشكلتنا هي لنقل البيانات من إلى النوافذ OpenFOAMلينكس. paraview علينا أن نجد صيغة لنقل البيانات. لنقل:VTK1. نرى صيغة

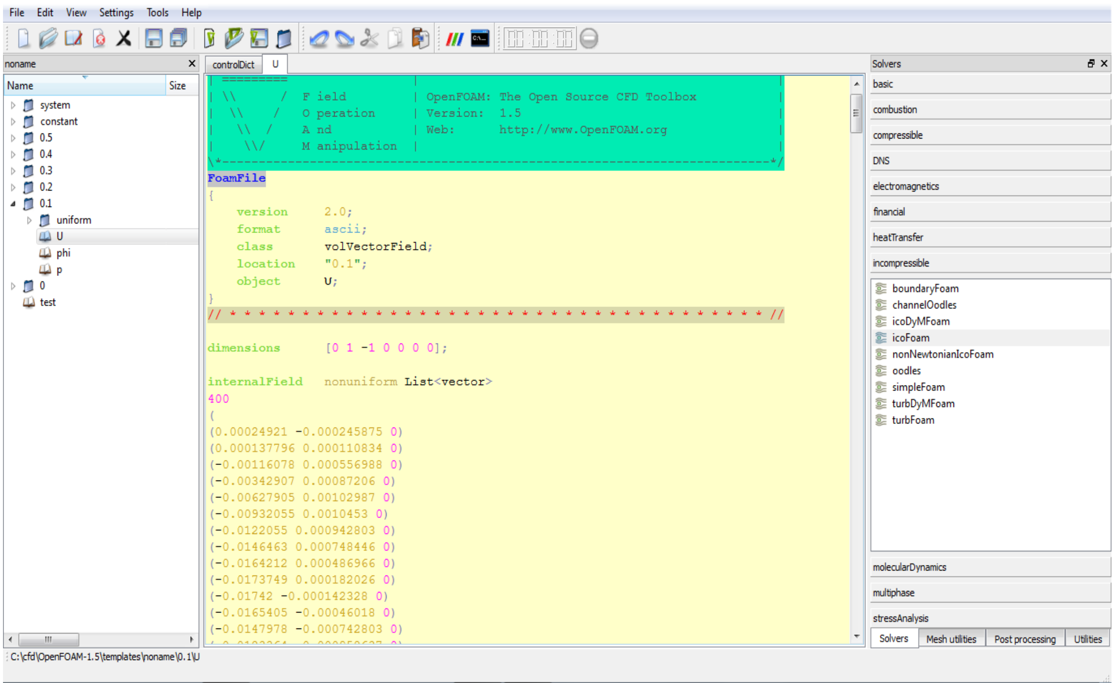
```
-bash: touch.OpenFoam: command not found
[meae@server icoFoam]$ foamToVTK
/*---------------------------------------------------------------------------*\
| =========                 |                                                 |
| \\      /  F ield         | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox           |
|  \\    /   O peration     | Version:  1.6                                   |
|   \\  /    A nd           | Web:      www.OpenFOAM.org                      |
|    \\/     M anipulation  |                                                 |
\*---------------------------------------------------------------------------*/
Build  : 1.6-53b7f692aa41
Exec   : foamToVTK
Date   : Apr 14 2015
Time   : 12:39:53
Host   : server
PID    : 5342
Case   : /home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFoam
nProcs : 1
SigFpe : Enabling floating point exception trapping (FOAM_SIGFPE).

// * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * //
Create time



cannot open file

file: /home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFoam/system/c
ontrolDict at line 0.

    From function regIOobject::readStream()
    in file db/regIOobject/regIOobjectRead.C at line 62.

FOAM exiting

[meae@server icoFoam]$ LL
-bash: LL: command not found
[meae@server icoFoam]$ ll
total 56
-rwxr-x--- 1 meae meae  381 Feb 17  2009 Allclean
-rwxr-x--- 1 meae meae 2797 Jul  9  2009 Allrun
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Apr 14 10:50 cavity
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Jun  9  2010 cavityClipped
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Jun  9  2010 cavityGrade
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Jun  9  2010 elbow
```

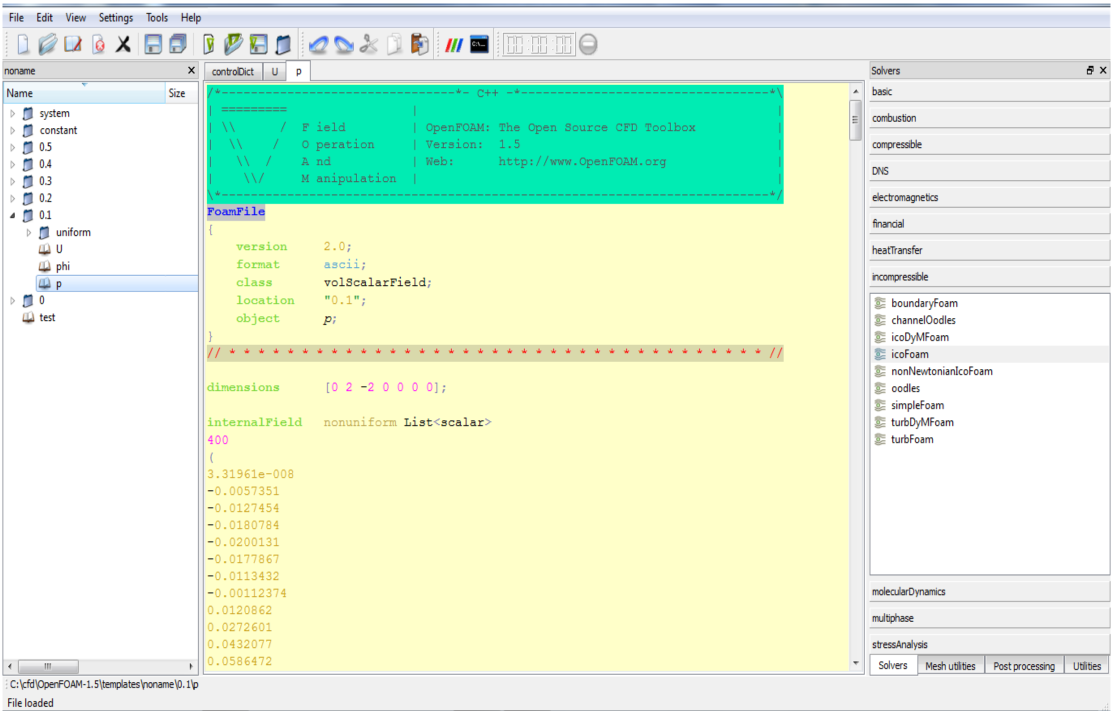
Then we copy the file and try to open it using paraview but we have not seen the cavity.	ثم ننسخ الملف محاولة لفتحه لكننا لم نر باستخدامparaview تجويفcavity.
We try now to run OpenFOAM on windows to visualize the program from OpenFOAM solver on windows to paraview for visualization.	ونحن نحاول الآن لتشغيل على ويندوز لتصور OpenFOAM على OpenFOAMالبرنامج من النوافذ لparaview.للتصور
First; we click on blockMesk in Mesh Utilities to discretize the cavity program.	في blockMeskأولا؛ نحن انقر على discretizeشبكة المرافق إلى برنامج تجويف.

Second; we come back to the solver and choose our study conditions (incompressible →icoFoam) to obtain the pressure, velocity and phi values:	ثانيا؛ نعود إلى المحلل واختيار ظروف دراستنا (incompressible →icoFoam) للحصول على ضغط والسرعة وقيم فاي phi:

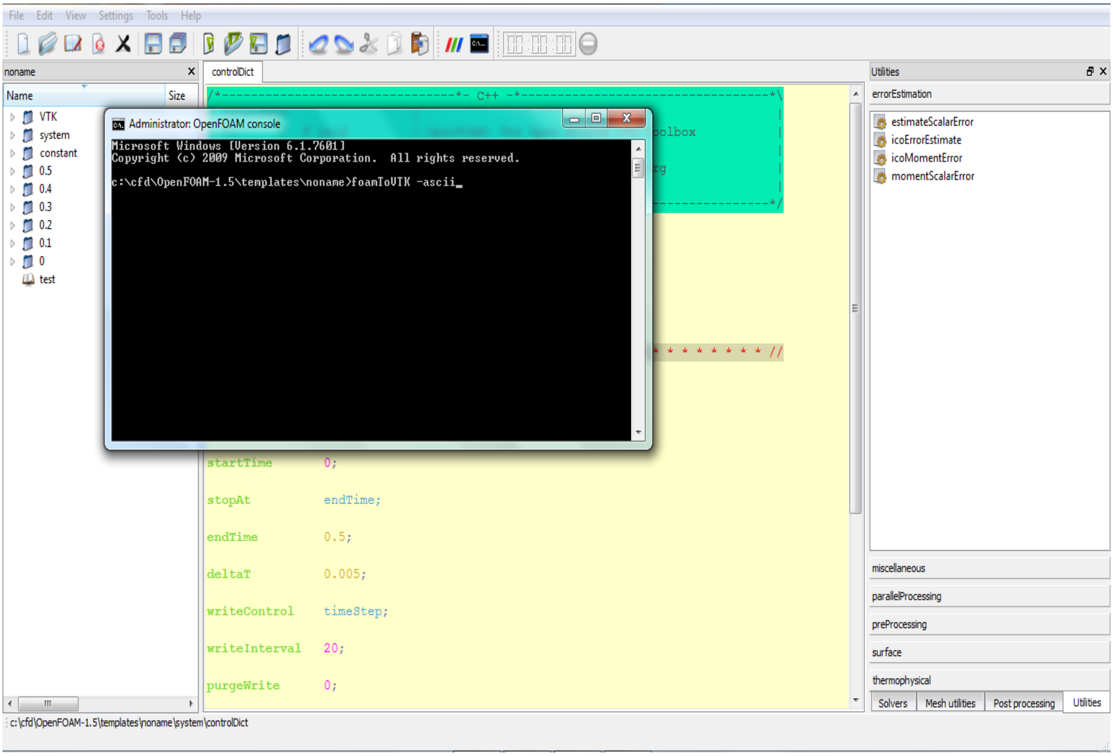



File Edit View Settings Tools Help
noname
Name Size
system
constant
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
test
controlDict
/*---------------------------------*- C++ -*----------------------------------*\
=========	
\\ / F ield	OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
\\ / O peration	Version: 1.5
\\ / A nd	Web: http://www.OpenFOAM.org
\\/ M anipulation	
---/
FoamFile
{
version 2.0;
format ascii;
class dictionary;
object controlDict;
}
// * //
application icoFoam;
startFrom startTime;
startTime 0;
stopAt endTime;
endTime 0.5;
deltaT 0.005;
writeControl timeStep;
writeInterval 20;
purgeWrite 0;
Solvers
basic
combustion
compressible
DNS
electromagnetics
financial
heatTransfer
incompressible
boundaryFoam
channelOodles
icoDyMFoam
icoFoam
nonNewtonianIcoFoam
oodles
simpleFoam
turbDyMFoam
turbFoam
molecularDynamics
multiphase
stressAnalysis
Solvers
Mesh utilities
Post processing
Utilities
c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\system\controlDict

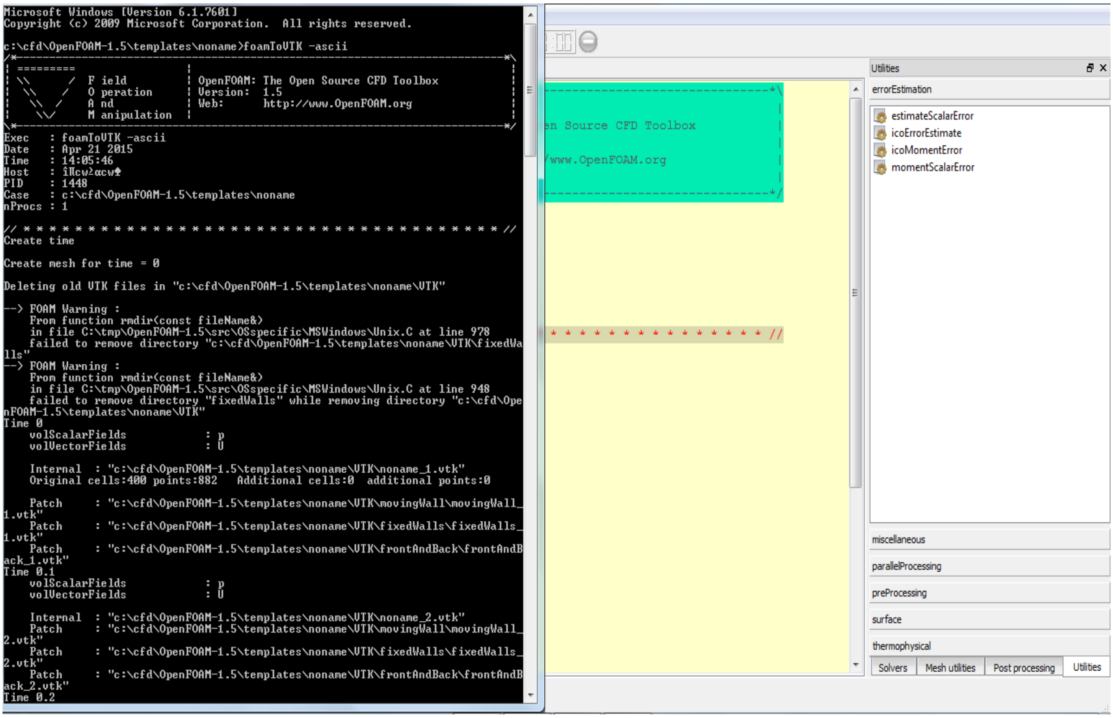

File Edit View Settings Tools Help
noname
Name Size
system
constant
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
uniform
U
phi
p
0
test
controlDict
U
\\ / F ield	OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
\\ / O peration	Version: 1.5
\\ / A nd	Web: http://www.OpenFOAM.org
\\/ M anipulation	
FoamFile
{
version 2.0;
format ascii;
class volVectorField;
location "0.1";
object U;
}
// * //
dimensions [0 1 -1 0 0 0 0];
internalField nonuniform List<vector>
400
(
(0.00024921 -0.000245875 0)
(0.000137796 0.000110834 0)
(-0.00116078 0.000556988 0)
(-0.00342907 0.00087206 0)
(-0.00627905 0.00102987 0)
(-0.00932055 0.0010453 0)
(-0.0122055 0.000942803 0)
(-0.0146463 0.000748446 0)
(-0.0164212 0.000486966 0)
(-0.0173749 0.000182026 0)
(-0.01742 -0.000142328 0)
(-0.0165405 -0.00046018 0)
(-0.0147978 -0.000742803 0)
Solvers
basic
combustion
compressible
DNS
electromagnetics
financial
heatTransfer
incompressible
boundaryFoam
channelOodles
icoDyMFoam
icoFoam
nonNewtonianIcoFoam
oodles
simpleFoam
turbDyMFoam
turbFoam
molecularDynamics
multiphase
stressAnalysis
Solvers
Mesh utilities
Post processing
Utilities
C:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\0.1\U

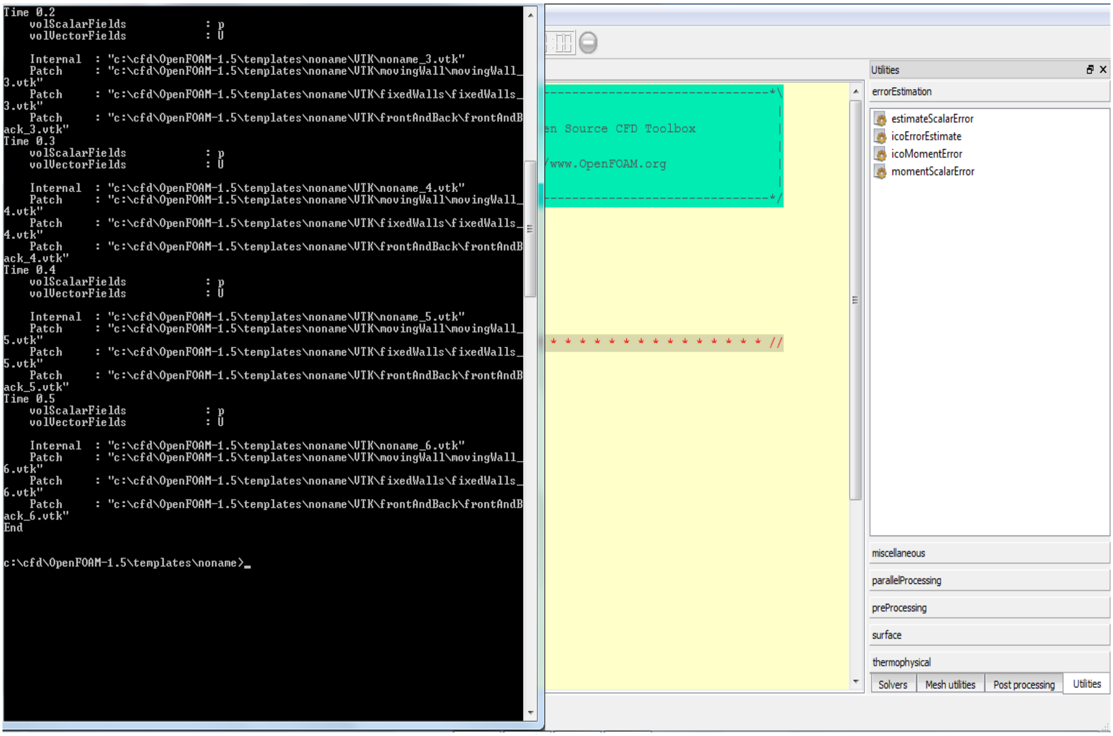


And we have to save program before each step.	وعلينا أن حفظ البرنامج بعد كل خطوة.
Than we should visualize result using paraview that related on OpenFOAM by paraFoam.	بعدها يجب أن نصور النتيجة باستخدام paraview التي تتعلق على OpenFOAM التي كتبها paraFoam.
When paraFOAM is not responding we can visualize the program in paraview using program in paraview using foamToVTK -ascii (with windows paraview and windows OpenFAOM):	عندما paraFOAM لا يستجيب يمكننا تصور البرنامج في paraview باستخدام foamToVTK - ascii (مع نوافذ paraview والنوافذ OpenFAOM):

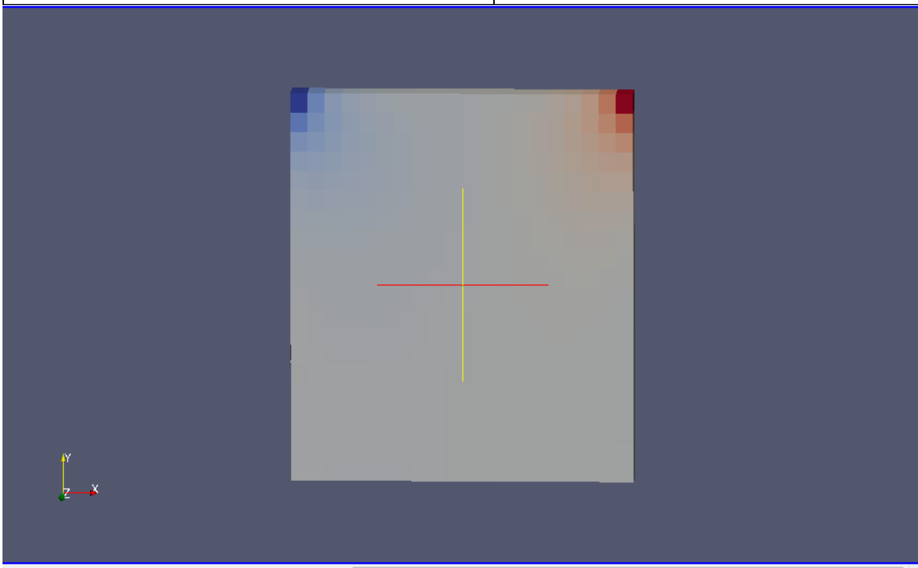


When we run program we obtain:	عندما نقوم بتشغيل البرنامج نحصل على:

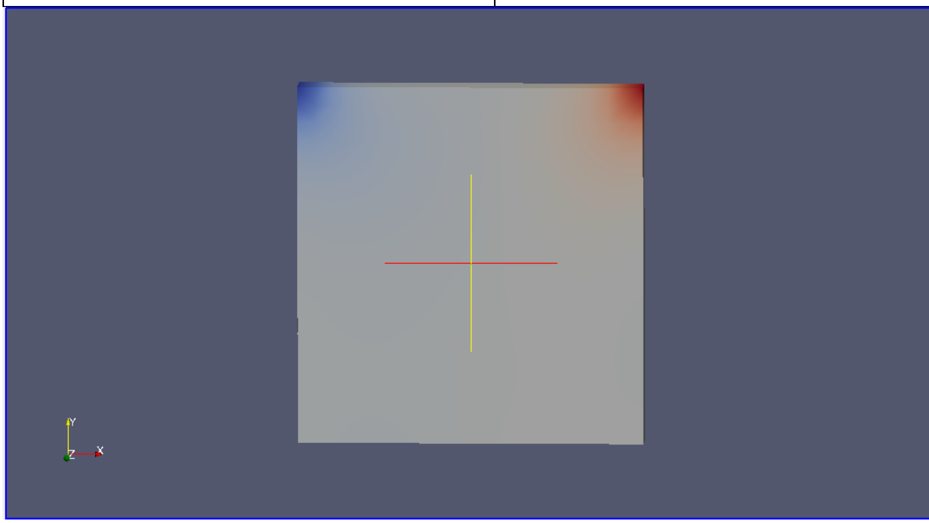

Microsoft Windows [Version 6.1.7601]
Copyright (c) 2009 Microsoft Corporation. All rights reserved.
c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname>foamToVTK -ascii
F ield
O peration
A nd
M anipulation
OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
Version: 1.5
Web: http://www.OpenFOAM.org
Exec : foamToVTK -ascii
Date : Apr 21 2015
Time : 14:05:46
PID : 1448
Case : c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname
nProcs : 1
Create time
Create mesh for time = 0
Deleting old VTK files in "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK"
--> FOAM Warning :
From function rmdir(const fileName&)
in file C:\tmp\OpenFOAM-1.5\src\OSspecific\MSWindows\Unix.C at line 978
failed to remove directory "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\fixedWalls"
--> FOAM Warning :
From function rmdir(const fileName&)
in file C:\tmp\OpenFOAM-1.5\src\OSspecific\MSWindows\Unix.C at line 948
failed to remove directory "fixedWalls" while removing directory "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK"
Time 0
volScalarFields : p
volVectorFields : U
Internal : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\noname_1.vtk"
Original cells:400 points:882 Additional cells:0 additional points:0
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\movingWall\movingWall_1.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\fixedWalls\fixedWalls_1.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\frontAndBack\frontAndBack_1.vtk"
Time 0.1
volScalarFields : p
volVectorFields : U
Internal : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\noname_2.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\movingWall\movingWall_2.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\fixedWalls\fixedWalls_2.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\frontAndBack\frontAndBack_2.vtk"
Time 0.2
n Source CFD Toolbox
/www.OpenFOAM.org
Utilities
errorEstimation
estimateScalarError
icoErrorEstimate
icoMomentError
momentScalarError
miscellaneous
parallelProcessing
preProcessing
surface
thermophysical
Solvers
Mesh utilities
Post processing
Utilities


Time 0.2
volScalarFields : p
volVectorFields : U
Internal : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\noname_3.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\movingWall\movingWall_3.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\fixedWalls\fixedWalls_3.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\frontAndBack\frontAndBack_3.vtk"
Time 0.3
volScalarFields : p
volVectorFields : U
Internal : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\noname_4.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\movingWall\movingWall_4.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\fixedWalls\fixedWalls_4.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\frontAndBack\frontAndBack_4.vtk"
Time 0.4
volScalarFields : p
volVectorFields : U
Internal : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\noname_5.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\movingWall\movingWall_5.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\fixedWalls\fixedWalls_5.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\frontAndBack\frontAndBack_5.vtk"
Time 0.5
volScalarFields : p
volVectorFields : U
Internal : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\noname_6.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\movingWall\movingWall_6.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\fixedWalls\fixedWalls_6.vtk"
Patch : "c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname\VTK\frontAndBack\frontAndBack_6.vtk"
End
c:\cfd\OpenFOAM-1.5\templates\noname>_
n Source CFD Toolbox
/www.OpenFOAM.org
Utilities
errorEstimation
estimateScalarError
icoErrorEstimate
icoMomentError
momentScalarError
miscellaneous
parallelProcessing
preProcessing
surface
thermophysical
Solvers
Mesh utilities
Post processing
Utilities

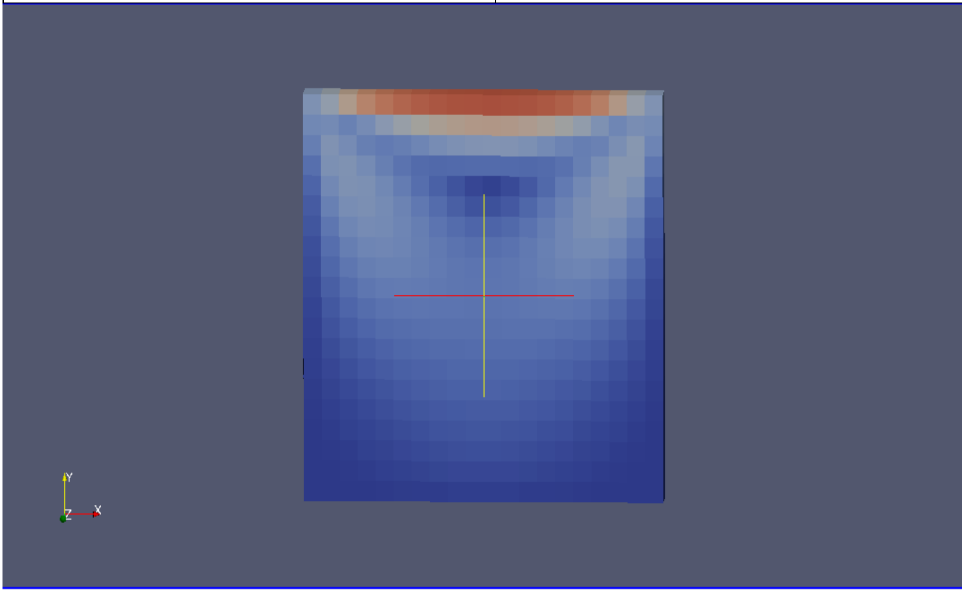
Now we open the VTK file in paraview to obtain this form: For pressure: p volume:	الآن نفتح ملفVTK في paraview للحصول على هذا الشكل: للضغط: حجم: p



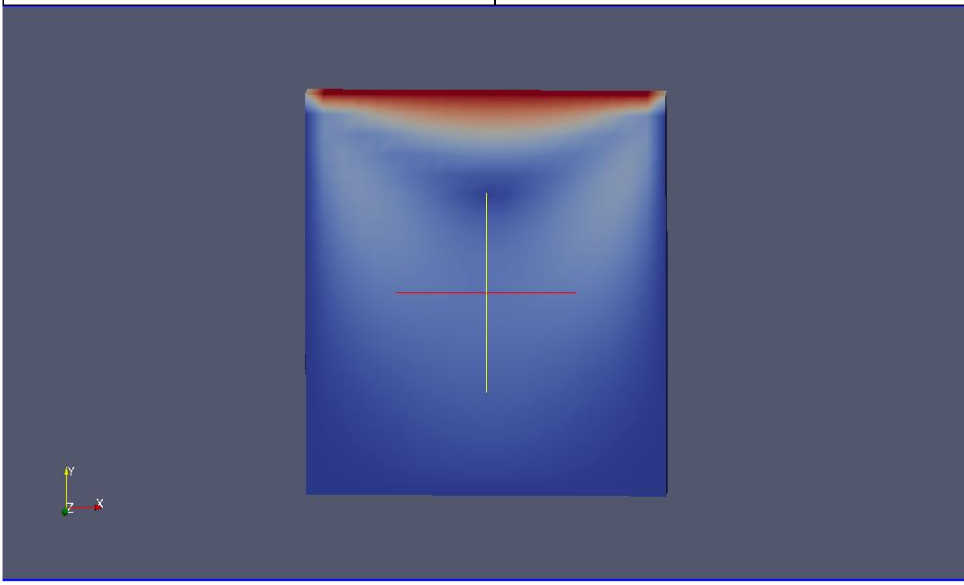
p points:	متابعة:p



For velocity: v volume:	للسرعة: v :حجم



v points:	v:متابعة



And we can also visualize the run-program with Linux OpenFOAM on windows paraview using foamToVTK –ascii:	ويمكننا أيضا تصور للبرنامج على OpenFOAM تشغيل لينكس باستخدام paraview النوافذ foamToVTK -ascii:

```
[meae@server cavity]$ foamToVTK -ascii
\/*---------------------------------------------------------------------------*\
| =========                 |                                                 |
| \\      /  F ield         | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox           |
|  \\    /   O peration     | Version:  1.6                                   |
|   \\  /    A nd           | Web:      www.OpenFOAM.org                      |
|    \\/     M anipulation  |                                                 |
\*---------------------------------------------------------------------------*/
Build  : 1.6-53b7f692aa41
Exec   : foamToVTK -ascii
Date   : Apr 21 2015
Time   : 14:51:38
Host   : server
PID    : 6709
Case   : /home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFoam/cavit
y
nProcs : 1
SigFpe : Enabling floating point exception trapping (FOAM_SIGFPE).

// * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * //
Create time

Create mesh for time = 0

Deleting old VTK files in "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompress
ible/icoFoam/cavity/VTK"

Time: 0
    volScalarFields            : p
    volVectorFields            : U

    Internal  : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_0.vtk"
    Original cells:400 points:882   Additional cells:0  additional points:0

    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_0.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_0.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_0.vtk"
Time: 0.1
    volScalarFields            : p
    volVectorFields            : U

    Internal  : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
```

```
Time: 0.1
    volScalarFields           : p
    volVectorFields           : U

    Internal  : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_20.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_20.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_20.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_20.vtk"
Time: 0.2
    volScalarFields           : p
    volVectorFields           : U

    Internal  : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_40.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_40.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_40.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_40.vtk"
Time: 0.3
    volScalarFields           : p
    volVectorFields           : U

    Internal  : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_60.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_60.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_60.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_60.vtk"
Time: 0.4
    volScalarFields           : p
    volVectorFields           : U

    Internal  : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_80.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_80.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_80.vtk"
```


```
Time: 0.1
    volScalarFields           : p
    volVectorFields           : U

    Internal  : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_20.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_20.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_20.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_20.vtk"
Time: 0.2
    volScalarFields           : p
    volVectorFields           : U

    Internal  : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_40.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_40.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_40.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_40.vtk"
Time: 0.3
    volScalarFields           : p
    volVectorFields           : U

    Internal  : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_60.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_60.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_60.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_60.vtk"
Time: 0.4
    volScalarFields           : p
    volVectorFields           : U

    Internal  : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_80.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_80.vtk"
    Patch     : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_80.vtk"
```

12 لمحات عن الحرق الحسابي (Numerical Combustion)

من:

Peter Gerlinger, **Numerische Verbrennungssimulation** - Effiziente numerische Simulation turbulenter Verbrennung, 2008

Teil I Turbulente Strömung und Verbrennung

12.1 بعض ملاحظات بالنسبة لمحاكاة الحرق

12.1.1 (brutto reactions) و (Flame Sheet Model)

The flame-sheet model allows a complete decoupling of the modeling of the formation and destruction of species from the modeling of the flow an mixing process.

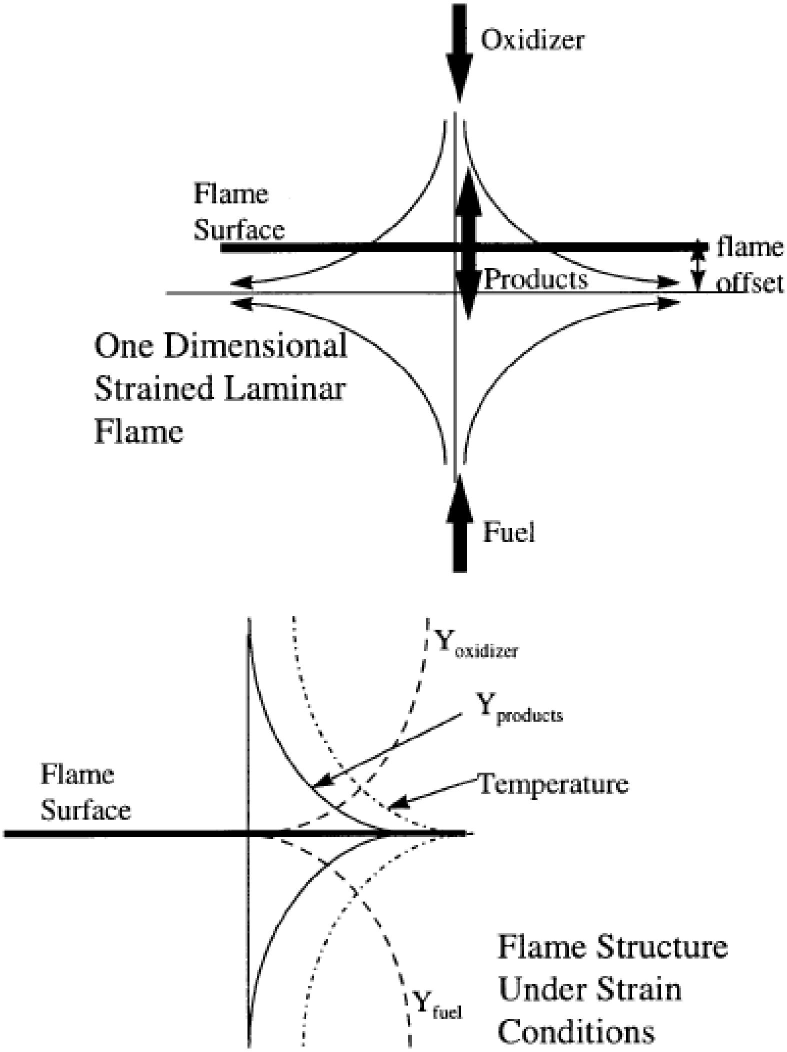


Fig. 11.1: The flame sheet model. From [Akinyemi 1997]

في نمذجة الحرق عن طريق صفحة الاهب (Flame sheet model) يفترض ان الاتفاعلات الكيمائية (chemical reactions) يمكن ان يجزء في صُحُف يعمل فيه الافتعال، و يفترض ايضاً ان هذه الصحف لها طخانة ضئيلة مقارنة مع امداد السريان (flow) و عملية الخلط.

Brutto-Reaktionen

12.2 اساسيات الحرق (Basics of Combustion)

From [Strauss], 111-112:
Bei der Verbrennung handelt es sich um die Hochtemperatur-Oxidation eines Brennstoffes, bei der im wesentlichen Kohlenstoff und Wasserstoff, die in verschiedener Form im Brennstoff enthalten sind, mit Sauerstoff exotherm reagieren. Eine Verbrennung heißt vollständig oder vollkommen, wenn alle brennbaren Bestandteile in ihre hochste Oxidationsstufe überführt werden.
Jede Verbrennung wird durch eine Zündung eingeleitet. Unter der Zündtemperatur versteht man diejenige Temperatur, bei der mehr Wärme durch die Reaktion freigesetzt als durch Strahlung an die Umgebung abgegeben wird, so daß sich die Verbrennung von selbst erhält. Die Zündtemperatur ist im strengen Sinn kein Stoffparameter, sie wird aber als Erfahrungswert bei der Auslegung von Feuerungen und Sicherheitseinrichtungen immer wieder herangezogen. Die Zündtemperaturen der verschiedenen Brennstoffe weisen erhebliche Unterschiede auf und sind darüber hinaus abhängig von der Brennkammerbeschaffenheit sowie den Reaktionsparametern Druck, Sauerstoffpartialdruck, der katalytischen Wirksamkeit organischer Bestandteile und der spezifischen Oberfläche des Brennstoffes.

من:

Peter Gerlinger, **Numerische Verbrennungssimulation** - Effiziente numerische Simulation turbulenter Verbrennung, 2008

From Theroretical and Numerical Combustion (Thierry Poinsot, Denis Veynante)

و هنالك المسائل التالية:

- mass transfer[11]
- معادلات الاستمرارية لسرايين تفاعلية (Conservation equations for reacting flows)
- Some Important Chemical Mechanisms (e.g. the H2-O2 System)[12]
- Laminar premixed flames and Laminar Diffusion flames
- Droplet Evaporation and Burning
- Introduction to Turbulent Flows
- Turbulent Premixed and Nonpremixed flames
- Burning of solids
- Free Numerical Combustion Codes (e.g. KIVA)

[11] From [Turns], pp. 83-105

[12] From [Turns], 148-152

13 مراجع

Fluid Dynamics

1) [Ganzer 1987] Uwe Ganzer, *Gasdynamik*, Springer-Verlag 1987
2) [Wendt 2009] John F. Wendt, *Computational Fluid Dynamics – an Introduction (a von Karman Institute Book),* Third Edition, 2009, Springer Verlag
3) [صديق] محمد هاشم الصديق (الإستاذ المشارك بشعبة هندسة الموائع قسم الهندسة الالميكانيكية / كلية الهندسة والعمارة، جامعة الخرطوم،msiddiq@yahoo.com)، **ميكانيك الموائع**، الاصدارة الثانية، 2006

Computational Fluid Dynamics

1) [Anderson 1991] Anderson, John D., Jr., Fundamentals of Aerodynamics, 2nd Edition McGraw-Hill, New York, 1991
2) [Ferziger, Peric] J. Ferziger und M. Peric**,** *Numerische Strömungsmechanik*, 2008, Springer Verlag.
3) [Wessling] Pieter Wesseling, *Principles of Computational Fluid Dynamics,* 2000, Springer Verlag.
4) مجمع اللغة العربية
5) http://en.wikipedia.org/wiki/Computational_fluid_dynamics

Numerical Combustion

1) [Strauss] K. Strauss, *Kraftwerkstechnik - zur Nutzung fossiler, nuklearer und regenerativer Energiequellen*, Springer-Verlag, 2006
2) [Poinsot, Veynante] Thierry Poinsot, Denis Veynante; *Theroretical and Numerical Combustion*
3) [Turns] Stephen R. Turns; *Introduction to Combustion – Concepts and Applications*, 2nd edition
4) [Akinyemi 1997] O. Akinyemi, *A flame Sheet Model of Combustion an NO Formation in Diesel Engines*, PhD thesis, MIT, June 1997

14 ملحقات (Apprendices)

14.1 ملحق أ: مضمون كتاب "ميكانيك الموائع" لمحمد هاشم الصديق

مضمون [صديق] محمد هاشم الصديق (الإستاذ المشارك بشعبة هندسة الموائع قسم الهندسة الالميكانيكية / كلية الهندسة والعمارة، جامعة الخرطوم،msiddiq@yahoo.com)، **ميكانيك الموائع**، الاصدارة الثانية، 2006

هو التالي:

14.2 ومضمون كتاب [Ferziger, Peric]

مدخل الى التحليل العددي (بالإنجليزية: Numerics)

(بالإنجليزية: Components of a numerical method)

(بالإنجليزية: Mathematical model)

(بالإنجليزية: Discretization method)

(بالإنجليزية: Coordinate and base vector systems)

(بالإنجليزية: Numerical mesh)

(بالإنجليزية: Finite Approximations)

(بالإنجليزية: Solution method)

(بالإنجليزية: Convergence criteria)

اساسيات ديناميك الحرارية (بالإنجليزية: Thermodynamics)

(بالإنجليزية: Finite Difference Methods)

(بالإنجليزية: Finite Volume Methods)

طريقة العناصر المنتهية (FEM)

(بالإنجليزية: Solving linear equation systems)

(بالإنجليزية: Solving the Navier-Stokes Equations)

(بالإنجليزية: Computation Methods for complex flow areas)

(بالإنجليزية: Simulation of turbulence)

(بالإنجليزية: Compressible Fluids)

(بالإنجليزية: Efficiency and accuracy)

(بالإنجليزية: Special Topics)

(بالإنجليزية: Combustion)

14.3 مواضيع اضافية

(بالإنجليزية: CFD Applications in Energy Engineering)

(بالإنجليزية: CFD Applications in Aeronautics)

(بالإنجليزية:CFD Applications in Space Technology

15 Dictionnary

15.1 A

English	Deutsch	عربي
accuracy		دقّة
algebraic difference quotients		فُرق لمقسومات الجبرية

15.2 B

English	Deutsch	عربي
boundary		الحدود

15.3 C

English	**Deutsch**	**عربي**
calculation	Berechnung	
characteristic lines		الخطوط المميزة
Continuity equation	Kontinuitätsgleichung	معادلة الاستمرارية
Conservation form		
conservation form		الشكل التحفظي

control volume		حجم التحكم
Cordinate system		نظام إحداثي
chemical reactions		تفاعلات كيمائية

15.4 D

English	Deutsch	عربي
derivate	Ableitung, Differentialquotient	المتفرعة
derivative		المشتق
differential		تفاضلي
distinct	verschieden	
dependent variables		والمتغيرات التابعة
difference		الفرق
discriminant		المتميّز
determinant		المحددة

Difference expressions		تعابير الفروق
difference quotients		مقسومات فرقية

15.5 E

English	Deutsch	عربي
Explicit		
Elliptic (partial differential) equations		معادلات القطع الناقص
ellipse		الاهليج

15.6 F

finite difference method		
fluid element		عضو مائع
fluid dynamics		حركية الموائع
Flow	Fluss, Stömung	سريان
flow field		
finite-difference methods	Finite-Differenzen Methoden	طرق الفرق المحدود
flux	Strom	سريان
friction	Reibung	احتكاك

forward difference		الفرق إلى الأمام
Formal		شكلي
Function of		دالة ل

15.7 G

govering equation		معادلة اساسية
grid		شبكة

15.8 H

hyperbolic (partial differential) equations		معادلات القطع الزائد

15.9 I

integral		تكاملي
incorporate		

incompressible	inkompressibel	لا انضغاطي
infinitesimal		موحل في الصغر
inviscid	nicht zähflüssig	لا لزجي
irrotational	nicht rotierend	لا دوراني
integral form		

15.10 J

15.11 K

15.12 L

linear algebra	Linerare Algebra	علم الحساب الجبر الخطي

15.13 M

momentum		كمية التحرك
manipulation		تلاعب

15.14 N

numerical analysis		التحليل العددي
normal		عمودية

15.15 O

One-dimensional	eindimensional	أحادية البعد
Order of magnitude	Größenordnung	القيمة الأسية

15.16 P

parabolic		
parabolic (partial differential) equations		معادلات القطع المكافئ
Panel	Gruppe, Runde	مؤطَّرة
property	Eigenschaft	خصوصية
partial differential equations		المعادلات التفاضلية الجزئية
partial derivate	Partielle Ableitung	المشتق الجزئي
plane (e.g. xy plane)		مستو (مثلا مستو xy)
polynomial equation		معادلة متعددة الحدود

15.17 Q

15.18 R

(chemical) reaction		تفاعل كميائي
rectangular		

15.19 S

Shear	Scherung	قص
Shear stress	Scherspannung	الإجهاد القصي
Slope	Anstieg (einer Funktion) (math.)	
steady-state		
Source	Quelle	نبع–مصدر
System	System	منظومة–نظام
Stress	Spannung (Druckvektor)	اجهاد
Substantial Derivate		الاشتقاق الكبير
Stability		الاستقرار
Symbol (Mathematical symbol)		رمز رياضي
simulation		محاكاة

15.20 T

time-dependend method		
Transient		

tangential		مماسة
term (mathematical term)		حد رياضي

15.21 U

Uniform		موحَّد

15.22 V

Viscous		لزجي
Source	Quelle	نبع
variable x		متغير x

15.23 W

15.24 X

15.25 Y

15.26 Z

15.27 Still to be ordered

calculation	Berechnung	

incorporate		
time-dependend method		
steady-state		
flow field		
Transient		
hyperbolic		
incompressible	inkompressibel	لا انضغاطي
source	Quelle	نبع
vortex	Wirbel	دوامة مائية
panel	Gruppe, Runde	مؤطّرة
numerical analysis		التحليل العددي
inviscid	nicht zähflüssig	لا لزجي
finite-difference methods	Finite-Differenzen Methoden	طرق الفرق المحدود
irrotational	nicht rotierend	لا دوراني

property	Eigenschaft	خصوصية
govering equations		المعادلاب الاساسية
integral form		
system		منظومة
control volume		حجم التحكم
normal		عمودية
tangential		مماسة
flux	Strom	سريان
Uniform		

rectangular		
grid		
stress	Spannung (Druckvektor)	اجهاد
shear	Scherung	قص
	Scherspannung	الإجهاد القصي
S		
stress	Spannung σ (hat Einheit N/m² , d.h. die gleiche Einheit wie ein Druck)	الاجهاد
Substantial Derivate		الاشتقاق الكبير
V		
Viscous		لزجي

Flow	Fluss, Stömung	سريان
calculation	Berechnung	
incorporate		
time-dependend method		
steady-state		
flow field		
Transient		
hyperbolic		
parabolic		