

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ديناميكيات الموائع الحاسوبية (د.م.ح.)

Computational Fluid Dynamics (CFD)

Samir Mourad

سمير مراد

Fatima Hamed

فاطمة حامد

Banan Kerdi

بنان الكردي

Ahlam Houda

احلام هدى

هذا الاصدار ليس بكامل. آخر تعديل: الأربعاء، 09 أيلول، 2015



**AECENAR**

Association for Economical and Technological Cooperation  
in the Euro-Asian and North-African Region

[www.aecenar.com](http://www.aecenar.com)



## الفهرس

### الفهرس 3

12	تمهيد: بعض ميادين تستخدم فيه ديناميكيات الموائع الحسائية (CFD)	12
15	مدخل الى ديناميكيات الموائع والغازات (fluid and gas dynamics)	1
	تعريفات اساسية 15	1.1
16	نظام الوحدات	1.2
16	مضمون القسم الأول من الكتاب	1.3
17	الموائع (fluids)	1.4
19	الكمية المتصلة	1.5
	الكثافة 19	1.6
19	الكثافة النسبية	1.7
19	قانون الغاز المثالي (ideal gas)	1.8
20	الجريان المستقر (steady flow)	1.9
20	اجريان المنتظم (uniform flow)	1.10
20	خط الانسياب (streamline)	1.11
20	أبعاد السريان (dimensions of flow)	1.12

21	..... (stress) الاجهاد	1.13
21	..... (turbulent flow) المضطرب (laminar flow) التدفق الصفائحي	1.14
	منظومة (system) وحجم التحكم (control volume) عنصر مائع لا	1.15
22	.....(infinitesimal fluid element) متناهي	
	الضغط المقياسي 25	1.16
	القوة الجسمية والقوة السطحية 25	1.17
25	..... الاجهاد القصي	1.1
	<b>(Governing Equations of Fluid Dynamics)</b>	<b>2</b>
	27	
	مدخل 27	2.1
27	..... متجه السريان	2.1.1
29	..... (The Substantial Derivate) الاشتقاق الكبير	2.2
34	..... $\nabla \cdot \vec{V}$ (divergence of velocity) المعنى الفيزيائية من تباعد السرعة	2.3
34	..... (mass conservation) حفظ الكتلة	2.4
36	..... (continuity equation) معادلة الاستمرارية	2.4.1
38	..... (energy conservation) حفظ الطاقة	2.5
43	..... (momentum conservation) حفظ كمية التحرك	2.6

2.7 تلخيص المعادلات الاساسية (governing equations) لديناميك الموائع مع

ملاحظات 44

2.7.1 معادلات السريان اللزجي (viscous flow) دون النظر الى تفاعلات

الكيميائية (without considering chemical reactions) 44 .....

2.7.2 معادلات السريان الا لزجي (inviscous flow) دون النظر الى تفاعلات

الكيميائية (without considering chemical reactions) 51 .....

2.7.3 تعليقات على المعادلات الاساسية..... 52 .....

2.7.4 الحالات الجدارية (boundary conditions)..... 54 .....

2.8 اشكال للمعادلات الاساسية تلائم مع د.م.ح.: ملاحظات على الشكل التحفظي

(conservation form)

56

2.9 مراجع \ References ..... 69 .....

3 سرايين لا انضغاطية ولا لزجية (Incompressible Inviscid Flows) : طرق

حسابية معتمدة على مؤطرات النبع و الدوامة ( Source and Vortex Panel )

71 (Methods

3.1 مدخل..... 71 .....

3.2 بعض الواجهة الاساسية لسريان لا انضغاطي و لا لزجي ..... 71 .....

	الخصائص الرياضية (Mathematical Properties) لمعادلات ديناميك الموائع	4
75	.....(Fluid Dynamic Equations)	
	مدخل 75	4.1
77	..... بعض المعادلات التفاضلية الجزئية	4.2
	تصنيف (Classification) المعادلات التفاضلية الجزئية ( Partial Differential )	4.3
	(Eq.s) 77	
	السلوك العام للاصناف المختلفة من المعادلات التفاضلية الجزئية و علاقتها	4.4
87	بديناميات الموائع	
87	.....(Hyperbolic Equations) المعادلات القطع الزائد	4.4.1
92	..... Parabolic Equations / معادلات القطع مكافئة	4.4.2
93	..... (elliptic equations) المعادلات القطع الناقص	4.4.3
95	..... بعض الملاحظات	4.4.4
95	.....Well-Posed Problems / طرح المشاكل بشكل جيد	4.4.5
96	..... المراجع	4.4.6
97	.....(Discretization of PDEs) تفريز لمعادلات التفاضلية الجزئية	5
97	.....مدخل	5.1

Elementary Finite Difference ) اشتقاق مقسومات لفرق محدودة ابتدائية (	5.2
99	(Quotients
Basic Aspects of Finite-Difference ) جوانب اساسية لمعادلات الفرق المحدود (	5.3
112	(Equations
118 .....	5.3.1 تعليق عام
118 .....	Errors and an Analysis of Stability - 5.4 تحليل الاستقرار وأخطاء
139 .....	6 تحويلات الشبكة (Grid transformations)
	6.1 مدخل 139
142 .....	6.2 General Transformation of the Equations
149 .....	6.3 Metrics and Jacobians
156 .....	6.4 Coordinate Stretching
162 .....	6.5 Boundary-Fitted Coordinate Systems
179 .....	6.6 Adaptive Grid
	7 طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض
189 .....	التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللانزج
189 .....	7.1 مدخل (Introduction)
191 .....	7.2 طريقة لاكس واندرروف (The Lax- Wendroff Method)

200 .....	MacCormack's Method	7.3
204 .....	مقياس الإستقرار Stability Criterion	7.4
	تطبيقات مختارة من تقنيات المعتمدة على الزمن صريح (Explicit Time-Dependent Technique)	7.5
	207	
	(Dependent Technique)	
207 .....	Non-equilibrium Nozzle Flows	7.5.1
211 .....	Flow Field over a Supersonic Blunt Body	7.5.2
215 .....	Internal Combustion Engine Flows	7.5.3
	Supersonic Viscous Flow over a Rearward-Facing Step With	7.5.4
217 .....	Hydrogen Injection	
223 .....	Supersonic Viscous Flow over a Base	7.5.5
227 .....	References	7.5.6
229 .....	الأحجام المحدودة (Finite volumes)	8
229 .....	نظرة عامة	8.1
239 .....	العناصر المحدودة:	9
239 .....	مدخل الى العناصر المحدودة ((Finite elements))	9.1
244 .....	مدخل الي طريقة العناصر المنتهية (FEM) في ديناميكيات الموائع الحاسوبية (CFD)	9.2
246 .....	شرح طريقة العناصر المنتهية	9.3
247 .....	الصيغة المتحولية (variational formulation)	9.4



248	برهان يظهر وجود حل وحيد	.....
249	الصيغة المتحولية لP2	.....
249	التقطيع (Discretization)	..... 9.5
253	البرمجيات المستخدمة في النمذجة والمحاكاة	..... 10
254	تنسيق الملفات (format of files)	..... 10.1
255	القيام بالنموذج	..... 10.2
256	تطبيق الشبكة على النموذج	..... 10.3
259	الحلال Elmer	..... 10.4
260	استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة في ميدان ديناميكيات الموائع الحسابية	..... 11
260	تحسين سريان الماء داخل محطة طاقة تعمل على البخار ببرامج جاهزة	..... 11.1
	محطة طاقة	11.1.1
261	عن طريق حرق النفايات لتبخير الماء قرب طرابلس الشام	.....
	مسألة تكبير حجم حتى تستخدم للتخلص من نفايات احدى المدن الكبرى وتغزيتها بالك	11.1.2
264	حل المسألة	..... 11.1.3
	خرمراجع	11.1.4 298
299	انشاء برنامج لتحليل مسألة ما في ميدان ديناميكيات الموائع الحسابية (د.م.ح.)	..... 11.2

299 .....	تحسيب السريان في زاوية باستخدام OpenFOAM	11.2.1
317 .....	ملحات عن الحرق الحسائي (Numerical Combustion)	12
317 .....	بعض ملاحظات بالنسبة لمحاكاة الحرق	12.1
317 (Flame Sheet Model) و (brutto reactions) .....		12.1.1
319 .....	اساسيات الحرق (Basics of Combustion)	12.2
	مراجع	13 321
322 .....	ملحقات (Apprendices)	14
322 .....	ملحق أ: مضمون كتاب "ميكانيك الموائع" لمحمد هاشم الصديق	14.1
325 .....	ومضمون كتاب [Ferziger, Peric]	14.2
326 .....	مواضيع اضافية	14.3
328 .....	Dictionary	15
328 .....	A	15.1
328 .....	B	15.2
328 .....	C	15.3
329 .....	D	15.4
330 .....	E	15.5
330 .....	F	15.6

---

331 .....	G	15.7
331 .....	H	15.8
331 .....	I	15.9
332 .....	J	15.10
332 .....	K	15.11
332 .....	L	15.12
333 .....	M	15.13
333 .....	N	15.14
333 .....	O	15.15
333 .....	P	15.16
334 .....	Q	15.17
334 .....	R	15.18
334 .....	S	15.19
335 .....	T	15.20
335 .....	U	15.21
335 .....	V	15.22
336 .....	W	15.23
336 .....	X	15.24

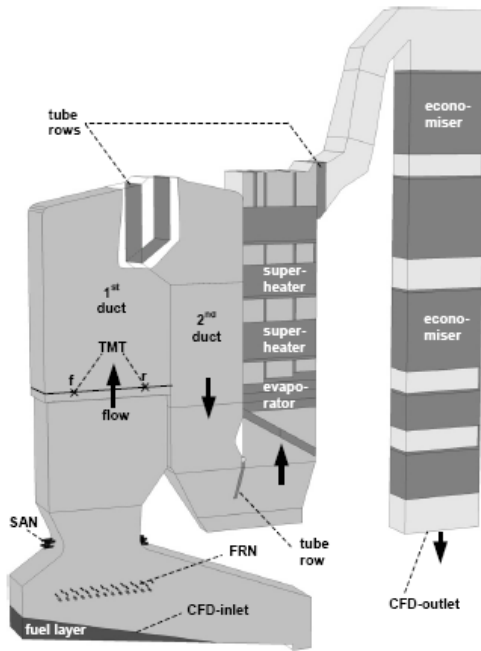
---

336 .....	Y	15.25
336 .....	Z	15.26
336 .....	Still to be ordered	15.27

## تمهيد: بعض ميادين تستخدم فيه ديناميكيات الموائع الحسابية (CFD)

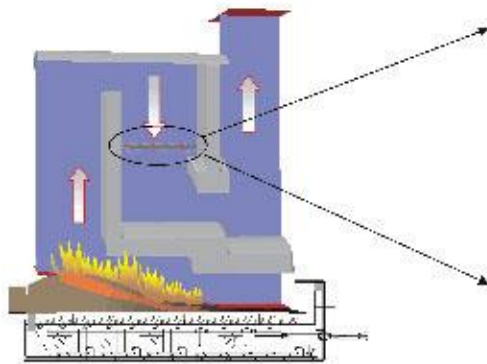
لا بد ان تستخدم محاكاة في ميادين صعوبة المنال لمعطيات من اختبارات. و بالتالي بعض الامثلة:

- علم الفلك
- محارق مثلا لنفايات: المحاكاة CFD: توزيع درجة الحرارة في محرقة / CFD simulations: temperature distribution in an incinerator

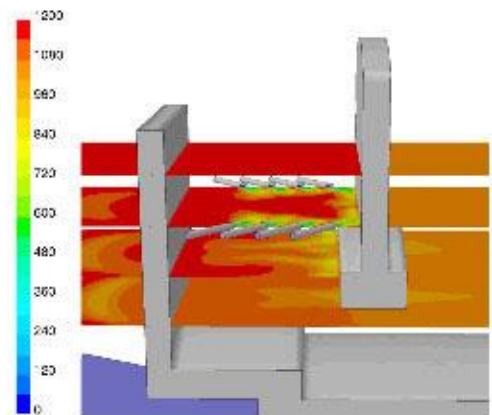
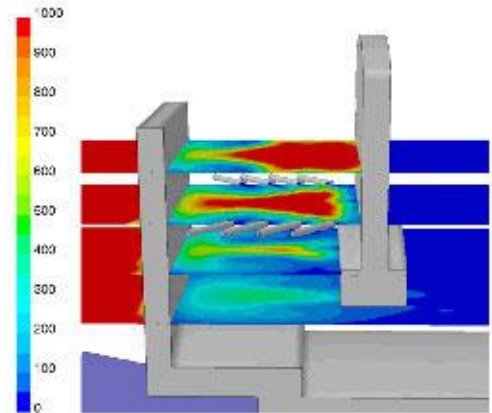


**Figure 1:** CFD model of the biomass furnace and boiler  
Explanations: modeled tube bundles and rows are pictured dark gray; SAN...secondary air nozzles, FRN...flue gas recirculation nozzles, TMT... suction pyrometer temperature measurement traverses

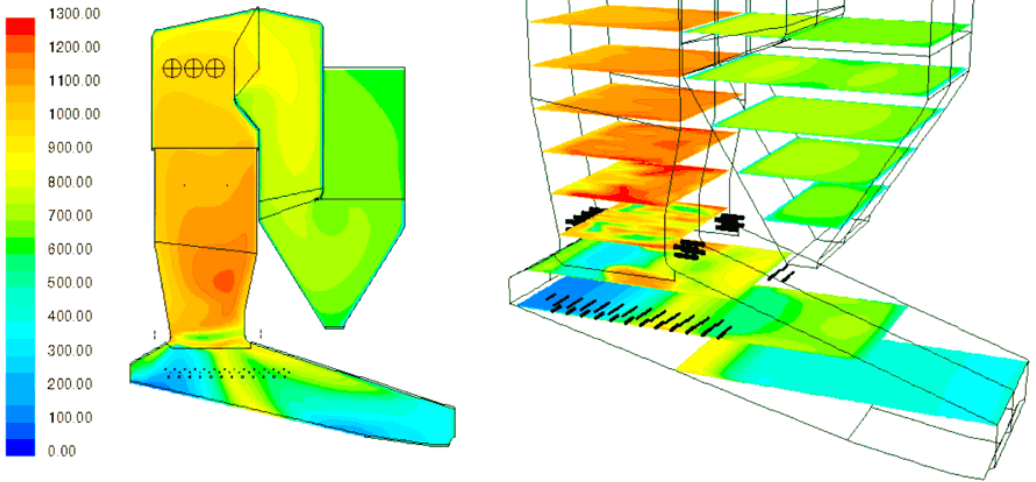
From: Scharler et. al. 2004, Advanced CFD analysis of large fixed bed biomass boilers ..., 2nd World Conf..., Rome, 2004



Biomasse-Rostfeuerung ausgerüstet mit einem Flachschieber



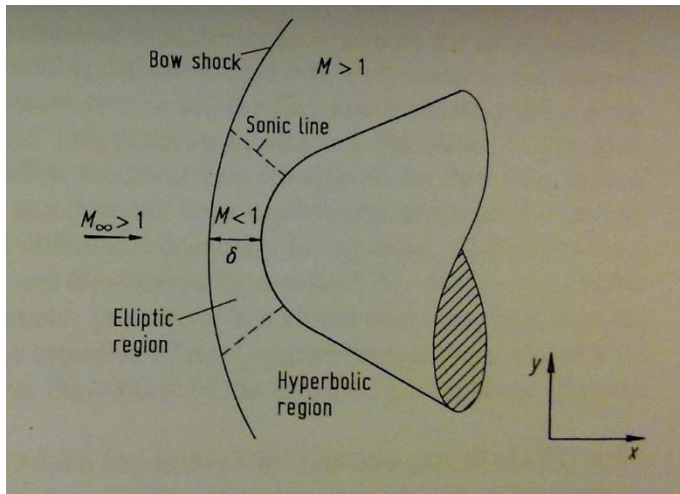
CO-Konzentrationen [v-ppm] (oben) und Temperaturverteilung [°C] (unten) in verschiedenen Querschnitten um die Sekundärluftdüsen



Isoflächen der Rauchgastemperatur [°C] in der Symmetrieebene der Feuerung (links) und in horizontalen Schnittebenen (rechts). Aus: <http://www.bios-bioenergy.at/de/cfd-simulationen.html>

- محاكات لمحارق صواريخ

- محاكات لاعادة لمركبات فضائية







## 1 مدخل الى ديناميكيات الموائع والغازات (fluid and gas dynamics)

ديناميك الغازات (gas dynamics) هو علم سريان الغازات و المزيج من الغازات. أهم تطبيق لهذا العلم هو دراسة حركة الهواء لاستعماله في دراسات آروديناميك الطيران (plane aerodynamics) و آروديناميك لمحركات الطيران.

### 1.1 تعريفات اساسية<sup>1</sup>

ميكانيكا الموائع (Fluid Mechanics) هو تخصص فرعي من ميكانيكا المواد المتصلة (Mechanics Continuum) وهو معني أساساً بالموائع، التي هي السوائل والغازات، ويدرس هذا التخصص السلوك الفيزيائي الظاهر الكلي لهذه المواد، ويمكن تقسيمه من ناحية إلى إستاتيكا الموائع- أي في حالة عدم الحركة، أو ديناميك الموائع أي في حالة الحركة، ويندرج تحتها تخصصات أخرى معينة، فهناك الديناميكيات الهوائية (أيروديناميك) والديناميكيات المائية (هيدروديناميك).

يسعى هذا التخصص إلى تحديد القيم الفيزيائية الخاصة بالموائع، مثل السرعة، الضغط، الكثافة، درجة الحرارة، اللزوجة ومعدل التدفق، وقد ظهرت تطبيقات حسابية حديثة لإيجاد

---

<sup>1</sup> ولكن محقق من الكاتب <http://ar.wikipedia.org/wiki> من

مدخل الى ديناميكيات الموائع والغازات (fluid and gas dynamics)

حلول للمسائل المتصلة بميكانيكا الموائع، ويسمى التخصص المعني بذلك ديناميكيات الموائع الحاسوبية (بالإنجليزية: Computational Fluid Dynamics: CFD).

## 1.2 نظام الوحدات

النظام المستخدم هنا هو النظام العالمي للوحدات (SI).

القائمة أدناه تبين وحداته الأساسية:

الطول	الكتلة	الزمن	درجة الحرارة	القوة	الطاقة	القدرة	الضغط
m	kg	s	K	N	J	W	Pa
متر	كيلو غرام	ثانية	كلفن	نيوتن	جول	وات	باسكال

## 1.3 مضمون القسم الأول من الكتاب

في الجزء الاول من هذا الكتاب ستناول ان شاء الله التالى:

(a) تلخيص لميكانيكا الموائع (بالإنجليزية: Fluid Mechanics)

(b) مدخل ملخص للتحليل العددي (بالإنجليزية: Numerics / Numerical Computation)

(c) اساليب ديناميكيات الموائع الحاسوبية (بالإنجليزية: Computational Fluid Dynamics)

يوجد مرجع باللغة العربية بالغ الأهمية في اختصاص ميكانيكا الموائع و هو كتاب **ميكانيك الموائع** من محمد هاشم صديق<sup>2</sup>.

#### 1.4 الموائع (fluids)

الموائع جمع لكلمة مائع (fluid) تشكل مجموعة من أطوار المادة، وهي أية مادة قابلة للانسياب تحت تأثير إجهاد القص وتأخذ شكل الإناء الحاوي لها. تتضمن الموائع كلاً من السوائل، الغازات، البلازما وأحياناً الأصلاب اللدنة plastic solids.

تصنف الموائع عادة إلى:

- **موائع قابلة للانضغاط (compressible fluids)** وهي الموائع التي تتغير كثافتها بتغير الضغط الواقع عليها مثل الغازات. و يُسمى أيضاً السريان الانضغاطي.
- **موائع غير قابلة للانضغاط (incompressible fluids)** وهي الموائع التي لا تتغير كثافتها بتغير الضغط الواقع عليها مثل السوائل. و يُسمى أيضاً السريان اللانضغاطي.
- **موائع نيوتنية: المائع النيوتني** هو مائع تكون فيه علاقة الإجهاد<sup>3</sup> - الانفعال (تشوه المواد نتيجة الإجهاد) علاقة خطية أي على شكل مستقيم يمر من مبدأ الإحداثيات، ويعرف اسم ثابت التناسب باللزوجة. سمي هذا المائع على اسم العالم اسحق نيوتن<sup>4</sup>.

<sup>2</sup> [Siddiq]

### 3 engl. stress

(وينادي بالسير إسحق نيوتن (4 يناير 1643 - 31 مارس 1727) من Isaac Newton إسحق "نيوتن" (بالإنجليزية: 4 رجال الجمعية الملكية كان فيزيائي إنجليزي وعالم رياضيات وعالم فلك وفيلسوف بعلم الطبيعة وكيميائي وعالم باللاهوت وواحدًا من أعظم الرجال تأثيرًا في تاريخ البشرية. وبعد كتابه كتاب الأصول الرياضية للفلسفة الطبيعية والذي نشر عام 1687 من أكثر الكتب تأثيرًا في تاريخ العلم واضعًا أساس لمعظم نظريات الميكانيكا الكلاسيكية. في هذا الكتاب، وصف "نيوتن" الجاذبية العامة وقوانين الحركة الثلاثة والتي سيطرت على النظرة العلمية إلى العالم المادي للقرون الثلاثة القادمة ووضح "نيوتن" أن حركة الأجسام على كوكب الأرض والتي لها أجرام سماوية تحكمها مجموعة القوانين الطبيعية نفسها عن طريق إثبات الاتساق بين قوانين "كبلر" الخاصة بالحركة الكوكبية ونظريته الخاصة بالجاذبية؛ ومن ثم إزالة الشكوك المتبقية التي ثارت حول نظرية مركزية الشمس مما أدى إلى تقديم الثورة العلمية. وفيما يتعلق بالميكانيكا، أعلن "نيوتن" مبادئ بقاء الطاقة الخاصة بكل من كمية الحركة وكمية الحركة الزاوية. وفي علم البصريات، اخترع "نيوتن" أول تلسكوب عاكس [3] عملي. وكذلك أيضًا طور نظرية الألوان (لون) معتمدًا على ملاحظة أن المنشور يحلل الضوء الأبيض إلى العديد من الألوان التي تشكل الطيف المرئي. وبالإضافة إلى ذلك، صاغ قانون نيوتن للتبريد ودرس سرعة الصوت. وبالنسبة لعلم الرياضيات، يشارك "نيوتن" "جوتفريد لايبنتز" في شرف تطوير حساب التفاضل والتكامل. وكذلك أيضًا، أثبت النظرية ذات الحدين المعممة وطور ما يسمى بـ "طريقة نيوتن" الخاصة بتقريب الأصفار الموجودة بالدالة وساهم في دراسة متسلسلة القوى. تظل مكانة "نيوتن" الرفيعة بين العلماء في أعلى مرتبة الأمر الذي أثبتته استطلاع رأي أجري عام 2005 فيما يتعلق بعلماء المجتمع الملكي البريطاني وكان السؤال الذي طرحه هذا الاستطلاع هو من كان له أعظم تأثير على تاريخ العلم "نيوتن" أم "ألبرت أينشتاين". وكانت نتيجة الاستطلاع هي أن "نيوتن" هو يعتبر الأكثر تأثيرًا. [4] علاوةً على ذلك، كان "نيوتن" تقيًا للغاية (على الرغم من أنه لم يكن متفقًا مع الأعراف الدينية القائمة) ومنتجًا للعديد من الأعمال في تفسيرات الكتاب المقدس أكثر مما أنتجه في العلوم الطبيعية التي لم ينس العالم إسهاماته به حتى الآن.

- موائع غير نيوتنية: مائع لا نيوتوني هو مائع لا يمكن وصف جريانه باستخدام ثابت الزوجة. تعتبر أغلب محاليل البوليمرات والبوليمرات الذائبة من الموائع اللانيوتونية والكثير من السوائل الشائعة مثل الكثيب، ذائب النشا، الدم والشامبو.

### 1.5 الكمية المتصلة

يمكن اعتبار المائع كمية متصلة إذا كانت أصغر مسافة في التحليل أكبر من متوسط المسار الحر للجزيئات.

$$L \gg l$$

### 1.6 الكثافة

باعتبار أن الحجم  $V_0$  هو مكعب أصغر مسافة ترد عي التحليل وتستوفي شرط الكمية المتصلة

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow V_0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

فإن الكثافة  $\rho$  تعرف كما يلي:

حيث  $m$  الكتلة بالكيلوغرام و  $V$  الحجم بالمتر المكعب و وحدة الكثافة هي  $\frac{kg}{m^3}$ .

### 1.7 الكثافة النسبية

هي كثافة المادة منسوبة الى الكثافة المعيارية للماء، و هي  $1000 \text{ kg} / \text{m}^3$

$$S = \rho / \rho_0$$

### 1.8 قانون الغاز المثالي (ideal gas)

$$p = R\rho T$$

حيث يرتبط الضغط المطلق للغاز  $p$  بالدرجة المطلقة للحرارة والكثافة  $\rho$ .

$R$  ثابت الغاز و قيمته للهواء  $287 \text{ J}/(\text{K kg})$ .

### **1.9 الجريان المستقر (steady flow)**

هو الجريان الذي لا تتغير صفاته مع الزمن عند أي موضع محدد.

### **1.10 اجريان المنتظم (uniform flow)**

يوصف الجريان بأنه منتظم عند مقطع إذا كانت قيمة كل من خواصه ثابتة في كل نقاط المقطع.

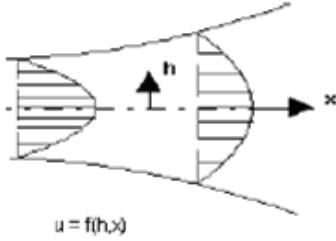
### **1.11 خط الانسياب (streamline)**

يُعرف خط الانسياب بأنه الخط الذي تشكل المماسات له في كل أجزائه اتجاهات السرعة في وقت محدد.

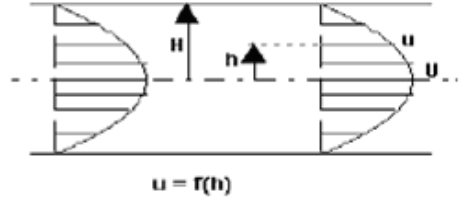
### **1.12 أبعاد السريان (dimensions of flow)**

يوصف السريان بأنه أحادي، ثنائي او ثلاثي البعد بناءً على العدد الأدنى من الإحداثيات المكانية التي يمكن ان يوصف بها. الشكل 1.2 يعطي مثالا لسريان احادي البعد وآخر ثنائي البعد.

سريان ثنائي البعد



سريان احادي البعد



الشكل 1.2

### 1.13 الاجهاد (stress)

الإجهاد هو القوة السطحية العاملة على وحدة مساحة

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

و للإجهاد مُركبين أحدهما عمودي والآخر مماسة

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_n + \underline{\sigma}_t$$

ويفضّل في ميكانيكا الموائع استخدام تعبير الضغط p في الاتجاه المتعامد حيث

$$\underline{\sigma}_n = -p\underline{n}$$

و يستخدم تعبير الإجهاد القصي  $\tau$  في الاتجاه المماس حيث

$$\underline{\sigma}_t = \underline{\tau}$$

$$\underline{\sigma} = -p\underline{n} + \underline{\tau}$$

وبذلك

### 1.14 التدفق الصفائحي (laminar flow) / التدفق المضطرب (turbulent flow)

يتصف التدفق الصفائحي بثبات الانسيابية بحيث يمكن اعتبار طبقاته تنزلق فوق بعضها

البعض في شكل صفائح او رقائق، بينما يتصف التدفق المضطرب بالعنف و الاضطراب.

و يمكن إثبات أن التحول من الحالة الصفائحية إلى الحالة المضطربة عند معدل سريان ثابت

يحدث بزيادة السرعة او زيادة القطر (diameter) او إنقاص اللزوجة. ويجمع المتغيرات الثلاثة

مدخل الى ديناميكيات الموائع والغازات (fluid and gas dynamics)

مقدار لأبعدي يعرف بعدد رينولدز (Reynolds number)  $Re$  يحكم التحول المذكور. ويحدث هذا التحول للسريان في الانابيب في الفسحة  $2000 \leq Re \leq 4000$ . ويسمى عدد رينولدز الذي يحدث عنده التحول عدد رينولز الحساس  $Re_c$ .

### 1.15 المنظومة (system) وحجم التحكم (control volume) عنصر مائع لا متناهية (infinitesimal fluid element)

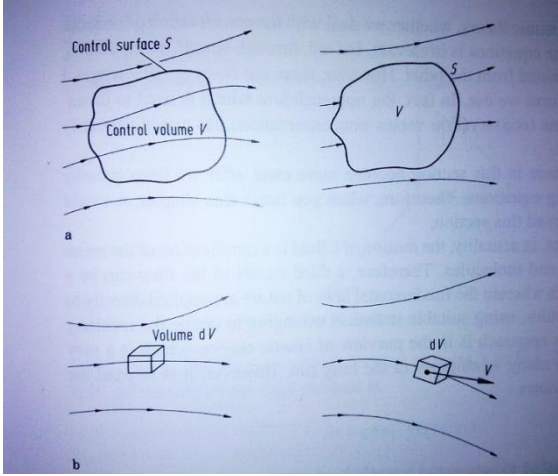


الشكل 1.3

المنظومة معنية بكمية محددة من المادة يحدها عن بقية المائع جدار تخيلي او حقيقي و يمكن ان يتغير موقعها وشكلها مع الوقت. حجم التحكم منطقة محددة وثابتة في المكان، ويمكن ان تتغير المادة داخل حجم التحكم مع الزمن. هذا الحجم مرسوم في الشكل (1.3.1 a) على اليسار ولكن ايضاً يمكن ان ننظر الى حجم التحكم كما هو في الشكل (1.3.1 b) على اليمين و هو حجم التحكم الذي يتحرك مع السريان.



المنظومة (system) وحجم التحكم (control volume) عنصر مائع لا متناهي (infinitesimal fluid element)



الشكل (1.3.1 a and b)  
([Wendt 2009], Fig. 2.1)

**Fig. 1.3.1 a, left side:** *finite control volume  $V$ , an a finite control surface  $S$  fixed in space:*

The fluid equations that we *directly* obtain by applying the fundamental physical principles to a finite control volume are in *integral form*.

These integral forms of the governing equations can be manipulated to *indirectly* obtain partial differential equations. The equations so obtained, in either integral or partial differential form, are called the *conservation form* of the governing equations.

الشكل (1.3.1 a), الجهة اليسرى: حجم التحكم المحدود  $V$ ؛ مساحة التحكم المحدودة  $S$  ثابتة في المكان:

معادلات الموائع التي نحصل عليها مباشرة بتطبيق قواعد الفيزياء الأساسية الى حجم التحكم المحدود الذي يكون في شكل تكاملي.

هذه الاشكال التكاملية من المعادلة الاساسية تستطيع ان تُعالج بطريقة غير مباشرة للحصول على المعادلات التفاضلية الجزئية. المعادلات التي تم الحصول عليها، سواء في شكل تكاملي أو تفاضلي جزئي، تسمى الشكل التحفظي (*conservation form*) للمعادلات الاساسية.

The equations obtained from the finite control volume moving with the fluid (**Fig. 1.3.1 a, right side**), in either integral or partial differential form, are called the *non-conservation form* of the governing equations.

المعادلات التي تم الحصول عليها عبر حجم التحكم المحدود تتحرك مع المائع (الشكل 1.3.1 الجانب الأيمن)، سواء في شكل تكاملي أو تفاضلي جزئي ، ويطلق عليه الشكل الغير تحفظي ( *non-conservation form* ) من المعادلات الاساسية.

If we consider an infinitesimal fluid element, which is fixed in space (**Fig. 1.3.1 b, left side**), we can *directly* derive the partial differential equations. This is again the conservation form.

إذا أخذنا في الاعتبار عنصر مائع متناهي الصغر، فهو ثابت في المساحة (الشكل 1.3.1 b ، الجانب الأيسر) ، يمكن أن نشق مباشرة المعادلات التفاضلية الجزئية. هذا هو أيضاً الشكل التحفظي.

If we consider an infinitesimal fluid element, which is moving in space (**Fig. 1.3.1 b, right side**), we can *directly* derive the partial differential equations. This is again the non-conservation form.

إذا أخذنا في الاعتبار عنصر مائع متناهي الصغر ، والذي يتحرك في المساحة (الشكل 1.3.1 b ، الجانب الأيمن) ، يمكن أن نشق بشكل مباشر المعادلات التفاضلية الجزئية. ، هذا هو أيضاً النموذج الغير تحفظي.

In general aerodynamic theory, whether we deal with the conservation or non conservation forms of equations is irrelevant. However, there are cases in CFD where it is important which form we use.

من الناحية النظرية الأيرودينامية العامة ، سواء نحن نتعامل مع أشكال التحفظي أو غير التحفظي المعادلات هو سواء. ومع ذلك ، هناك حالات في ال CFD حيث المهم اي شكل نستخدم.

### 1.16 الضغط المقياسي

الضغط المقياسي = الضغط المطلق - الضغط الجوي

### 1.17 القوة الجسمية والقوة السطحية

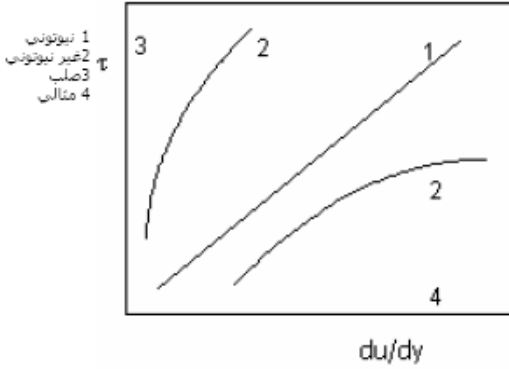
القوة الجسمية هي التي تنشأ عن كتلة الجسم مثل قوة الجاذبية والقوة السطحية هي تلك التي تعمل على سطح المادة وتتحصر في الضغط والقص.

### 1.1 الاجهاد القصي

تنسب الى نيوتن العلاقة النظرية بين الاجهاد القصي  $\tau$  وممال السرعة في الاتجاه المتعامد

$$\frac{\partial u}{\partial y} \text{ للسريان الصفائحي و هي:}$$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \dots\dots\dots(1.3)$$



الشكل (1.4)

وقد أجريت تجارب للتحقق من المعادلة معملياً و عُلم أنها صحيحة لمعظم الموائع المستخدمة في التطبيقات الهندسية مثل الماء والهواء و الوقود النقطي، و سُمي ثابت المعادلة  $\mu$  باللزوجة أو اللزوجة المطلقة أو اللزوجة الحركية، ووحدها Pa.s. وتعرف الموائع التي تستجيب لهذه العلاقة عند درجة حرارة ثابتة بالموائع **النيوتونية** - الشكل (1.4).

تُسمى فصيلة الموائع التي لا تُعطي علاقة خطية بين القص وممال السرعة موائع **لانبيوتونية**. أمثلةً لها البوية و النفط الشمعي. تؤثر درجة الحرارة في قيمة اللزوجة حيث تنقص مع ازدياد الحرارة للسوائل وتزيد مع ازدياد الحرارة للغازات .

تُعرف اللزوجة الكينماتية  $\nu$  كما يلي:  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  ووحدها  $m^2/s$ .

## 2 المعادلات الأساسية في ميكانيك الموائع (Governing Equations of Fluid Dynamics)

التالي منبني على [صديق]، فصل 2 و [Anderson 1991].

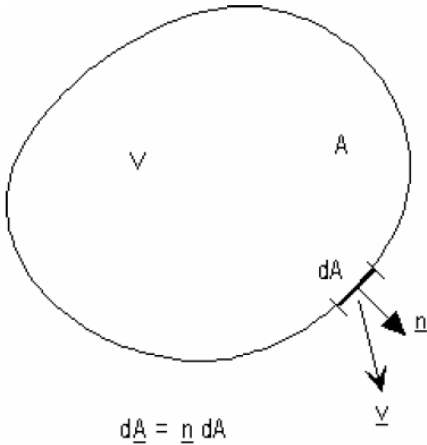
### 2.1 مدخل

الاساس في CFD هو المعادلات الأساسية في ميكانيك الموائع و هي معادلات الحفظ الثلاث:

حفظ الكتلة (mass conservation) وحفظ الطاقة (energy conservation) وحفظ كمية الحركة (momentum conservation). و قدم لذلك بتعريف متجه السريان الذي يشكل عنصراً مشتركاً في كل معادلات الحفظ.

#### 2.1.1 متجه السريان

الشكل 2.1



الحجم التحكمي الموضح في الشكل (2.1) حجمه  $V$  و مساحته  $A$ . بالتركيز على المساحة

التفاضلية  $dA$  فان الكتلة الخارجة عبرها هي  $dm$  في الوقت  $dt$  ليصبح معدل السريان  $\dot{m}$ .  
سرعة السريان في الموضع هي المتجه  $\underline{v}$  بزاوية  $\alpha$  مع المتجه أحادي الطول  $\underline{n}$  المتعامد على

المساحة  $dA$  حيث

$$d\underline{A} = \underline{n} dA$$

$$d\dot{m} = \rho d\underline{v} = \rho \underline{v} d\underline{A}$$

$\dot{m}$  = معدل سريان الكتلة عبر كل السطح  $A$  هو:

$$(2.1) \dots \dots \dots \dot{m} = \iint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A}$$

نعرف متجه سريان الكتلة كما يلي:

$$\rho \underline{v} = \text{متجه سريان الكتلة} = (\text{متجه السرعة})(\text{الكتلة في وحدة حجمية})$$

وبالمثل:

$$\rho \left( e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{v} = \text{متجه سريان الطاقة} = (\text{متجه السرعة})(\text{الطاقة في وحدة حجمية})$$

وبالمثل:

$$\text{متجه سريان كمية التحرك} = (\text{متجه السرعة})(\text{كمية التحرك في وحدة حجمية}) =$$

$\rho u \underline{v}, \rho v \underline{v}, \rho w \underline{v}$  في الاتجاهات  $x, y, z$  على التوالي.

و بذلك فان معدل سريان الطاقة عبر السطح  $A$

$$(2.2) \dots \iint_A \rho \left( e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{v} \cdot d\underline{A}$$

= معدل سريان كمية التحرك عبر السطح A

$$(2.3) \dots \iint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A}$$

## 2.2 الاشتقاق الكبير (The Substantial Derivative)

As a model for the flow, we will adopt the picture shown at the right of Fig. 1.3.1 (b).

Namely that of an **infinitesimally small fluid element moving with the flow**. The motion of the fluid element is shown in detail in Fig. 2.2.1.

Here, the fluid element is moving through Cartesian space. The unit vectors along the x, y, z axis are  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

The vector velocity field in this Cartesian space is given by

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Where the components of velocity are given respectively by

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

كنموذج للسريان، سوف نعتمد على الصورة المعروضة على يمين الشكل (b) 1.3.1. ألا وهو عنصر من الموائع المتناهي الصغر تتحرك مع السريان. حركة عنصر السريان معروضة بالتفصيل في الشكل 2.2.1.

هنا، العنصر المائع يتحرك عبر الفضاء الديكارتي Cartesian space. وحدة المتجهات على طول المحور x, y, z، تكون  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

يتم إعطاء مجال متجهات السرعة في هذا المجال من قبل ديكارت Cartesian space عبر:

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

حيث يتم إعطاء مكونات السرعة على التوالي

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

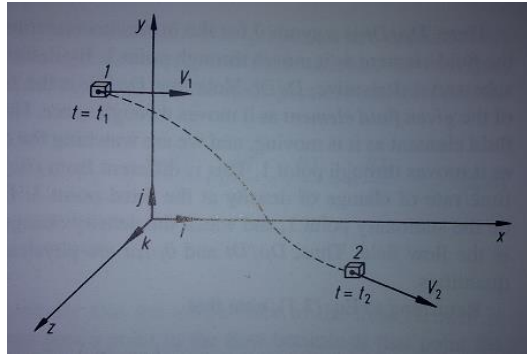
$$w = w(x, y, z, t)$$

Note that we are considering in general an *unsteady flow*, where  $u$ ,  $v$ , and  $w$  are functions of both (space and time,  $t$ ). In addition the scalar density field is given by  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ .

علما أننا نأخذ بعين الاعتبار بالعموم سريان غير رتيب، حيث  $u$ ,  $v$  و  $w$  هي وظائف المكان والزمان  $t$ . على حدٍ سواء، بالإضافة إلى ذلك هو إعطاء مقدار الكثافة العددية من قبل

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

Fig. 2.2.1 ([Wendt 2009], Fig. 2.2)



الشكل (2.2.1)

([Wendt 2009], Fig. 2.2)

At the time  $t_1$  the fluid element is located at point 1 in Fig. 2.2.1. At this point and time, the density of the fluid element is  $\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$

في الوقت  $t_1$  حيث يكون العنصر المائع موجود في النقطة 1 على الشكل 2.2.1. عند هذه النقطة والوقت ، وكثافة العنصر المائع

$$\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$$

At a later time  $t_2$  the fluid element has moved to the point 2 where the density is  $\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2)$

في وقت لاحق  $t_2$  انتقل العنصر المائع إلى نقطة 2 حيث الكثافة هي  $\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2)$

Since  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ , we can expand this function in a Taylor's series about point 1 as follows:

بما ان  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  ، يمكننا توسيع نطاق هذه المهمة في سلسلة تايلور Taylor's series



حول النقطة 1 على النحو التالي:

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 (x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 (y_2 - y_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 (z_2 - z_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 (t_2 - t_1) + (\text{higher order terms})$$

مع تجاهل مصطلحات الترتيب الأعلى لكي نحصل على  
With ignoring the higher order terms we obtain

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 \left(\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\right) + \left(\frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}\right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 \quad (2.1.1)$$

المعادلة (2.1.1) فيزيائياً هي متوسط الوقت لمعدل التغير في كثافة العنصر المائع وهي تنتقل من النقطة 1 إلى النقطة 2. في الحد،  $t_2$  مثل نخرج  $t_1$  ، يصبح هذا المصطلح

Eq. (2.1.1) is physically the average time-rate-of-change in density of the fluid element as it moves from point 1 to point 2. In the limit, as  $t_2$  approaches  $t_1$ , this term becomes

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \right) \equiv \frac{D\rho}{Dt}$$

$\frac{D\rho}{Dt}$  هو رمز لحظية معدل الوقت لتغيير الكثافة. Is a symbol for the instantaneous time rate of change of density.

وفقاً للتعريف ، هذا ما يسمى رمز الاشتقاق الكبير ،  $D/Dt$  ،

By definition, this symbol is called the substantial derivate,  $D/Dt$ .

$\frac{D\rho}{Dt}$  is the time rate of change of density of the given fluid element.

Our eyes are locked with the fluid element, not with the point in the

هو معدل الوقت لتغيير كثافة عنصر مائع معين. ونثبت أعيننا مع العنصر المائع، وليس مع نقطة في الفضاء.

space. So  $\frac{D\rho}{Dt}$  is different  $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1$  كذلك  $\frac{D\rho}{Dt}$  تختلف فيزيائياً وعددياً من  $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1$  التي هي فيزيائياً المعدل الزمني لتغير الكثافة في نقطة ثابتة 1.  $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1$  which is physically the

time rate of change of density at the fixed point 1.

بالعودة الى المعادلة (2.1.1) ، نلاحظ أنَّ

Returning to Eq. (2.1.1), note that

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left( \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right) \equiv u$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left( \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \right) \equiv v$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left( \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \right) \equiv w$$

Thus, taking the limit of Eq.(2.1.1) وهكذا، بأخذ الحد للمعادلة (2.1.1) عندما  $t_2 - t_1$  as  $t_2 - t_1$ , we obtain

لنحصل ،  $t_2 - t_1$

$$\frac{D\rho}{Dt} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z} \quad (2.1.2)$$

From (2.1.2) we obtain an expression for the substantial derivative in Cartesian coordinates من (2.1.2) نحصل على التعبير عن الاشتقاق الكبير في الإحداثيات الديكارتية

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.1.3)$$

In cartesian coordinates the vector operator  $\nabla$  is defined as في الإحداثيات الديكارتية يتم تعريف عامل المتجه  $\nabla$

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.1.4)$$

Hence Eq.(2.1.3) can be written as وبالتالي يمكن أن تكون المعادلة (2.1.3) مكتوبة

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \quad (2.1.5)$$

Eq.(2.1.5) represents a definition of the substantial derivative operator in vector notation; thus it is valid for any coordinate system. المعادلة (2.1.5) تمثل تعريف عامل الاشتقاق الكبير في تدوين المتجهات، وبالتالي يصح لأي نظام احداثيات.

$\frac{\partial}{\partial t}$  is called the *local derivative*

which is physically the time rate of change at a fixed point;  $\vec{V} \cdot \nabla$  is called the *consecutive derivative*, which is physically the time rate of change due to the movement of the fluid element from one location to another in the flow field where the flow properties are spatially different. The substantial derivative applies to any flow-field variable, for example,  $Dp/Dt$ ,  $DT/Dt$ , ..., where  $p$  and  $T$  are static pressure and temperature respectively.

$\frac{\partial}{\partial t}$  تسمى المشتقات المحلية التي هي فعليا المعدل

الزمني للتغيير في نقطة ثابتة، ويسمى الاشتقاق المتتالي، وهو فعليا معدل الوقت للتغيير بسبب حركة العنصر السائل من مكان إلى آخر في حقل السريان حيث خصائص السريان هي مختلفة مكانياً. الاشتقاق الكبير ينطبق على أي متغير في ميدان التدفق، على سبيل المثال،  $Dp/Dt$ ،  $DT/Dt$ ، حيث  $p$  و  $T$  هي الضغط ودرجة الحرارة على التوالي.

The substantial derivative is essentially the same as the total differential from calculus.

الاشتقاق الكبير هو اساساً نفس مجموع التفاضل من حساب التفاضل و التكامل. لذلك، الاشتقاق

Therefore, the substantial derivative is nothing more than a total derivative with respect to time. الكبير ليس أكثر من مجرد مجموع المشتقات مع احترام الوقت.

### 2.3 المعنى الفيزيائية من تباعد السرعة (divergence of velocity) $\nabla \cdot \vec{V}$

تباعد السرعة (divergence of velocity)  $\nabla \cdot \vec{V}$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt} \dots \dots \dots (2.4)$$

$\nabla \vec{V}$	is	$\nabla \vec{V}$ هو التغيير الزمني لحجم التحكمي ( control
physically the		(fluid element) من عضو مائع (volume
time rate of		جارٍ (moving) و ذلك حسب الحجم
change of the		التحكمي (per control volume)
volume of a		
moving fluid		
element, per		
unit volume.		

### 2.4 حفظ الكتلة (mass conservation)

صيغة قانون حفظ الكتلة مطبقاً على سريان المائع:

"معدل تراكم الكتلة داخل الحجم التحكمي مضافاً إليه خالص معدل سريان الكتلة إلى خارج الحجم التحكمي يساوي صفر.

$$\iiint_V \rho dV = \text{الكتلة الكلية داخل الحجم التحكمي}$$

معدل ازدياد الكتلة داخل الحجم التحكمي (control volume):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

لأن حدود التكامل لا تعتمد على الوقت.

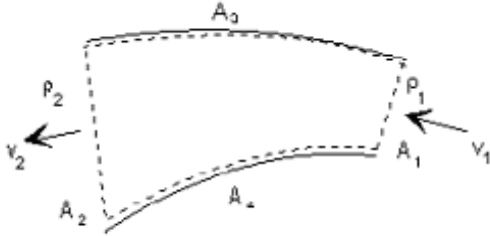
من المعادلة (2.1) خالص سريان الكتلة إلى خارج الحجم التحكمي

$$= \iint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_A \rho \underline{v} \cdot d\underline{A} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

المادلة (2.4) هي معادلة حفظ الكتلة في الصورة التكاملية (integral form).

تطبيق على سريان احادي البعد (الشكل 2.2):



الشكل 2.2

الحد الاول في المعادلة

(2.4) يساوي صفر

نسبة لرتابة السريان.

السطحان (3) و

(4) لا يعتبرهما كتلة.

ولذلك يصير فيهما

تكامل الحد الثاني و

معادلة الكتلة صفراً.

تختزل الكتلة بذلك الى

الصورة:

$$\iint_{A_1} \rho v_1 \cdot d\mathbf{A}_1 + \iint_{A_2} \rho v_2 \cdot d\mathbf{A}_2 = 0$$

وبلاحة ان المتجه  $\underline{A}$  يتجه إلى خارج الحجم التحكمي

$$-\iint_{A_1} \rho v_1 \cdot d\mathbf{A}_1 + \iint_{A_2} \rho v_2 \cdot d\mathbf{A}_2 = 0$$

$$-\rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2 = 0$$

$$\rho v A = \text{ثابت} \dots \dots \dots (2.5)$$

### 2.4.1 معادلة الاستمرارية (continuity equation)

يطلق هذا الاسم عامةً على معادلة حفظ الكتلة في صورتها التفاضلية. بدءاً من المعادلة (2.4) يمكن تحويل الحد الثاني من صورة التكامل السطحي الى صورة التكامل الحجمي باستخدام نظرية التباعد (divergence theorem).

To obtain the basic equations of fluid motion, always the following way is followed:

للحصول على المعادلات الأساسية لحركة الموائع، يجب دائماً اتباع الطريقة التالية :

- Choose the appropriate fundamental physical principles from physics
- Apply these physical principles to a suitable model of the flow.
- From this application, extract the mathematical equations which embody such physical principles.

- اختيار المبادئ الفيزيائية الأساسية المناسبة من الفيزياء
- تطبيق هذه المبادئ الفيزيائية لنموذج سريان مناسب.
- من هذا التطبيق، استخراج المعادلات

So, in our case the physical principle

الرياضية التي تتضمن المبادئ الفيزيائية.

is: "Mass is Conserved".

لذا، في حالتنا الفيزيائية المبدأ هو: "الكتلة

هي المحفوظة" ("Mass is Conserved").

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V (\nabla \cdot \rho \underline{v}) dV = 0$$

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{v} \right) dV = 0$$

تبعاً لقوانين التكامل تكون قيمة المكامل صفراً إذا كانت قيمة التكامل صفراً و كانت حدود التكامل اختيارية.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{v} = 0 \dots \dots \dots (2.6a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \dots \dots \dots (2.6b)$$

حيث  $u, v, w$  هي مركبات السرعة في الاتجاهات  $x, y, z$ . و في حال ان السريان لا

انضغاطي (incompressible flow)

$$\dots \dots \dots \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots (2.7)$$

**Divergence Theoreme:**

إذا كانت  $f = f(x, y, z)$   
بمعال  $f$  هو المتجه:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{k} \dots\dots\dots$$

إذا كانت  $\phi$  متجه ذا مركبات مطلقة  $\phi_x$  و  $\phi_y$  و  $\phi_z$  في الاتجاهات  $X$  و  $Y$  و  $Z$  ، على  
ي ، فان التباعد لـ  $\phi$

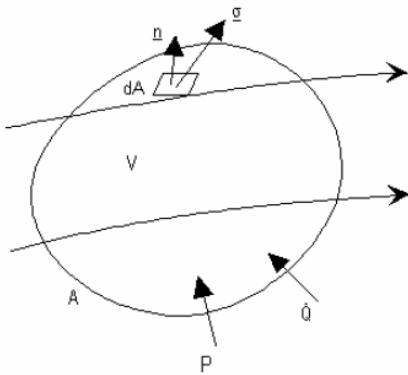
$$\nabla \cdot \phi = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z} \dots\dots\dots$$

تربط نظرية التباعد التكامل الحجمي و التكامل السطحي بالعلاقة

$$\iiint_V (\nabla \cdot \phi) dV = \iint_A \phi \cdot d\underline{A} \dots\dots\dots$$

## 2.5 حفظ الطاقة (energy conservation)

الشكل 2.5



تستمد معادلة حفظ الطاقة من القانون الاول  
للحركية الحرارية مطبقاً على حجم تحطمي:

"معدل تراكم الطاقة داخل الحجم التحكمي مضافاً اليه خالص معدل سريان الطاقة الى خارج  
الحجم التحطمي بانتقال الكتلة يعادل القدرة المبذولة على المائع داخل الحجم التحكمي مضافاً  
اليها خالص معدل سريان الحرارة إلى داخل الحجم التحكمي".

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left( e + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \iint_A \rho \left( e + \frac{v^2}{2} + gz \right) \underline{v} \cdot d\underline{A} = \iint_A (\underline{\sigma} \cdot \underline{v}) dA + P + \dot{Q}$$



الحدان الاوليان في جانب المعادلة الأيمن يعبران عن القدرة المبذولة على المائع داخل الحجم التحكمي، و  $\dot{Q}$  معدل سريان الحرارة إلى داخل الحجم التحكمي. بتجاهل اللزج (viscosity) يصبح الإجهاد (stress)  $\sigma$ :

$$\underline{\sigma} = -p\underline{n}$$

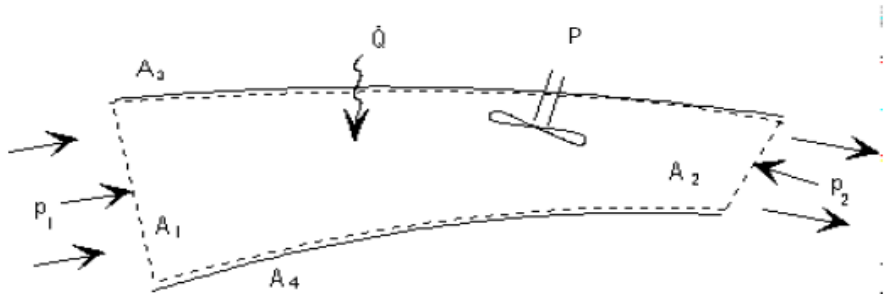
<-

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} [\rho(e + \frac{v^2}{2} + gz)] dV + \iint_A \rho(e + \frac{v^2}{2} + gz) \underline{v} \cdot d\underline{A} = - \iint_A p \underline{v} \cdot d\underline{A} + P + \dot{Q}$$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} [\rho(e + \frac{v^2}{2} + gz)] dV + \iint_A \rho(e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz) \underline{v} \cdot d\underline{A} = P + \dot{Q} \dots \dots \dots (2.8)$$

تطبيق على سريان رتيب أحادي البعد:

رتابة السريان تعني أن الحد الأول في المعادلة (2.8) يساوي صفر، و لا انتقال للكتلة عبر الأسطح (3) و (4).  
وبذلك تُختزل المعادلة إلى الصورة



الشكل 2.5

$$-\rho_1 \left( e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) v_1 A_1 + \rho_2 \left( e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) v_2 A_2 = P + \dot{Q}$$

بالاستعانة بمعادلة حفظ الكتلة للسريان الرتيب أحادي البعد (2.5)

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dot{m}$$

$$\dot{m} \left( e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) + P + \dot{Q} = \dot{m} \left( e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right)$$

$$\frac{e_1}{g} + \frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{\dot{m} g} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m} g} = \frac{e_2}{g} + \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \dots \dots \dots (2.9)$$

في كثير من التطبيقات الهندسية يمكن تجاهل انتقال الحرارة  $\dot{Q} = 0$   
و تجاهل التغير في درجة الحرارة  $T_1 = T_2, e_1 = e_2$   
ويمكن اعتبار السريان لا انضغاطي  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

فتصبح المعادلة (2.9)

$$\frac{P_1}{\rho_1 g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{m g} = \frac{P_2}{\rho_2 g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \dots\dots\dots(2.10)$$

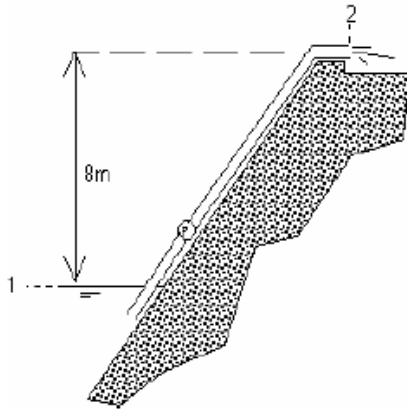
في حال أن القدرة  $P$  موجبة فإنها تمثل مضخة و إذا كانت سالبة فتمثل عنفة.  
في حال عدم وجود مضخة أو عنفة بين المقطعين (1) و (2) تصبح المعادلة (2.10)

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \text{السمت الكلي} \dots\dots\dots(2.11)$$

أي: السمت الكلي = سمت الرفع + سمت السرعة + سمت الضغط

### مثال

يُعرف الآتي عن وحدة ضخ ترفع الماء من النيل إلى أعلى الجرف:



الشكل (2.6)

الرفع: 8m

معدل السريان الحجمي 15 l/s

قطر الأنابيب صعيد المضخة: 154mm

قطر الأنابيب سافل المضخة: 102mm

كثافة الماء:  $1000 \text{ kg/m}^3$

المطلوب حساب:

(أ) السرعة صعيد وسافل المضخة

(ب) القدرة الخارجة من المضخة إذا

اعتبرنا السريان لا لزج.

(أ) معادلة حفظ الكتلة (2.5) للسريان اللانضغاطي تُعطي

$$v_u \cdot A_u = v_d \cdot A_d = \dot{V} = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$v_u = \frac{0.015}{\frac{\pi}{4}(0.154)^2} = 0.81 \text{ m/s}$$

$$v_d = \frac{0.015}{\frac{\pi}{4}(0.102)^2} = 1.84 \text{ m/s}$$

حيث اللاحقة  $u$  تعني صعيد المضخة و اللاحقة  $d$  تعني سافل المضخة.

(ب) معادلة الطاقة لهذه الحالة (2.10)

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P}{\dot{m}g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$P = \dot{m}g \left[ \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) \right]$$

المقطعان (1) و (2) مفتوحان للجو و يعني ذلك

$$p_1 = p_2 = p_a$$

$$p_2 - p_1 = 0$$

كما أن  $z_2 - z_1 = 8$

السطح (1) سطح النيل: سرعة نقصانه صفر!

$$v_1 = 0, v_2 = v_d$$

معدل سريان الكتلة  $\dot{m}$

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = 1000(0.015) = 15.0 \text{ kg/s}$$

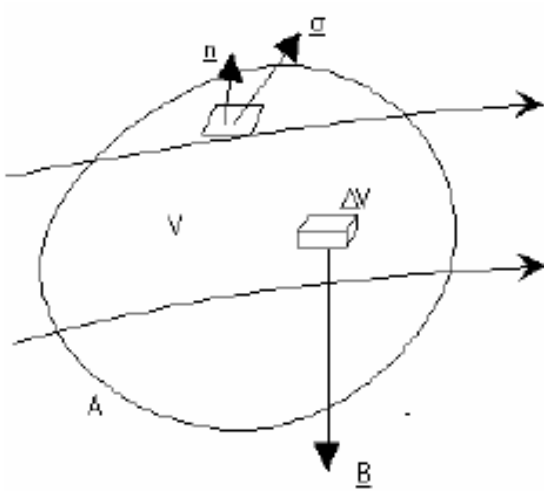
وتصبح المعادلة

$$P = (15.0)(9.81) \left[ \frac{(1.84)^2}{2(9.81)} + 8 \right] = 1203 \text{ W}$$

القدرة الخارجة = **1.2 kW**

## 2.6 حفظ كمية التحرك (momentum conservation)

الشكل 2.6



يستمد هذا القانون من قانون نيوتن الثاني (Second Newtonian Law) للحركة مطابقاً على حخم التحكمي: "معدل تراكم كمية التحرك داخل الحخم التحكمي مضافاً اليه خالص معدل سريان كمية التحرك إلى خارج الحخم التحكمي بانتقال الكتلة يعادل مجموع القوى المؤثرة على المائع".

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\rho \underline{v}) dV + \iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA$$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) dV + \iint_A \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot d\underline{A}) = \iiint_V \underline{B} dV + \iint_A \underline{\sigma} dA \dots\dots\dots(2.12)$$

نسترجع هنا أن الإجهاد  $\underline{\sigma}$  يساوي مجموع المتجهين  $p\underline{n}$  و  $\underline{\tau}$ . كما أن  $\underline{B}$  هي القوة الجسمية على وحدة حجمة و تتمثل في الأحوال الأعم في قوة الجاذبية على وحدة حجمة أي  $\underline{B} = -\rho g \underline{k}$ .

## 2.7 تلخيص المعادلات الأساسية (governing equations) لديناميك الموائع مع ملاحظات

### 2.7.1 معادلات السريان اللزجي (viscous flow) دون النظر الى تفاعلات الكيميائية (without considering chemical reactions)

Viscous flow: a flow which includes the dissipative, transport phenomena of viscosity and thermal conduction. The additional transport phenomenon of mass diffusion is not included because we are limiting our considerations to a homogenous, non-chemically reacting gas. Combustion for example is a flow with a chemical reaction. If diffusion were to be included, there would be additional continuity equations – the species continuity equations involving mass transport of chemical species  $i$  due to a concentration gradient in the species.

Moreover the energy equation would have an additional term to account for energy transport due to the diffusion of species.

With the above restrictions in mind, the governing equations for an unsteady, three-dimensional, compressible, viscous flow are:

السريان اللزجي هو الذي يتضمن ظواهر التبديد والنقل ، اللزوجة والتوصيل الحراري إضافة لم يتم تضمين ظاهرة النقل لنشر الكتلة لأننا قمنا بتحديد اعتباراتنا إلى تفاعلات غاز متجانسة و غير كيميائيا. الاحتراق على سبيل المثال هو سريان مع تفاعل كيميائي. إذا كان لا بد من شمل النشر، لن يكون هناك معادلات استمرارية إضافية -- أنواع معادلات الاستمرارية التي تنطوي على نقل الكتلة للأنواع الكيميائية  $i$  بسبب تدرج التركيز للأنواع.

وعلاوة على ذلك فإن معادلة الطاقة لديها إضافة مدة على حساب نقل الطاقة بسبب انتشار الأنواع.

مع الاخذ في الاعتبار القيود المذكورة أعلاه ، والمعادلات الأساسية لغير ثابت، ثلاثي الأبعاد انضغاطي ، والسريان اللزج هي :

### Continuity equations

(Non-conservation form – [Wendt 2009], Eq.2.18)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

(Conservation form – [Wendt 2009], Eq. 2.27)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

معادلات الاستمرارية

(بالشكل الغير محافظي)

الشكل التحفظي

Equation [Wendt 2009], (2.18) is the continuity equation in non-conservation form. Note that:

- 1) By applying the model of an *infinitesimal fluid element*, we have obtained Eq. [Wendt 2009], (2.18) *directly* in partial differential form.
- 2) By choosing the model to be *moving with the flow*, we have obtained the **non-conservation** form of the continuity equation, namely Eq. [Wendt 2009], (2.18).

Equation [Wendt 2009], (2.27) is the continuity equation in **conservation** form. Note that:

- 1) By applying the model of a *finite control volume*, we have obtained Eq. [Wendt 2009], (2.23) *directly* in integral form. Only after some manipulation of the integral form the partial differential form, namely Eq. [Wendt 2009], (2.27), is obtained.
- 2) By choosing the model to be *fixed in space*, we have obtained the conservation form of the continuity equation, namely Eqs. [Wendt 2009], (2.13) and (2.27).

المعادلة [Wendt 2009], (2.18) هي معادلة الاستمرارية في الشكل الغير تحفظي.

- ملاحظة ما يلي :
- (1) من خلال تطبيق نموذج لعنصر مائع متناهي الصغر، لنحصل على المعادلة. [Wendt 2009], (2.18) مباشرة على شكل تفاضلي جزئي.

(2) عن طريق اختيار النموذج الذي يتحرك مع السريان، لقد حصلنا على الشكل الغير تحفظي لمعادلة

الاستمرارية ، وهي المعادلة. [Wendt 2009], (2.18).

المعادلة [Wendt 2009], (2.27) هي معادلة الاستمرارية في الشكل التحفظي ملاحظة ما يلي :

- (1) من خلال تطبيق نموذج لمراقبة الحجم المحدود، حصلنا على المعادلة. [Wendt 2009], (2.23) مباشرة



في شكل متكامل. فقط بعد مرور  
بعض معالجات للشكل التفاضلي  
الجزئي. اي [Wendt 2009]،  
(2.27). التي حصلنا عليها

(2) عن طريق اختبار نموذج للتثبيت في  
الفضاء، لنحصل على شكل التحفظي  
لمعادلة الاستمرارية

## Momentum equations

(Non-conservation form – [Wendt

## معادلات كمية التحرك

2009], Eqs. 2.36a-c)

$$\text{x-component: } \rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

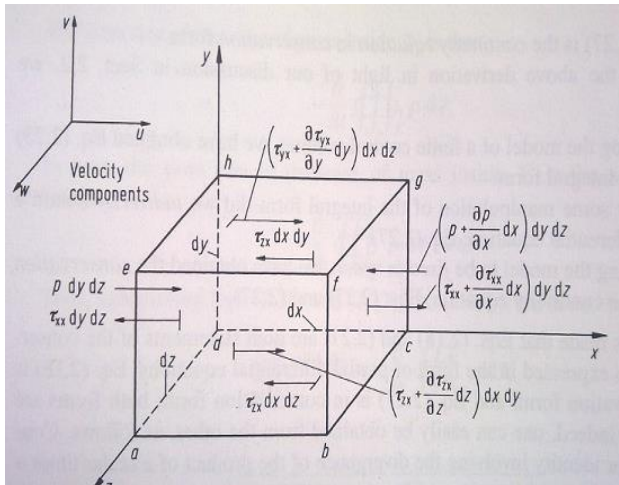
$$\text{y-component: } \rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y$$

$$\text{z-component: } \rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z$$

[Wendt 2009],

Fig.2.5:

Infinitesimal  
y small,  
moving fluid  
element. Only  
the forces in  
the x direction  
are shown.



Wendt]

،[2009

الشكل

2.5: تحرك

لعنصر مائع

متناهي الصغر.

لا تظهر إلا

للقوات في

الاتجاه x.

Total force in the x-direction:  $F_x$

$F_x$  هي القوة الاجمالية في اتجاه x

[Wendt 2009], S.28 Def. of body forces and surface forces:

هناك نوعين من القوة في هذا الايطار:

- 1) *Body forces*, which act directly on the volumetric mass of the fluid element.

(1) قوات جسمية التي تتفاعل مباشرةً

على الكتلة الحجمية للعضو مائعي **Examples: gravitational, electric and**

**magnetic forces.** Def.: body force on the fluid element acting in the x-direction =  $\rho f_x (dx dy dz)$ .

(fluid element). و امثلة هي: القوة الجاذبية والكهربائية والمغناطيسية.

2) *Surface forces*, which act directly on the surface of the fluid element. They are due to only two sources: (a) pressure distribution acting on the surface, imposed by the outside fluid surrounding the fluid element, and (b) the shear and normal stress distributions acting on the surface, also imposed by the outside fluid "tugging" or "pushing" on the surface by means of friction.

تعريف: القوة الجسمية على العضو المائع

تمثل في الاتجاه x =

$$\rho f_x (dx dy dz)$$

(2) قوات سطحية التي تتفاعل مباشرة

على سطح العضو المائعي. وهو ناشئ

من مصدرين اثنين فقط: (a) توزيع

الضغط التي تعمل على السطح، التي

يفرضها خارج المائع في المناطق المحيطة

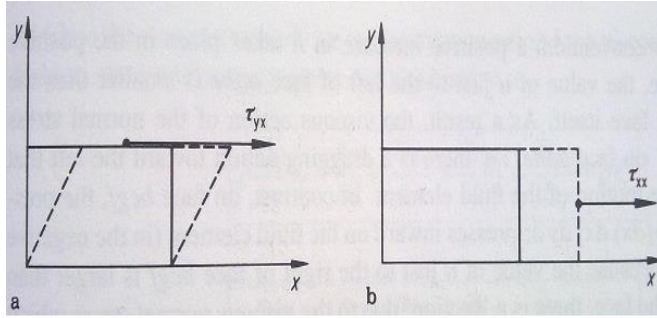
بالعنصر المائع، و (b) هي توزيعات

الضغط الطبيعي و القص التي تعمل

على السطح، كما فرضت من قبل

خارج المائع "التجاذبات" أو "الدفع"

على السطح عن طريق الاحتكاك.



[Wendt 2009], Fig.2.6: Illustration of shear and normal stresses

[Wendt 2009], الشكل 2.6: رسم

توضيحي للقص و للضغطات الطبيعية

(Conservation form – [Wendt 2009], – [Wendt 2009], Eqs. 2.42a-c)

الشكل التحفظي – [Wendt 2009], Eqs. 2.42a-c))

$$\text{x-component: } \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \rho f_x$$

$$\text{y-component: } \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} - \rho f_y$$

$$\text{z-component: } \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \rho f_z$$

**Energy equation**

معادلة الطاقة

(Non-conservation form – [Wendt 2009], Eq. 2.52)

الشكل الغير تحفظي

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) &= \rho q + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &- \frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} - \frac{\partial (wp)}{\partial z} + \frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial (v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial (w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (w\tau_{zz})}{\partial z} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \end{aligned}$$

(Conservation form – [Wendt 2009], Eq. 2.64)

الشكل التحفظي

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \vec{V} \right) \right] \\ &= \rho q + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial (up)}{\partial x} - \frac{\partial (vp)}{\partial y} - \frac{\partial (wp)}{\partial z} + \frac{\partial (u\tau_{xx})}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial (u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial (v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau_{yy})}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial (v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial (w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (w\tau_{zz})}{\partial z} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \end{aligned}$$

## 2.7.2 معادلات السريان الا لزجي (inviscid flow) دون النظر الى تفاعلات

الكيميائية (without considering chemical reactions)

هنا شروط اللزوجة لمعادلات الإسقاط أعلاه. Here are the viscous terms of the above equations dropped.

### 2.7.3 تعليقات على المعادلات الأساسية

Surveying the above governing equations, several comments and observations can be made:

إذا تأملنا المعادلات الأساسية، نستطيع ان نقول التالي:

1) They are coupled system of non-linear partial differential equations, and hence are very difficult to solve analytically. To date, there is no general closed-form solution to these equations.

(1) هي مجموعة مزواجة من المعادلات التفاضلية الجزئية الغير خطية وبالتالي من الصعب جدا حلها تحليلياً، حتى الآن ، لا يوجد اي حل تحليلي لهذه المعادلات.

2) For the momentum and energy equations, the difference between the non-conservation and conservation forms of the equation is just the left-hand side.

(2) لمعادلات كمية التحرك والطاقة ، الفرق بين الأشكال الغير تحفظية و التحفظية على المعادلة هو مجرد الجانب الأيمن.

3) Note that the conservation form of the equations contain terms on the left-hand side which include the divergence of some quantity, such as  $\nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V})$ ,  $\nabla \cdot (\rho u \vec{V})$ , etc. For this reason, the conservation form of the governing equations is sometimes called the *divergence form*.

(3) لاحظ أن شكل التحفظي للمعادلات تحتوي شروط على الجانب الأيمن، التي تشمل بعض الاختلاف في الكمية ، مثل  $\nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V})$  ,  $\nabla \cdot (\rho u \vec{V})$  وما إلى ذلك. لهذا السبب ، يسمى في بعض الأحيان الشكل التحفظي للمعادلات الأساسية بشكل التباعد.

(4) الشروط العادية و الضغط، في هذه

4) The normal and stress terms in these equations are functions of the velocity gradients, as given by [Wendt 2009], Eqs. (2.43a-f).

المعادلات هي دالات من تدرجات السرعة ، كما معطى حسب [Wendt 2009], Eqs. (2.43a-f).

5) The system contains five equations in terms of six unknown flow-field variables,  $\rho, p, u, v, w, e$ . In aerodynamics, it is generally reasonable to assume the gas is a perfect gas (which assumes that intermolecular forces are negligible). For a perfect gas, the equation of state is  $p = \rho RT$ , where R is the specific gas constant. This provides a sixth equation, but it also introduces a seventh unknown, namely temperature, T. A seventh equation to close the entire system must be a thermodynamic relation between state variables. For example,  $e = e(T, p)$  For a calorically perfect gas (constant specific heats), this relation would be  $e = c_v T$

(5) تحتوي المنظومة على خمسة معادلات في المصطلحات لستة متغيرات غير معروفة لحقل سريان  $\rho, p, u, v, w, e$ . في الديناميكا الجوية ، من المعقول أن نفترض عموما الغاز هو غاز المثالي (الذي يفترض أن القوات بين الجزيئات تكاد لا تذكر). بالنسبة للغاز مثالي ، المعادلة للحالة هي  $p = \rho RT$  حيث R هو الثابت المحدد للغاز. هذا يعطي المعادلة السادسة ، لكنه يقدم أيضا مجهول سابع ، وهي درجة الحرارة ، T. المعادلة السابعة لإغلاق النظام بأكمله يجب أن تكون علاقة حرارية بين متغيرات الحالة. على سبيل المثال ،  $e = e(T, p)$  ، الحرارية (تسخين ثابت محدد) ، فسوف تكون هذه العلاقة  $e = c_v T$  حيث  $c_v$  هي الحرارة النوعية لحجم ثابت.

where  $c_v$  is the specific heat at constant volume.

- 6) Historically, the momentum equations for a viscous flow are called the *Navier-Stokes equations*. However, in modern CFD literature, "a Navier-Stokes solution" simply means a solution of a *viscous flow problem using full governing equations (including continuity as well as energy and momentum)*.

6) تاريخياً ، وتسمى معادلات كمية التحرك للتدفق اللزج بمعادلات نافير ستوكس (Navier-Stokes). ومع ذلك ، في الأدب ال CFD الحديث " ، وهو حل نافير ستوكس " يعني ببساطة إيجاد حل لمشكلة التدفق اللزج باستعمال المعادلات الأساسية بما في ذلك الاستمرارية فضلا عن الطاقة وكمية التحرك).

#### 2.7.4 الحالات الجدارية (boundary conditions)

The boundary conditions, and sometimes the initial conditions, dictate the particular solutions to be obtained from the governing equations. (This makes the difference for example between the flow over a Boing 757 or past a wind mill, although the equations are the same). For a viscous fluid, the boundary condition on a surface assumes no relative velocity between the surface and the gas immediately at the surface. This is called the

الحالات الجدارية ، وأحيانا الحالات الأولية، تملئ حلولاً معينة التي يمكن الحصول عليها من المعادلات الأساسية. (وهذا ما يجعل الفرق مثلاً بين السريان على ال Boing 757 أو طاحونة الرياح السابقة ، على الرغم من ان المعادلات هي نفسها). للمائع اللزج، الحالة الجدارية على السطح لا تتحمل السرعة النسبية بين السطح والغاز مباشرة على السطح. وهذا ما يسمى حالة عدم الانزلاق (*no-slip*). إذا كان السطح هو ثابت إذاً



*no-slip* condition. If the surface is stationary, then  $u = v = w = 0$  at the surface (for a viscous flow).

For an inviscid fluid, the flow slips over the surface (there is no friction to promote its 'sticking' to the surface); hence, at the surface, the flow must be tangent to the surface.  $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$  at the surface (for a inviscid flow), where  $\vec{n}$  is a unit vector perpendicular (that means orthogonal) to the surface. The boundary conditions elsewhere in the flow depend on the type of problem being considered, and usually pertain to inflow and outflow boundaries at a finite distance from the surfaces, or an 'infinity' boundary condition infinitely far from surface.

The boundary conditions discussed above are physically boundary conditions in nature.

In CFD we have an additional concern, namely the proper numerical implementation of the boundary conditions.

$u = v = w = 0$  على السطح (للسريان اللزج)

للسائل الغير لزجي، السريان ينزلق على السطح

(لا يوجد احتكاك من أجل تعزيز "اللتصق" على

السطح)، وبالتالي على السطح، السريان يجب أن

يكون مماس الى السطح.  $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$  على السطح

(للسريان الالزجي) حيث  $\vec{n}$  هو وحدة متجه

عمودي (وهذا يعني متعامد) على السطح.

الحالات الجدارية في أماكن أخرى من السريان

يعتمد على نوع المشكلة التي يجري النظر فيها،

وتتعلق عادة بحدود السريان الداخل و الخارج على

مسافة محدودة من السطوح ، أو حالة الحدود

"اللانهاية" التي بشكل مطلق بعيدة من السطح.

الحالات الجدارية التي نوقشت أعلاه هي فعليا

الحالات الجدارية الفيزيائية في الطبيعة. في CFD

لدينا قلق إضافي، لمعرفة التنفيذ العددية السليم

للحالات الجدارية.

## 2.8 اشكال للمعادلات الاساسية تلائم مع د.م.ح.: ملاحظات على الشكل التحفظي (conservation form)

نستطيع ان نكتب مجموعة المعادلات الاساسية بالشكل التحفظي (conservation form) بالشكل العام التالي:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = J} \quad [\text{Wendt}], \text{ Eq. 2.65}$$

حيث

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho(e + V^2/2) \end{Bmatrix} \quad H = \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ \rho(e + V^2/2)w + pw - k \frac{\partial T}{\partial z} - u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} \end{Bmatrix}$$

$$F = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho vu - \tau_{xy} \\ \rho wu - \tau_{xz} \\ \rho(e + V^2/2)u + pu - k \frac{\partial T}{\partial x} - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad J = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho f_z \\ \rho(u f_x + v f_y + w f_z) + p q \end{Bmatrix}$$

$$G = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho wv - \tau_{yz} \\ \rho(e + V^2/2)v + pv - k \frac{\partial T}{\partial y} - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

In [Wendt], Eq. 2.65, the column  $J$  في المعادلة [Wendt], Eq. 2.65، الموجهات

اشكال للمعادلات الاساسية تلائم مع د.م.ح.: ملاحظات على الشكل التحفظي  
(conservation form)

vectors  $F$ ,  $G$ , and  $H$  are called the flux terms (or flux vectors), and  $J$  represents a 'source term' (which is zero if body forces are negligible). For an unsteady problem,  $U$  is called the solution vector because the elements in  $U$  ( $\rho$ ,  $\rho u$ ,  $\rho v$ , etc.) are the dependent variables which are usually solved numerically in steps of time. Please note that, in this formalism, it is the elements of  $U$  that are obtained computationally, i.e. numbers are obtained for the products  $\rho$ ,  $\rho u$ ,  $\rho v$ ,  $\rho w$  and  $\rho(e + V^2 / 2)$ . Of course, once numbers are known for these dependent variables (which includes  $\rho$  by itself), obtaining the primitive variables is simple:

العمودية  $F$  و  $G$  و  $H$  تسمى الموجهات السريانية، و  $J$  يمثل "مصطلح مصدر" (والذي هو صفر إذا كانت قوى الجسم تكاد لا تذكر). لمشكلة غير رتيبة، تسمى  $U$  متجه الحل لان العناصر في  $U(\rho, \rho u, \rho v, \dots)$  هي التي تعتمد على متغيرات يتم حلها عادة عددياً في خطوات الزمن. يرجى ملاحظة أنه في هذه الشكليات، فإن عناصر  $U$  هي التي يتم الحصول عليها حسابياً، مثلاً الأرقام التي يتم الحصول عليها للمنتجات  $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$  و  $\rho(e + V^2 / 2)$  بطبيعة الحال، عندما تعرف الأرقام لأول مرة لهذه المتغيرات التابعة (التي تضم  $\rho$  في حد ذاته)، الحصول على المتغيرات البدائية هي بسيطة :

$$\rho = \rho$$

$$u = \frac{\rho u}{\rho}$$

$$v = \frac{\rho v}{\rho}$$

$$w = \frac{\rho w}{\rho}$$

$$e = \frac{\rho(e + V^2 / 2)}{\rho} - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$$

For an *inviscid flow*, [Wendt et. al. 2009], Eq.(2.65) remains the same, except the elements of the column vectors are simplified. Examining the conservation form of the inviscid equations summerized in Sect. 2.7.2, we find that

لسريان لا لزجى المعادلة [Wendt et. al. 2009] Eq.(2.65) تبقى كما هي، الا ان الموجهات العامودية اصبحت ابسط.

اذا تأملنا الشكل التحفظي للمعادلات اللا

لزجية في باب 2.7.2 نجد ان

$$U = \left\{ \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho(e + V^2 / 2) \end{array} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{array}{l} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho w u \\ \rho u(e + V^2 / 2)u + p u \end{array} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{array}{l} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho wv \\ \rho v(e + V^2/2) + pv \end{array} \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{array}{l} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho w(e + V^2/2) + pw \end{array} \right\}$$

$$J = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho f_z \\ \rho(uf_x + vf_y + wf_z) + p \dot{q} \end{array} \right\}$$

For the numerical solution of an unsteady inviscid flow, once again the solution vector is  $U$ , and the dependent variables for which numbers are directly obtained are products  $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$  and  $\rho(e + V^2/2)$ . For a steady inviscid flow,  $\partial U / \partial t = 0$ .

Frequently, the numerical solution to such problems takes the form of 'marching' techniques; for example, if the solution is being obtained by marching in the x-direction, then [Wendt et.

للحل العددي للسريان اللازجي الغير رتيب، مرة أخرى متجه الحل هو  $U$ ، والمتغيرات التابعة لاية ارقام التي يتم الحصول عليها مباشرة من المنتجات  $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$  و  $\rho(e + V^2/2)$  للسريان اللازجي الرتيب  $\partial U / \partial t = 0$ .

في كثير من الأحيان، فإن الحل العددي لهذه المشاكل تأخذ شكل تقنيات "سيرية" ('marching')، على سبيل المثال، إذا كان يتم الحصول على حل عن طريق السير في اتجاه  $x$ ، ثم [Wendt et. al. 2009]

Eq.(2.65) يمكن كتابتها على النحو التالي

al. 2009], Eq.(2.65) can be written as

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = J - \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}} \quad [\text{Wendt}], \text{ Eq. 2.66}$$

Here, F becomes the 'solution vector', and the dependent variables for which numbers are obtained are  $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$  and  $\rho(e + V^2/2)$ . From these dependent variables, it is still possible to obtain the primitive variables, although the algebra is more complex than in the previously discussed case.

Notice that the governing equations when written in the form of [Wendt et. al. 2009], Eq.(2.65), have no flow variables outside the single  $x, y, z$ , and  $t$  derivatives. Indeed, the terms in [Wendt et. al. 2009], Eq. (2.65) have everything buried inside these derivatives. The flow equations in the form of [Wendt et. al. 2009], Eq.(2.65) are said to be in strong conservation form. In contrast, examine the forms [Wendt et. al. 2009], Eq.(2.42a,b and c) and [Wendt et. al. 2009],

هنا F تصبح "متجه المحلول" و المتغيرات التابعة لاية ارقام يمكن الحصول عليها تكون  $\rho, \rho u, \rho v, \rho w$  و  $\rho(e + V^2/2)$ . من هذه المتغيرات التابعة يمكن دائماً الحصول على المتغيرات الاولية (primitive variables) على الرغم من أن الجبر هو أكثر تعقيداً مما كانت عليه في الحالة التي نوقشت سابقاً. نلاحظ أن المعادلات الأساسية عند كتابتها في الشكل من [Wendt et. al. 2009] ، المعادلة (2.65) ، ليس لديهم متغيرات السريان خارج المفرد  $x$  ،  $y$  و  $z$  ، والمشتقات  $t$ . في الواقع ، الشروط في [Wendt et. al. 2009], Eq.(2.65) لديها كل شيء متخفي داخل هذه المشتقات. معادلات السريان في الشكل [Wendt et. Al 2009], Eq. (2.65) تكون معروفة باسم الشكل التحفظي القوي في المقابل ، دراسة أشكال [Wendt et. al. 2009] ،

Eq.(2.64). These equations have a number of  $x, y$  and  $z$  derivatives explicitly appearing on the right-hand side. These are the *weak conservation* form of the equations.

The form of the governing equations giving by Eq. (2.65) is popular in CFD; let us explain why. In flow fields involving shock waves, there are sharp, discontinuous changes in the primitive flow-field variables  $p, p, u, T$ , etc., across the shocks. Many computations of flows with shocks are designed to have the shock waves appear naturally within the computational space as a direct result of the overall flow field solution, i.e. as a direct result of the general algorithm, without any special treatment to take care of the shocks themselves. Such approaches are called shock capturing methods. This is in contrast to the alternate approach, where shock waves

Eq. (2.42a,b and c) [Wendt et. al. 2009], Eq.(2.64). هذه المعادلات لديها عدد من المشتقات  $x, y$  و  $z$  التي تظهر بوضوح على الجانب الأيمن. هذه هي الاشكال التحفظية الضعيفة في المعادلة.

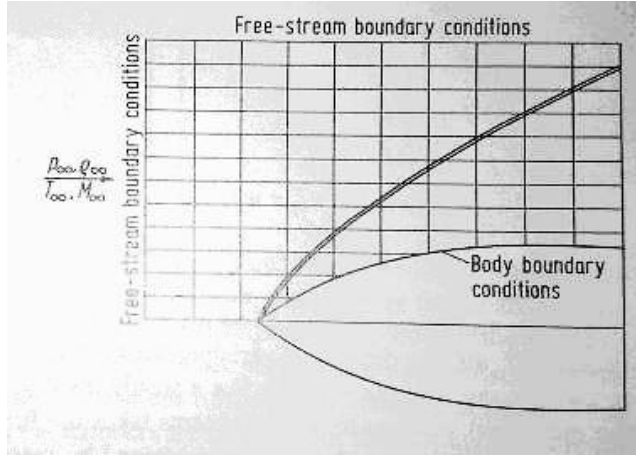
شكل المعادلات الاساسية معطى عبر المعادلة. (2.65) هي معروفة جداً في CFD؛ دعونا نوضح السبب. في مجالات السريان تشمل موجات الصدمة، هناك تكون حادة، التغيرات المتقطعة في متغيرات مجال السريان الاولي (-primitive flow-field variables):  $p, p, u, T, \dots$ ، عبر الصدمات. صممت العديد من حسابات السريان مع الصدمات هي مصممة لتظهر موجات الصدمة بشكل طبيعي في غضون الحسابية كنتيجة مباشرة من محلول حقل السريان العام، أي كنتيجة مباشرة للخوارزمية العامة، دون أي معالجة خاصة لاختذ الحذر من الصدمات نفسها. ويسمى هذا النهج أساليب التقاط الصدمة. هذا هو النقيض للنهج

are explicitly introduced into the flow-field solution, the exact Rankine-Hugoniot relations for changes across a shock are used to relate the flow immediately ahead of and behind the shock, and the governing flow equations are used to calculate the remainder of the flow field. This approach is called the shock-fitting method. These two different approaches are illustrated in Figs. 2.8 and 2.9. In Fig.2.8, the computational domain for calculating the supersonic flow over the body extends both upstream and downstream of the nose. The shock wave is allowed to form within the computational domain as a consequence of the general flow-field algorithm,

البديل ، حيث يتم إدخال بوضوح موجات الصدمة في محلول مجال السريان، يتم استخدام العلاقات الدقيقة Rankine-Hugoniot للتغيرات عبر الصدمة لربط السريان مباشرةً امام و وراء الصدمة ، و معادلات السريان الاساسية تُستخدم لحساب ما تبقى من مجال السريان. وهذا ما يسمى نهج أسلوب الصدمة المناسب ( shock-fitting method). ويتضح هذين النهجين المختلفين في الشكل 2.8 و 2.9. في الشكل 2.8، المجال الحسابي لحساب السريان الفوق الصوتي على أنحاء الجسم تمتد على حد سواء المنبع والمصب من الأنف. موجة الصدمة هي مخصصة للتشكل في المجال الحسابي نتيجة لخوارزمية حقل السريان العام،



[Wendt  
et.al.2009],  
Fig.2.8:  
Mesh for  
the shock-  
capturing  
approach



[Wendt  
et.al.2009]  
الشكل ،  
2.8 : شبكة  
لنهج التقاط  
الصدمة

without any special shock relations being introduced. In this manner, the shock wave is captured within the domain by means of the computational solution of the governing partial differential equations. Therefore, Fig. 2.8 is an example of the shock-capturing method. In contrast, Fig. 2.9 illustrates the same flow problem, except that now the computational domain is the flow between the shock and the body. The shock wave is introduced directly into the solution as an explicit discontinuity, and the standard oblique shock relations (the Rankine-Hugoniot relations) are used the free stream supersonic flow ahead of the

دون إدخال أية علاقات لصدمة خاصة. في هذه الطريقة ، يتم التقاط موجة الصدمة داخل المجال عن طريق الحل الحسابي للمعادلات التفاضلية الجزئية الاساسية. ولذلك ، الشكل. 2.8 مثال على أسلوب التقاط الصدمة. في المقابل ، الشكل. 2.9 يوضح مشكلة السريان نفسها ، إلا أن المجال الحسابي الآن هو السريان بين الصدمة والجسم. ادخال موجة الصدمة مباشرة في المحلول بمثابة انقطاع واضح ، وتستخدم معيار العلاقات المقياسية للصدمة المائلة (العلاقات Rankine-Hugoniot) سريان الانسياب الحر الفوق الصوتي قبل الصدمة

shock to the flow computed by the partial differential equations downstream of the shock. Therefore, Fig. 2.9 is an example of the shock-fitting method. There are advantages and disadvantages of both methods. For example, the shock-capturing method is ideal for complex flow problems involving shock waves for which we do not know either the location or number of shocks. Here, the shocks simply form within the computational domain as nature would have it. Moreover, this takes place without requiring any special treatment of the shock within the algorithm, and hence simplifies the computer programming. However, a disadvantage of this approach is that the shocks are generally smeared over a number of grid points in the computational mesh, and hence the numerically obtained shock thickness bears no relation what-so-ever to the actual physical shock thickness, and the precise location of the shock discontinuity is uncertain within a few mesh sizes. In contrast, the

حساب السريان بواسطة المعادلات التفاضلية الجزئية باتجاه الصدمة . ولذلك ، الشكل . 2.9 مثال على أسلوب الصدمة الملائمة. هناك مزايا وعيوب لكل من هذه الأساليب. على سبيل المثال ، الأسلوب التقاط الصدمة الأسلوب الافضل لمشاكل السريان المعقدة التي تنطوي على موجات الصدمة التي لا نعرف مكان أو عدد الصدمات. هنا ، تتشكل الصدمات ببساطة داخل المجال الحسابي كما يكون في الطبيعة. وعلاوة على ذلك ، وهذا يحدث من دون الحاجة إلى أي علاج خاص لحالة الصدمة داخل الخوارزمية ، و بالتالي يبسط برمجة الكمبيوتر. ومع ذلك ، فإن العائق في هذا النهج هو أن الصدمات عموما تلتخ على عدد من النقاط الشبكة في الشبكة الحاسوبية ، وبالتالي الحصول عدديا على سمك الصدمة لا علاقة له على الإطلاق بسمك الصدمة الفيزيائي الفعلي ، و الموقع الدقيق في تقطع الصدمة غير مؤكد ضمن بعض أحجام شبكة. في المقابل ، الفائدة من

advantage of the shock-fitting method is

أسلوب الصدمة المناسبة (shock-fitting) هو

[Wendt et.al.2009]

[Wendt et.al.2009]:

, Fig.2.9:

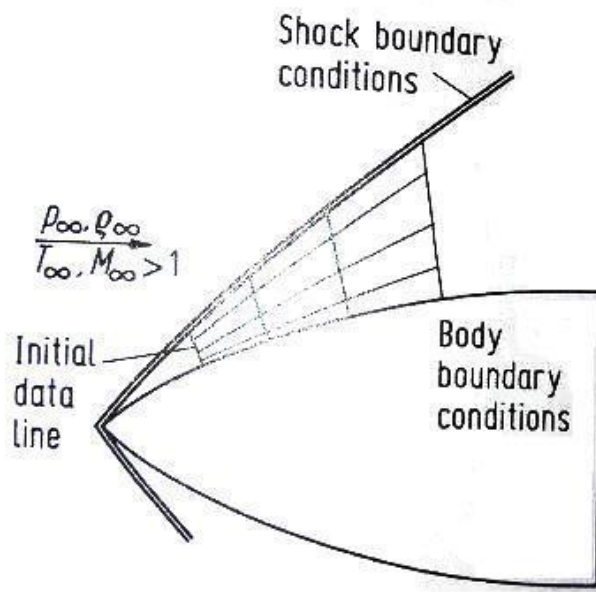
. الشكل 2.9 :

Mesh for the shock-fitting approach

شبكة لنهج

الصدمة

المناسبة



that the shock is always treated as a discontinuity, and its location is well-defined numerically. However, for a given problem you have to know in advance approximately where to put the shock waves, and how many there are. For complex flows, this can be a distinct disadvantage. Therefore, there are pros and cons associated with both shock-capturing and shock-fitting methods, and both have been employed extensively in CFD. In fact, a combination of

أن تعامل الصدمة دائماً على أنها متقطعة ، وموقعها واضح المعالم من الناحية العددية. ومع ذلك ، لمشكلة معينة يجب أن تعرف سابقاً و لو حتى تقريبياً اين توضع موجات الصدمة، و عددها. لتدفقات معقدة ، يمكن ان يكون هذا عائقاً واضح. لذلك ، هناك إيجابيات وسلبيات على حد سواء مرتبطة بكلا الاسلوبين: التقاط الصدمة (shock-capturing) و الصدمة المناسبة (shock-fitting) ، واستخدام الاسلوبين على

these two methods is used to predict the formation and approximate location of shocks, and then these shocks are fit with explicitly in those parts of a flow field where you know in advance they occur, and to employ a shock-capturing method for the remainder of the flow field in order to generate shocks that you cannot predict in advance.

Again, what does all of this discussion have to do with the conservation form of the governing equations as given by Eq. (2.65)? Simply this. For the shock-capturing method, experience has shown that the conservation form of the governing equations should be used. When the conservation form is used, the computed flow-field results are generally smooth and stable. However, when the non-conservation form is used for a shock-capturing solution, the computed flow-field results usually exhibit unsatisfactory spatial oscillations (wiggles) upstream and downstream of the shock wave, the shocks may

نطاق واسع في CFD. في الواقع ، يتم استخدام مزيج من هاتين الطريقتين للتنبؤ بتشكيل والموقع التقريبي للصدمة ، ومن ثم يتم احتواء هذه الصدمات بوضوح مع في أجزاء من حقل السريان حيث نعرف سابقاً أنها تحدث ، واستخدام طريقة التقاط الصدمة لما تبقى من حقل السريان من أجل توليد الصدمات التي لا يمكن التنبؤ بها مسبقاً.

مرة أخرى ، ماذا يعني كل هذا النقاش يجب أن نعمل مع الشكل التحفظي للمعادلات الأساسية تعطي حسب المعادلة (2.65)؟ هذا ببساطة. لأسلوب التقاط الصدمة ، وقد أثبتت التجربة أنه يجب استخدام النموذج التحفظي للمعادلات الأساسية. عندما يستخدم الشكل التحفظي عموماً تكون النتائج الحسابية على نحو سلس ومستقر. ومع ذلك ، عندما يتم استخدام شكل غير تحفظي لمحاول التقاط الصدمة ، النتائج الحسابية لحقل السريان تظهر عادة المكانية التذبذبات غير مرضية (ملتوية) بعكس او باتجاه

appear in the wrong location and the solution may even become unstable. In contrast, for the shock-fitting method, satisfactory results are usually obtained for either form of the equations-conservation or non-conservation.

موجة الصدمة ، قد تظهر الصدمات في الموقع الختأ والمحلول قد يصبح ايضاً غير مستقر. في المقابل ، لأسلوب الصدمة المناسبة ، وعادة ما يتم الحصول على نتائج مرضية لأي شكل من أشكال المعادلات التحفظية أو غير التحفظية.

Why is the use of the conservation form of the equations so important for the shock-capturing method? The answer can be see by considering the flow across a normal shock wave, as illustrated in Fig. 2.10. Consider the density distribution across the shock, as sketched in Fig. 2.10(a). Clearly, there is a discontinuous increase in  $p$  across the shock. If the non-conservation from of the governing equations were used to calculate this flow, where the primary dependent variables are the primitive variables such as  $p$  and  $p$ , then the equations would see a large discontinuity in the dependent variable  $p$ . This in turn would compound the numerical errors associated with the calculation of  $p$ . On the other hand, recall the continuity equation for a normal shock wave (see Refs.[1,3]):

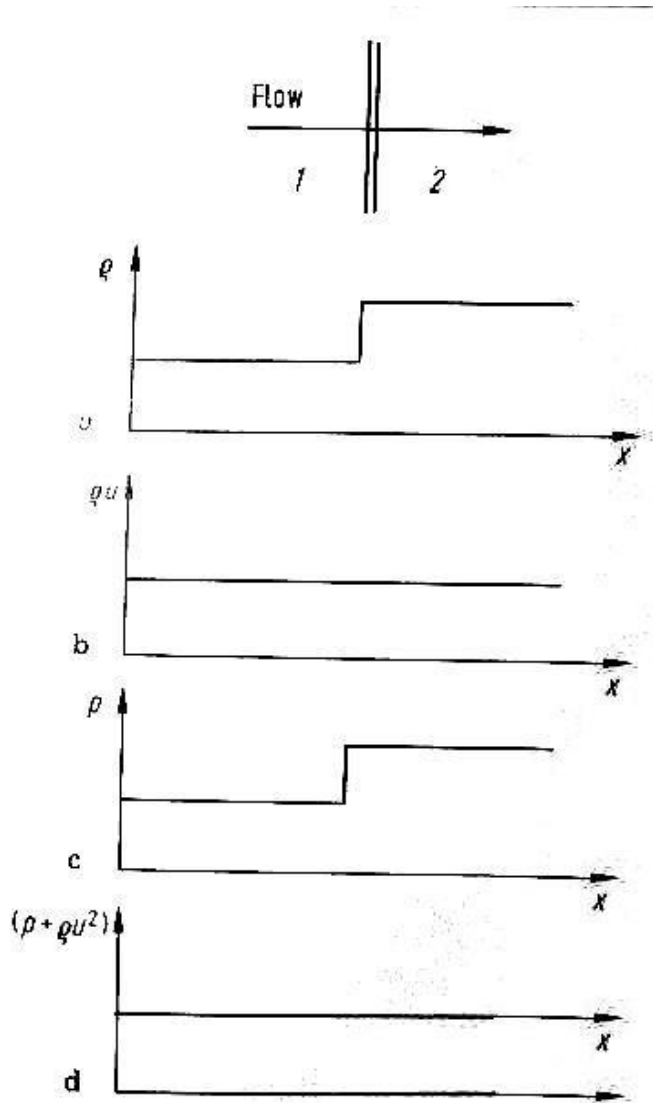
$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2.67)$$

From Eq. (2.67), the *mass flux*,  $\rho u$ , is constant across the shock wave, as illustrated in Fig. 2.10(b). The conservation form of the governing equations uses the product  $\rho u$  as a dependent variable, and hence the conservation form of the equations see no discontinuity in this dependent variable across the shock wave. In turn, the numerical accuracy and stability of the solution should be greatly enhanced. To reinforce this discussion, consider the momentum equation across a normal shock wave [1,3]:

$$(2.68) \rho_1 + \rho_1 u_1^2 = \rho_2 + \rho_2 u_2^2$$

As show in Fig. 2.10(c), the pressure itself is discontinuous across the shock ; however, from Eq. (2.68) the flux variable  $(\rho + \rho u^2)$  is constant across the shock.

[Wendt et. al. 2009], Fig.2.10: Variation of flow properties through a normal shock wave



This is illustrated in Fig. 2.10(d). Examining the inviscid flow equations in the conservation form given by Eq. (2.65), we clearly see that the quantity (

$\rho + \rho u^2$ ) is one of the dependent variables. Therefore, the conservation form of the equations would see no discontinuity in this dependent variables across the shock. Although this example of the flow across a normal shock wave is somewhat simplistic, it serves to explain why the use of the conservation form of the governing equations are so important for calculations using the shock-capturing method. Because the conservation form uses flux variables as the dependent variables, and because the changes in these flux variables are either zero or small across a shock wave, the numerical quality of a shock-capturing method will be enhanced by the use of the conservation form in contrast to the non-conservation form, which uses the primitive variables as dependent variables.

In summary, the previous discussion is one of the primary reasons why CFD makes a distinction between the two forms of the governing equations-conservation and non-conservation. And this is why we have gone to great lengths in this chapter to derive these different forms, and why we should be aware of the differences between the two forms.

## References | مراجع 2.9

Anderson, John D., Jr., *Fundamentals of Aerodynamics*, 2<sup>nd</sup> Edition McGraw-Hill, New York, 1991.

Liepmann, H.W. and Roshko, A., *Elements of Gasdynamics*, Wiley, New York, 1957.

Anderson, J.D., Jr., *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*, 2<sup>nd</sup> Edition McGraw-Hill, New York, 1990.

Bird, R.B., Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N. *Transport Phenomena*, 2<sup>nd</sup> edition, Wiley, 2004.

Kutler, P., 'Computation of Three-Dimensional, Inviscid Supersonic Flows,' in H.J. Wirz (ed.), *Progress in Numerical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, pp. 293-374.





### 3 سرايين لا انضغاطية ولا لزجية (Incompressible Inviscid Flows) : طرق حسابية معتمدة على مؤطرات النبع و الدوامة ( Source and Vortex Panel (Methods)

#### 3.1 مدخل

في هذا الفصل سننظر ان شاء الله الى التحليل العددي (numerical analysis) لسرايين (flows) لا انضغاطية (incompressible) و لا لزجية (inviscid). مبدئياً يمكن ان يستخدم طريقة الفرق المحدود (finite-difference method) - التي ستناقش في ما بعد ان شاء الله- لحل هذا النوع من السرايين. ولكن يوجد طرق اخرى تأدي عدة الى حلول اكثر مناسبة لسرايين لا انضغاطية (incompressible) و لا لزجية (inviscid).

هذا الفصل يناقش احد هذه الطرق - المسماة طرق حسابية معتمدة على مؤطرات النبع و الدوامة (Source and Vortex Panel Methods). هذه الطرق اصبحت هي الطرق المقياسية والمعتمد عليها عادة في الشركات التي تصنع الطائرات و هذا منذ العقد 1960 طرق المؤطرات هي طرق حسابية عديدة (numerical methods) تحتاج الى قوة حسابية ضخمة و لذلك كومبيوترات سريعة.

#### 3.2 بعض الواجهة الاساسية لسريان لا انضغاطي ولا لزجي

السريان الغير انضغاطي (incompressible flow) هو سريان بكثافة (density) ثابتة ( )  
 $\rho = const.$

تصور عضو مائع (fluid element) بكتلة ثابتة ( $m = const.$ ) يجري في سريان غير انضغاطي (incompressible flow) في موازاة خط انسياب (streamline). لأن الكثافة ثابتة فبالتالي الحجم (volume) لهذا العضو مائعي هو ايضا ثابت (  $V = const.$  ) و لأن

سرايين لا انضفاطية ولا لزجية : (Incompressible Inviscid Flows) طرق حسابية معتمدة  
على مؤطرات النبع و الدوامة (Source and Vortex Panel Methods)

$\nabla \vec{V}$  (هي السرعة) يشكل التغيير لحجمي لعضو مائعي على مدار الزمان نستطيع ان  
نكتب:

$$\nabla \vec{V} = 0 \quad (3.1)$$

gradient و هو ال grad و هو علامة ملخصة ل NABLA-Operator هنا ال  $\nabla$

و إلى هذا فاذا العضو مائعي (fluid element) ايضاً لا يدور لما يتحرك في موازاة الخط  
الانسياب (streamline) فبالتالي هذا السريان (flow) يسم لا دوراني (irrotational).  
لهذا النوع من السرايين، يمكن ان يعبر عن السرعة (velocity) كبوتينزيال (potential) –  
يُعلم ب  $\phi$ <sup>5</sup>.

$$\vec{V} = \nabla \phi \quad (3.2)$$

$$\text{grad} \phi = \nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(Anderson 1991 لمزيد من الشرح انظر ملحق أ و<sup>5</sup>)

إذا جمعنا الآن معادلة (3.1) و (3.2) نصل الى:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0$$

او،

(3.3)

$$\nabla^2 \phi = 0$$

(3.3) تسمى معادلة Laplace (Laplace's equation)، احد المعادلات المشهورة والمدرسة

جيداً في مجال الفيزيك الرياضية (mathematical physics).

من معادلة (3.3) نرى ان سرايين (flows) لا انضغاطية (incompressible) و لا لزجية

(inviscid) تُحكَّم بمعادلة Laplace (Laplace's equation).

و معادلة Laplace (Laplace's equation) هي خطية (linear).

و لذلك كل عدد من حلول خصوصية لمعادلة (3.3) يمكن ان تزداد (added) مع بعض

ليستنتج حل آخر.

و هذا يُري فلسفة اساسية لحل من سريان غير انضغاطي (incompressible flow) و هو

ان:

تركيب معقد لسريان غير انضغاطي و لا دوراني (incompressible, irrotational flow)

يمكن ان يجمع (synthesized) من سرايين اساسية (elementary flows)

سرايين لا انضفاطية ولا لزجية : (Incompressible Inviscid Flows) طرق حسابية معتمدة  
على مؤطرات النبع و الدوامة (Source and Vortex Panel Methods)

---

بالتالي سننظر إن شاء الله الى بعض السرايين اساسية (elementary flows) التي تلائم  
(satisfy) مع معادلة Laplace (Laplace's equation).

Uniform flow

السريان المتماثل

$$\phi = V_{\infty} x$$

Source flow

السريان المصدر

$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r$$

Vortex flow

السريان الدوامة

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

In [Wendt et. al. 2009 ] there are two methods described which use these elementary flows:

- Non-lifting Flows Over Arbitrary Two-Dimensional Bodies: The Source Panel Method
- Lifting Flows Over Arbitrary Two-Dimensional Bodies: The Vortex Panel Method

Also the application "The Aerodynamics of Drooped Leading-Edge Wings Below and Above Stall" is described.

## 4 الخصائص الرياضية (Mathematical Properties) لمعادلات ديناميك الموائع (Fluid Dynamic Equations)

كثير من المضمون مأخوذ من

Chapter 4 (Mathematical Properties of Fluid Dynamic [Wendt et. al. 2009],  
Equations)

### 4.1 مدخل

المعادلات الأساسية من ديناميك الموائع التي استخلصت في الباب الثاني من الكتاب هي إما في الشكل التفاضلي (differential form) أو الشكل التكامل (integral form).

أمثلة:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{dS} = 0$$

الشكل التكامل لمعادلة الاستمرارية:

الشكل تفاضلي الجزئي (Partial differential form) لمعادلات كمية التحرك  
:(Momentum equations)

$$\text{x-component: } \rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

$$\text{y-component: } \rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y$$

$$\text{z-component: } \rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z$$

المعادلات الأساسية في شكل من الأشكال التفاضلية الجزئية مثل المعادلات 2.36 a-c فوق هي الشكل الأكثر شيوعاً و استخداماً في ديناميك الموائع الحاسوبية (CFD). لذلك قبل ان ندرس الطرق العددية (numerical methods) من اجل حل هذه المعادلات فمن المفيد معالجة بعض الخصائص الرياضية للمعادلات التفاضلية الجزئية نفسها. و ينبغي لأي حل عددي صحيح للمعادلات ان يحمل خاصية طاعة الخصائص الرياضية العامة للمعادلات الأساسية.

ادرس المعادلات الأساسية لحركت الموائع مثلما استنتج من الفصل الثاني (Chap. 2). لاحظ انه في جميع الحالات المشتقات (derivates) الاعلى ترتيباً تحدث بطريقة خطية (linear). أي لا توجد منتجات (products) او أسية (exponentials) للمشتقات (derivates) الاعلى ترتيب - تظهر من تلقاء نفسها, مضروبة بالمعامل (coefficients) التي هي لنفسها دالات (functions) للمتغيرات التابعة (dependent variables)؛ يسمى مثل هذا النظام للمعادلات بالنظام الشبه خطي (quasilinear system). على سبيل المثال لسرايين اللزجية (inviscid flows) نجد عندما ندرس المعادلات الموجودة في القسم 2.7.2 ان المشتقات ذات الترتيب الاعلى (highest order derivates) هي ذات الدرجة الاولى (first order) وكلها تظهر خطياً (linearly).

ولسرايين اللزجية (viscid flows) نجد عندما ندرس المعادلات الموجودة في القسم 2.7.1 ان المشتقات ذات الترتيب الاعلى هي ذات الدرجة الثانية (second order) وكلها تظهر خطياً (linearly).

لهذا السبب في المقطع التالي سندرس بعض الخصائص لنظام (system) شبه خطي للمعادلات التفاضلية الجزئية (quasilinear partial differential equations). في هذه العملية سوف نقوم بوضع تصنيف لثلاثة انواع من المعادلات التفاضلية الجزئية- و كل من الثلاثة تلاقت في ميكانيكا الموائع (fluid dynamics).

## 4.2 بعض المعادلات التفاضلية الجزئية

التالي مؤخوذ من كتاب [1]:

1- معادلة التوصيل الحراري في البعد الواحد :

$$u_t = u_{xx}$$

2- معادلة التوصيل الحراري في البعدين :

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

3- معادلة لابلاس بالإحداثيات القطبية :

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

4- معادلة الموجة في الأبعاد الثلاثة :

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

5- معادلة الإرسال البرقي :

$$u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u$$

## 4.3 تصنيف (Classification) المعادلات التفاضلية الجزئية ( Partial Differential Eq.s)

الخصائص الرياضية (Mathematical Properties) لمعادلات ديناميك الموائع (Fluid Dynamic Equations)

للتبسيط لنعبر نظام (system) بسيط نسبياً لمعادلات الشبه خطية. فهي لن تكون معادلات السريان لكنها تشبهها في بعض النواحي. فان هذا القسم هو مثال مبسط. لنعبر نظام المعادلات الشبه خطي الواردة ادناه:

$$(4.1a) \quad a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} + d_1 \frac{\partial v}{\partial y} = f_1$$

$$(4.1b) \quad a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 \frac{\partial v}{\partial x} + d_2 \frac{\partial v}{\partial y} = f_2$$

حيث  $u$  و  $v$  هي المتغيرات التابعة، الدالات ل (functions of)  $x$  و  $y$ .

و المعامل (coefficients)  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, f_1, f_2$  تستطيع ان تكون دالات ل  $x, y, u$  و  $v$ .

لنعتبر اي نقطة في مستو  $xy$ . دعونا نبحث عن خطوط (او اتجاهات) من خلال هذه النقطة (ان وجدت) حيث المشتقات ل (derivates of)  $u$  و  $v$  تكون غير محددة (indeterminant) على طول هذه الخطوط (او اتجاهات). و غيرها ربما تكون متقطعة (discontinuous).

هذه الخطوط تسمى الخطوط الخصائية (characteristic lines).

*Quasilineare partielle Differentialgleichungen 2.Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen können in drei Typen unterteilt werden: hyperbolisch, parabolisch und elliptisch. Diese Einteilung basiert auf Eigenschaften von Charakteristiken-Linien, entlang welcher sich die Informationen über die Lösung ausbreiten. Jede derartige Gleichung hat zwei Sätze von Charakteristiken . Die verschiedenen Eigenschaften der Gleichungen können verschiedenen Strömungstypen zugeordnet werden. [3],*



للتحور على هذه **الخطوط الخصائية** نفترض ان  $u$  و  $v$  مستمرة (continuous)؛ و بالتالي:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy : u = u(x,y) \text{ لأن}$$

(4.2a)

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy : v = v(x,y) \text{ لأن}$$

(4.2b)

المعادلات (4.1) و (4.2) تشكل نظاماً من اربعة معادلات خطية (linear) مع اربعة مجهولات  $(\partial v / \partial y, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial v / \partial x)$ . يمكن كتابة هذه المعادلات بشكل مصفوفة (matrix form) على النحو التالي:

$$(4.3) \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \\ \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ du \\ dv \end{bmatrix}$$

دعونا نرمز ب  $[A]$  مصفوفة المعامل (coefficient matrix):

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix}$$

علاوة على ذلك ترك  $|A|$  تكون المحددة (determinant) ل  $[A]$ . من قاعدة كرامر

(Cramer's rule)، اذا كانت  $|A| \neq 0$ ، عندها نستطيع الحصول على حلول وحيدة (unique) لـ  $\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial v / \partial x$  و  $\partial v / \partial y$ .

و من ناحية اخرى، اذا كانت  $|A| = 0$ ، عندها تكون  $\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial v / \partial x$  و  $\partial v / \partial y$  في الحالة الافضل، غير محددة (indeterminant). نحن نبحت عن اتجاهات محددة (particular) في المستوي  $xy$  (plane) التي على طولها المشتقات لـ  $u$  و  $v$  هي غير محددة. لذلك دعونا نجعل  $|A| = 0$ ، و ننظروا ماذا سسيجري.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0$$

لذلك

$$(4) \quad (a_1c_2 - a_2c_1)(dy)^2 - (a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)(dx)(dy) + (b_1d_2 - b_2d_1)(dx)^2 = 0$$

اقسم المعادلة (4.4) على  $(dx)^2$ :

$$(4.5) \quad (a_1c_2 - a_2c_1) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - (a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1) \frac{dy}{dx} + (b_1d_2 - b_2d_1) = 0$$

المعادلة (4.5) هي معادلة من الدرجة الثانية (quadratic equation) في  $dy/dx$ .

لأية نقطة في المستوي  $xy$ ، حل المعادلة (4.5) ستعطي الانحدارات (slopes) على طول الخطوط تلك المشتقات (derivatives) لـ  $u$  و  $v$  هي غير محددة. هذه الخطوط في

الفضاء  $xy$  على طولها تسمى مميزات الخطوط (characteristic lines) لنظام المعادلات الذي قدمت ب (4.1a) و (4.1b)

في المعادلة (4.5) دع

$$\begin{aligned} a &= (a_1c_2 - a_2c_1) \\ b &= -(a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1) \\ c &= (b_1d_2 - b_2d_1) \end{aligned}$$

و من ثم يمكن كتابة المعادلة (4.5) كما يلي:

$$(4.6) \quad a \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + b \left( \frac{dy}{dx} \right) + c = 0$$

لهذا السبب من الصيغة التربيعية (quadratic formula):

$$(4.7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المعادلة (4.7) تعطي اتجاه الخطوط المميزة (characteristic lines) خلال النقطة معينة (given) في مستو  $xy$ . هذه الخطوط لها طبيعة مختلفة، تعتمد على قيمة المميز (discriminant) في المعادلة (4.7). ندل على المميز ب  $D$ .

$$(4.8) \quad D = b^2 - 4ac$$

قد تكون الخطوط المميزة (characteristic lines) حقيقية (real) و مختلفة، او حقيقية و متساوية، او تخيلية (imaginary)، اعتماداً على قيمة  $D$ . خصوصاً:

الخصائص الرياضية (Mathematical Properties) لمعادلات ديناميك الموائع (Fluid Dynamic Equations)

إذا كانت  $D > 0$ :

يوجد خطان حقيقيان و متخالفين خلال كل نقطة في المستوى  $xy$ . عندما يكون في هذه الحالة، فإن نظام المعادلات المقدم من (4.1 a, b) يسمى قطعي زائدي (*hyperbolic*)

إذا كانت  $D = 0$ :

يوجد خاصة (*characteristic*) حقيقية واحدة. عندما يكون في هذه الحالة، فإن نظام المعادلات المقدم من (4.1 a, b) يسمى قطعي مكافئي (*parabolic*)

إذا كانت  $D < 0$ :

الخطوط المميزة هي خيالية. يكون في هذه الحالة، فإن نظام المعادلات المقدم من (4.1 a, b) يسمى الاهليجية / بضاوي الشكل (*elliptic*).

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية الشبه خطية بأنها الاهليجية (*elliptic*)، قطعية مكافئة (*parabolic*) او قطعية زائدة (*hyperbolic*) هو تصنيف عام في هذا النوع من المعادلات. هذه الفئات الثلاثة من المعادلات لديها سلوك مختلف تماماً. أصل الكلمات: الاهليجي (*elliptic*)، قطعي مكافئ (*parabolic*) و قطعي زائد (*hyperbolic*) هو ببساطة تشابه مباشر مع الحالة للاقسام المخروطية (*conic sections*).

المخروط (*cone*):

شكل ثلاثي الأبعاد له قاعدة دائرية ورأس واحد. ويصل بالرأس سطح منحن.



المعادلات العامة للاقسام المخروطية من الهندسة التحليلية (analytic geometry) هي:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

حيث اذا

$b^2 - 4ac > 0$ ، القسم المخروطي هو قطع زائد (hyperbola)

$b^2 - 4ac = 0$ ، القسم المخروطي هو قطع مكافئ (parabola)

$b^2 - 4ac < 0$ ، القسم المخروطي هو قطع ناقص (ellipse)

التالي مؤخوذ من كتاب [1]:

$$u_t = u_{xx} \quad (1)$$

(1) هي معادلة تفاضلية جزئية تصف التوصيل الحراري (heat transfer) في البعد الواحد.

كل معادلة تفاضلية جزئية خطية مثل (1) تمثل أحد الأنماط الآتية :

أ- القطع المكافئ .

ب- القطع الزائد .

ج- القطع الناقص .

فمعادلات القطع المكافئ تصف سريان الحرارة وعمليات الانتشار وتحقق

الخاصية :

$$b^2 - 4ac = 0$$

ومعادلات القطع الزائد تصف حركات الاهتزاز وحركات الموجة وتحقق

الخاصية :

$$b^2 - 4ac > 0$$

ومعادلات القطع الناقص تصف ظواهر الحالة المستقرة وتحقق الخاصية :

$$b^2 - 4ac < 0$$

أمثلة

أ-  $u_t = u_{xx}$  معادلة قطع مكافئ لأن :  $B^2 - 4AC = 0$

ب-  $u_{tt} = u_{xx}$  معادلة قطع زائد لأن :  $B^2 - 4AC = 4$

ج-  $u_{\zeta\eta} = 0$  معادلة قطع زائد لأن :  $B^2 - 4AC = 1$

د-  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  معادلة قطع ناقص لأن  $B^2 - 4AC = -4$

هـ -  $y_{xx} + u_{yy} = 0$   $B^2 - 4AC = -4y$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{عندما } y > 0 \text{ يكون قطع ناقص} \\ \text{عندما } y = 0 \text{ يكون قطع مكافئ} \\ \text{عندما } y < 0 \text{ يكون قطع زائد} \end{array} \right.$

(في حالة المعاملات المتغيرة يتغير الوضع من نقطة إلى أخرى).

ملاحظات

- 1- بصورة عامة يكون  $B^2 - 4AC$  دالة بدلالة المتغيرات المستقلة وعليه تتغير المعادلة من نمط لآخر تبعاً لمجال المتغيرات (ولو أن ذلك غير مألوف).
- 2- إن المعادلة الخطية العامة (1) قد صيغت بدلالة المتغيرات المستقلة  $x, t$ . في معظم المسائل يمثل أحد المتغيرين الزمن وعندئذ يمكن كتابة المعادلة بدلالة  $x, t$ .
- 3- يمكن توضيح مخطط التصنيف العام كما في شكل (2-1).

خطية				غير خطية			الخطية
1	2	3	4	5	...	$m$	الرتبة
معاملات ثابتة				معاملات متغيرة			معاملات (المعادلات الخطية)
متجانسة				غير متجانسة			التجانس (المعادلات الخطية)
1	2	3	4	5	...	$n$	عدد المتغيرات
قطع زائد			قطع مكافئ		قطع ناقص		الأنماط الأساسية

نلاحظ بالنسبة للمعادلات التفاضلية الجزئية القطع الزائد (hyperbolic PDEs)، ان يكون هناك الميزتين (characteristics) حقيقية (real) و مختلفة (distinct)، تتيح تطوير طريقة الحل تصل الى حل جاهز لهذه المعادلات. اذا عدنا الى المعادلة (4.3) حاولنا حلها ل  $\partial u / \partial y$  باستخدام طريقة كرامر (Cramer's rule)، نصل الى:

$$\partial u / \partial y = \frac{|N|}{|A|} = \frac{O}{O}$$

حيث محددة العداد (numerator determinant) هي:

$$(4.9) \quad |N| = \begin{vmatrix} a_1 & f_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & f_2 & c_2 & d_2 \\ dx & du & 0 & 0 \\ 0 & dv & dx & dy \end{vmatrix}$$

السبب لماذا  $|N|$  يجب ان تكون صفر هو ان  $\partial u / \partial y$  غير محدد، بالشكل 0/0. بما ان  $|A|$  هي مسبقاً وصلت الى صفر، اذاً  $|N|$  يجب ان تكون صفر للسماح بان تكون  $\partial u / \partial y$  غير محددة.

ان توسيع (expansion) المعادلة (4.9) سنؤدي الى معادلات التي تنطوي على متغيرات مجال السريان (flow field variables) التي هي معادلات تفاضلية عادية (ordinary differential equations)، و في بعض الحالات هي معادلات جبرية (algebraic equations). هذه المعادلات التي تتم الحصول عليها من (4.9) تسمى بمعادلات التوافق (compatibility equations) و هي تستمر فقط على الخطوط المميزة (characteristic lines). هذا هو جوهر من حل المعادلة التفاضلية القطع الزائد الاصلية (original hyperbolic PDE):

فقط ضع معادلات ايسط - معادلات تفاضلية عادية (ordinary differential equations) (و هي معادلات التوافق (compatibility equations)) - على طول الخطوط المميزة في المستوي xy. هذه الطريقة تسمى طريقة الخصائص (method of characteristics). هذه الطريقة تطورت بدرجة عالية لحل السريان اللا لزجي الفوق صوتي (inviscid supersonic flows). لهذا النوع من السريان المعادلات الاساسية تكون من نوع المعادلات التفاضلية القطع الزائد. طريقة



السلوك العام للاصناف المختلفة من المعادلات التفاضلية الجزئية و علاقتها بديناميات الموائع

الخصائص هي اسلوب كلاسيكي من اجل حل السريان اللا لزجي الفوق صوتي.

#### 4.4 السلوك العام للاصناف المختلفة من المعادلات التفاضلية الجزئية و علاقتها بديناميات الموائع

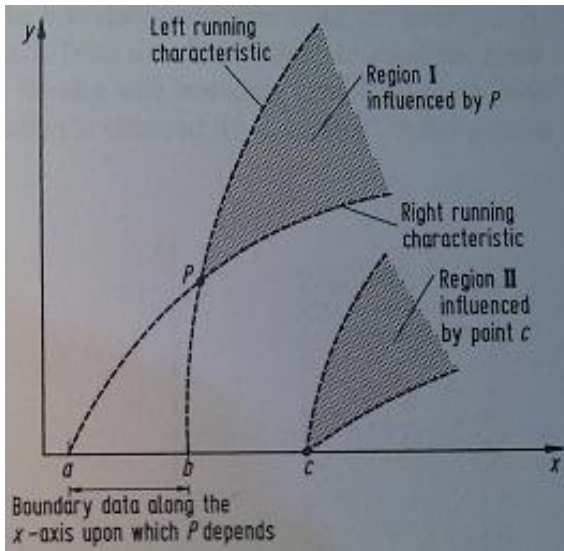
في هذا القسم، نناقش ببساطة ودون براهين رياضية، بعض من سلوك المعادلات تفاضلية القطع الزائد (*hyperbolic*)، القطع المكافئ (*parabolic*) والقطع الناقص (*elliptic*)، و سنعلق هذا السلوك بحل مشاكل من ميدان ديناميات الموائع.

##### 4.4.1 المعادلات القطع الزائد (Hyperbolic Equations)

للمعادلات القطع الزائد المعلومات في نقطة معينة  $P$  تؤثر فقط على تلك المناطق بين الخصائص التي تتقدمك (*advancing characteristics*). على سبيل المثال، دراسة الرسمة 4.1، التي رسمت لمشكلة ثنائية الابعاد (*two-dimensional*) مع اثنين من المتغيرات المستقلة الفضائية (*independent space variables*).

النقطة  $P$  تقع في مكان معين  $(x,y)$ . لتأمل الخصائص التي تجري الى اليمين و الى الشمال

(*right running and left running characteristic*) كما يبين الرسم 4.1



الشكل 4.1:

مجال (domain) و حدود لحل المعادلات القطع الزائد (hyperbolic equations). سريان ثابت (steady) ثنائي الابعاد (Two-dimensional).

الرسم مأخوذ من [2].

المعلومات عند النقطة  $P$  لا تؤثر (influences) الا على المنطقة المظللة - المنطقة المصنفة ب  $I$  بين الخصائص الاثنتين التي تتقدم (two advancing characteristics) خلال نقطة  $P$ . و هذا له تأثير مباشر على شروط الحدود (boundary conditions) للمعادلات القطع الزائد. لنفترض ان المحور  $x$  (x-axis) هو شرط حدودي (boundary condition) للمشكلة، يعني المتغيرات التابعة  $u$  و  $v$  معروفة على طول المحور  $x$ . هنالك الحل ممكن الحصول عليه عبر "السير الى الامام" ('marching forward') في المسافة  $y$ ، بدءاً من حدود معينة. و مع ذلك، فان الحل ل  $u$  و  $v$  في النقطة  $P$  تعتمد فقط على جزء من الحدود بين  $a$  و  $b$ ، كما نبين في الرسم 4.1.

المعلومة عند النقطة  $c$  التي هي خارج الفاصل (interval)  $ab$ ، هي تنتشر على طول الخصائص الى  $c$ ، و تُؤثّر فقط على المنطقة II. النقطة  $P$  هي خارج المنطقة II، و بالتالي لا

السلوك العام للاصناف المختلفة من المعادلات التفاضلية الجزئية و علاقتها بديناميات الموائع

تلمس معلومات من النقطة  $c$ . لهذا السبب النقطة  $P$  تعتمد فقط على الجزء من الحدود الذي يتم حصره بين الخصائص الاثنين التي تذهب من خلال النقطة  $P$  و تعترض الحدود لتحدد الفاصل  $ab$ .

في ديناميكية الموائع، الانواع التالية من السريان هي محددة من المعادلات التفاضلية الجزئية القطع الزائد (hyperbolic PDEs)، و بالتالي يعرض السلوك المذكور آنفاً:

**السريان الثابت اللالزجي الفوق الصوتي (Steady, inviscid supersonic flow).**

اذا كان السريان في ثنائي الابعاد (two-dimensional) فبالتالي السلوك هو مثل المعروض في الشكل 4.1.

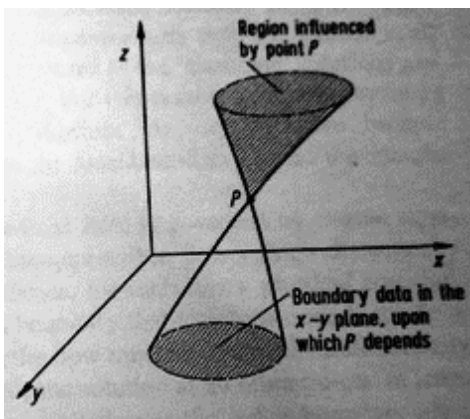
اذا كان السريان ثلاثي الابعاد، هناك مساحات مميزة في المستوى  $xyz$ ، كما رسمت في الشكل 4.2.

لنعتبر النقطة  $P$  في مكان محدد في المستوى  $(x,y,z)$ . المعلومات عند  $P$  تؤثر على الحجم المظلل في المساحة المميزة التي تتوسع. بالاضافة الى ذلك، اذا كان المستوى  $xy$  هو سطح جداري (boundary surface)، عندها فقط ذلك الجزء من الجدار المحصورة من قبل السطح المميز المتراجع، الذي يؤثر على  $P$ .

في الشكل 4.2، نُحل المتغيرات التابعة من خلال البدء بالمعطيات (data) في المستوى  $xy$ ، و بالتالي بـ "السير" في الاتجاه  $z$ .

الخصائص الرياضية (Mathematical Properties) لمعادلات ديناميك الموائع (Fluid Dynamic Equations)

لمشكلة سريان الفوق الصوتي لا لزج (inviscid supersonic flow problem) , الاتجاه العام للسريان يكون ايضاً الاتجاه  $z$ .



الشكل 4.2:

المجال و الحدود ( Domain and boundaries ) لحل المعادلات القطع الزائد.

سريان ثابت ثلاثي الابعاد

(Three-dimensional steady flow)

سريان متغير انضغاطي لا لزج (Unsteady inviscid compressible flow).

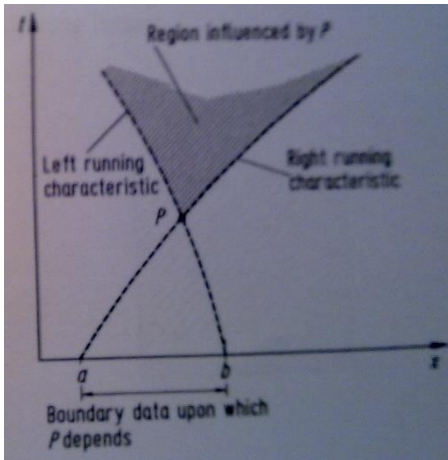
لتغيير سريان لا لزج من بعد واحد او ثنائي الابعاد, المعادلات الاساسية هي من نوع القطع الزائد, لا يهم ما اذا كان السريان هو محلياً (locally) تحت سرعة الصوت (subsonic) او فوق صوتي (supersonic). هنا الوقت هو اتجاه سير الحساب (marching direction).

( الميّن في الشكل  $x, t$  من المستوى  $P$  للسريان اللا لزج من بعد واحد , لننظر الى النقطة

4.3.

السلوك العام للاصناف المختلفة من المعادلات التفاضلية الجزئية و علاقتها بديناميات الموائع

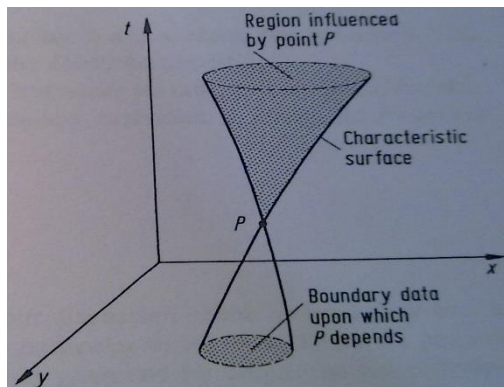
مرة اخرى، المنطقة المتأثرة بالنقطة P هي المنطقة المظللة الواقعة بين اثنين من الخصائص التي تتقدم من خلال P، و الفاصل ab هو الجزء الوحيد من الحدود على طول المحور x الذي يعتمد عليه الحل في النقطة P.



الشكل 4.3:

المجال (Domain) و الحدود من اجل حل المعادلات القطع الزائد. سريان متغير من بعد واحد (One-dimensional unsteady flow).

للسريان اللا لزجي الثنائي الابعاد (two-dimensional)، لنعتبر النقطة P في المستوى  $(x,y,t)$  كما هو مبين في المشكل 4.4. بدءاً بالبيانات الاولية المعروفة في المستوى  $x,y$ ، الحل "يسير" ('marches') الى الامام في الوقت (time).



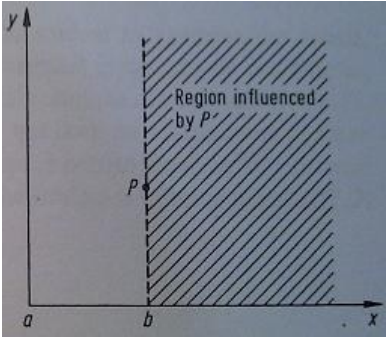
الشكل 4.4:

المجال و الحدود لحل المعادلات القطع الزائد. سريان غير ثابت ثنائي الابعاد (Two-dimensional unsteady flow)

#### 4.4.2 معادلات القطع مكافئة / Parabolic Equations

للمعادلات القطع المكافئة، المعلومات عند النقطة  $P$  في المستوى  $xy$  تؤثر على كل المنطقة من المستوى الى جهة واحدة من  $P$ . هذا هو مرسوم في الشكل 4.5، حيث تم رسم خط مميز واحد من خلال النقطة  $P$ .

لنفترض ان المحور  $x$  و المحور  $y$  تشكل حدود. الحل عند  $P$  يتأثر بشروط الحدود على المحور  $y$  بكامله، فضلاً عن الجزء في المحور  $x$  من  $a$  الى  $b$ . حلول المعادلات القطع المكافئ هي ايضاً حلول "مسيرة" ('marching')؛ بدءاً بالشروط الحدودية (boundary conditions) على طول كل من المحاور  $x$  و  $y$ ، يتم الحصول على حل لمجال السريان عبر "مسيرة" في الاتجاه العام  $x$ .



الشكل:4.5

المجال و الحدود من حل المعادلات القطع المكافئ (in two dimensions) في بعدين (parabolic equations). (

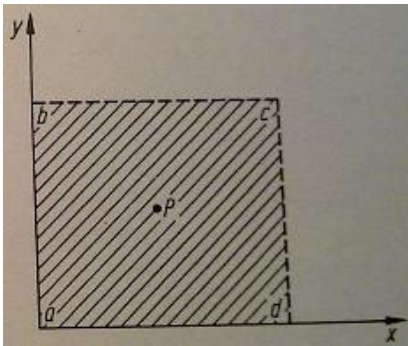
في ديناميكا الموائع، هناك اشكال مخفضة (reduced forms) من معادلات ناوير- ستوكس (Navier-Stokes) التي تمثل سلوك من نوع القطع المكافئ. اذا تم تجاهل شروط الاجهاد اللزجي (viscous stress) التي تنطوي على المشتقات بالنسبة الى  $x$  في هذه المعادلات، نحن نحصل على المعادلات ناوير- ستوكس (Navier-Stokes) القطعي المكافئ

السلوك العام للاصناف المختلفة من المعادلات التفاضلية الجزئية و علاقتها بديناميات الموائع

(‘parabolized’ Navier-Stokes equations)، التي تمنح حل بسير الى الوراء في اتجاه  $x$ ، بدءاً من بعض المعطيات المنصوص عليها على طول المحاور  $x$  و  $y$ . المزيد من الخفض لمعادلات ناوير - ستوكس (Navier-Stokes) لأعداد رينولز (Reynolds numbers) العالية تؤدي الى معادلات الطبقة الجدارية (boundary layer equations) التي هي معروفة جيداً. هذه الطبقة الجدارية (boundary layer equations) تُظهر السلوك القطع المكافئ في الشكل 4.5.

### 4.4.3 المعادلات القطع الناقص (elliptic equations)

تؤثر على كل المناطق  $xy$  في المستوى  $P$  للمعادلات القطع الناقص، المعلومات عند النقطة ، الذي يري مجال مستطيل (4.6). رسمت هذه الصورة في الشكل domain الاخرى للمجال ( ) rectangular. الشكل ( )



الشكل: 4.6

المجال و الحدود لحل معادلات القطع الناقص بعدين (two dimensions.)

هنا المجال هو مغلق تماماً، تحيط بها الحدود المغلقة  $abcd$ . للمعادلات القطع الناقص، لان النقطة  $P$  تؤثر على كل النقاط في المجال، و ايضاً الحل عند النقطة  $P$  يتأثر بكامل الحدود

الخصائص الرياضية (Mathematical Properties) لمعادلات ديناميك الموائع (Fluid Dynamic Equations)

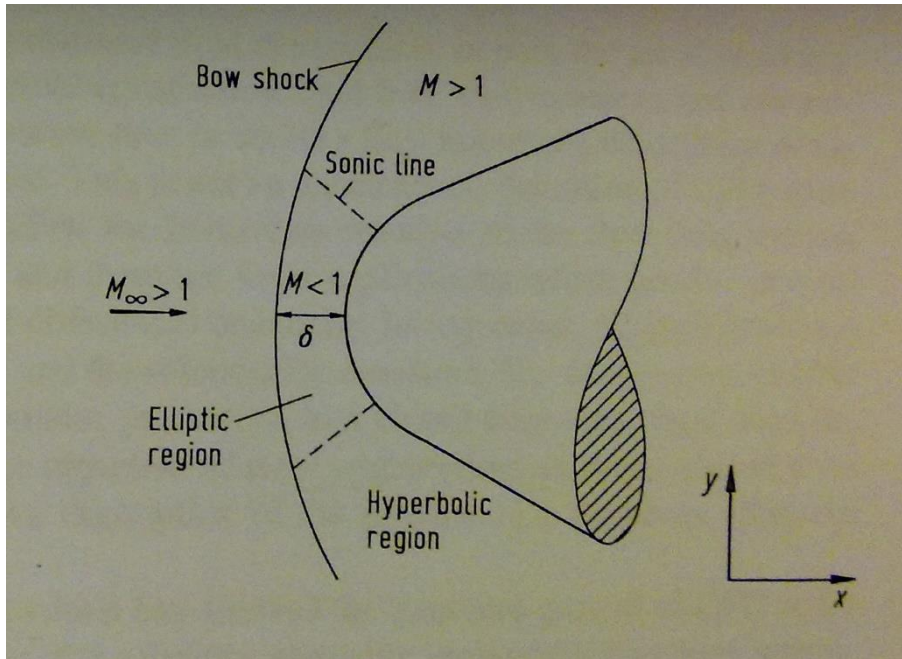
(boundary) المغلق  $abcd$ . لذا، يجب إتمام الحل عند النقطة  $P$  في آن واحد مع إتمام الحل في جميع نقاط المجال. هذا يكون في تباين شديد مع "سير" ('marching') الحلول المناسبة للمعادلات القطع الزائد و القطع المكافئ.

في ديناميكا الموائع السريان الثابت (steady)، الذي هو ما دون سرعة الصوت (subsonic)، الا لزجي (inviscid) هو يوافق لمعادلات القطع الناقص. هذا أيضاً يتضمن السريان اللا انضغاطي (incompressible) (الذي يتضمن نظرياً عدد ماخ  $Mach$  number يساوي صفر). اذاً، لهذه الانواع من السرايين، يجب تطبيق الشروط الجدارية (boundary conditions) الفيزيائية تحيط كاملاً بالسريان، و حل ميدان السريان (flow-field) في كل النقاط في السريان يجب ان تُحصل عليه في نفس الوقت (simultaneously)، لأن الحل عند نقطة معينة يؤثر على حل كل النقاط الاخرى. من حيث الشكل 4.6، يجب ان تطبق الشروط الجدارية على الجدار  $abcd$  بأكمله. هذه الشروط الجدارية (boundary conditions) يمكنها ان تأخذ الاشكال التالية: تحديد المتغيرات التابعة ( $dependent variables$ )  $u$  و  $v$  على طول الجدار. هذا النوع من الشروط الجدارية تسمى شرط ديريشلت ( $Dirichlet condition$ ).

و تحديد (specification) المشتقات ( $derivatives$ ) للمتغيرات التابعة  $u$  و  $v$  مثل  $\partial u / \partial y$  على طول الجدار. هذا النوع من الشروط الجدارية يسمى شرط نيومان ( $Neumann condition$ ).



#### 4.4.4 بعض الملاحظات



في هذه المرحلة سيكون مهم للطالب، حل الشكل المغلق لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية (PDE) الخطية من الانواع القطع الزائد (*hyperbolic*)، والقطع المكافئ (*parabolic*) والقطع الناقص (*elliptic*).

لهذا انظر كتب لمادة الرياضيات.

#### 4.4.5 طرح المشاكل بشكل جيد / Well-Posed Problems

في الحل للمعادلات التفاضلية الجزئية هو من السهل في بعض الاحيان التوصل الى حل باستعمال شروط اولية (*initial conditions*) و جدارية (*boundary*) غير صحيحة او

غير كافية. مثلاً "سوء طرح" المشكلة تؤدي عادة الى نتائج زائفة (مزورة). لذلك نحن نعرف مشكلة مطروحة بشكل جيد كما يلي: اذا كان الحل لمعادلة تفاضلية جزئية موجودة و فريدة (unique)، و اذا كان الحل يعتمد باستمرار على الشروط الجدارية الاولية، بالتالي المشكلة تكون مطروحة بشكل جيد.

#### 4.4.6 المراجع

- رس فارلو، المعادلات التفاضلية الجزئية (ترجمة: د. هها عواد الكبيسي)، منشورات [1] جامعة عمر المختار، البيضاء، 2005
- [2] [Wendt et. al. 2009], Chapter 4 (Mathematical Properties of Fluid Dynamic Equations)
- [3] Ferziger, Peric, "Numerische Strömungsmechanik", Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008

## 5 تفرير لمعادلات التفاضلية الجزئية (Discretization of PDEs)

معظم المضمون مأخوذ من

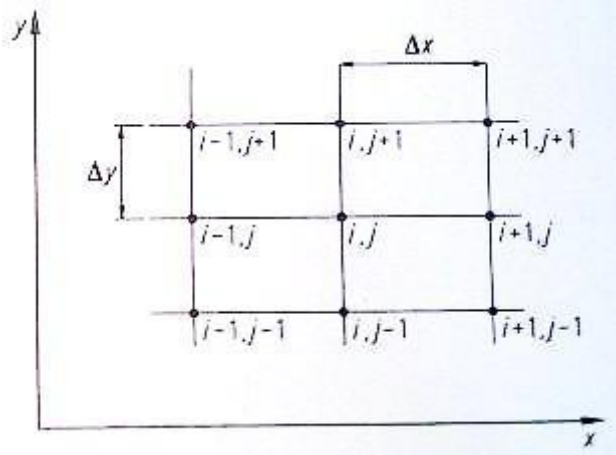
Chapter 5 (Discretization of Partial Differential [Wendt et. al. 2009],  
Equations)

### 5.1 مدخل

حلول تحليلية (Analytical solutions) لمعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs) تعطي تعبيرات مقفولة الشكل التي تعطي التغييرات للمتغيرات التابعة (dependent variables) على المجال (domain) بشكل مستمر (continuously). مقارنة مع ذلك، الحلول العددية (numerical solutions) تستطيع أن تُجيب على نقاط منفصلة (discrete points) في المجال فقط، و تسمى نقاط الشبكة (grid points).

الشكل 5.1: نقاط الشبكة

المنفصلة



على سبيل المثال، انظر في الشكل 5.1، مما يري جزء من شبكة منفصلة في المستوي  $xy$ . لنفترض أن تباعد نقاط الشبكة في اتجاه  $x$  هو موحد (uniform)، والتي تقدمها  $\Delta x$ ، وهذا التباعد في اتجاه  $y$  هو أيضا موحد (uniform)، والتي تقدمها  $\Delta y$ ، كما هو مبين في

الشكل 5.1 . بشكل عام،  $\Delta x$  و  $\Delta y$  يكونان مختلفين. ومع ذلك، فإن الغالبية العظمى من التطبيقات CFD تنطوي على حلول عددية على الشبكة بتباعد موحد (uniform spacing) في كل اتجاه، لأن هذا يبسط إلى حد كبير برمجة الحل، ويوفر مساحة التخزين الحاسوبي ويعطي نتائج عادة دقيقة أكثر.

هذا التباعد الموحد لا يجب أن يحدث في الفضاء  $xy$  الفيزيائي (physical  $xy$  space) ؛ كما هو الحال في كثير من الأحيان في CFD ، وتجري الحسابات العددية (numerical calculations) في الفضاء الحسابي (computational space) المتحوّل التي لديها تباعد موحد (uniform spacing) في المتغيرات المستقلة المتحوّلة (transformed independent variables) ، ولكن الذي يتوافق مع التباعد غير الموحد (non-uniform spacing) في المستوى الفيزيائي (physical plane). في أي حال، في هذا الفصل إننا نفترض التباعد الموحد في كل اتجاه النظام الإحداثي (coordinate system)، ولكن ليس بالضرورة متساوية التباعد (equal spacing) لكلا الاتجاهين، أي سنأخذ  $\Delta x$  و  $\Delta y$  من الثوابت (constants)، ولكن هذا ليس من الضروري أن تكونا  $\Delta x$  و  $\Delta y$  على قدم المساواة. عودة إلى الشكل 5.1، يتم تحديد نقاط الشبكة وفقا لمؤشر (index)  $i$  الذي يمتد في اتجاه  $x$ ، ومؤشر (index)  $j$  الذي يمتد في اتجاه  $y$ . وبالتالي، إذا كان  $(i,j)$  هو مؤشر (index) لنقطة  $P$  في الشكل 5.1، ثم النقطة على يمين  $P$  تعرّف بأنها  $(i+1, j)$ ، وهذه النقطة الأعلى منها مباشرة هي  $(i, j+1)$  الخ.

تستخدم طريقة الفروق المحدودة (*finite differences*) على نطاق واسع في CFD ، وبالتالي سيتم تخصيص معظم هذا الفصل على المسائل المتعلقة بالفروق المحدودة ( *finite differences* ).

فلسفة الفروق المحدودة (*finite differences*) هو استبدال المشتقات الجزئية ( *partial derivatives* ) التي تظهر في المعادلات الأساسية لميكانيكا الموائع ( *governing equations of fluid dynamics* ). مع فرق للمقسومات الجبرية ( *algebraic difference quotients* )، ينتج نظام من المعادلات الجبرية ( *system of algebraic equations* ) التي يمكن حلها لمتغيرات حقل السريان ( *flow-field* ) في النقاط المعينة من الشبكة المنفصلة في السريان ( كما هو موضح في الشكل 5.1 ). دعونا ننتقل الآن للحصول على بعض من فرق لمقسومات الجبرية ( *algebraic difference quotients* ) الأكثر شيوعا التي تستخدم لتفريز ( *discretize* ) المعادلات التفاضلية الجزئية ( *PDE* ).

## 5.2 اشتقاق مقسومات لفرق محدودة ابتدائية (Elementary Finite Difference Quotients)

يقوم تمثيل الفرق المحدودة ( *Finite difference* ) للمشتقات ( *derivatives* ) على أساس توسعات سلسلة تايلر ( *Taylor's series expansions* ). على سبيل المثال، إذا يدل  $u_{i,j}$  على مكون ( *component* )  $x$  للسرعة ( *velocity* ) في نقطة (  $i, j$  )، إذا السرعة ( *velocity* )  $u_{i+1,j}$  في النقطة (  $i + 1, j$  ) يمكن أن تعبر عنها الأطراف الرياضية من توسعات سلسلة تايلر ( *Taylor's series expansions* ) حول النقطة (  $i, j$  )، على النحو التالي:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (5.1)$$

المعادلة (5.1) هي رياضياً تعبير دقيق عن  $u_{i+1,j}$  إذا :

أ) عدد من الأطراف الرياضية (terms) هي لانهائية (infinite)، و السلسلة تتلاقى (converges)،

ب) و / أو  $\Delta x \rightarrow 0$ .

لحساباتٍ العددية (numerical computations)، فإنه من غير العملي إدخال عدد لا حصر له من الأطراف (terms) في المعادلة (5.1). لذلك، المعادلة (5.1) تكون مَقْطُوعَةً (truncated). على سبيل المثال، إذا يتم تجاهل الاطراف الرياضية قيمة الأسية (order of magnitude)  $(\Delta x)^3$  و الترتيب الأعلى (higher order)، المعادلة (5.1) تختصر إلى:

$$u_{i+1,j} \approx u_{i,j} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} \dots \dots \dots (5.2)$$

نقول إن المعادلة (5.2) هي في المرتبة الثانية من الدقة (second-order accuracy)، وذلك لأن المصطلح الرياضي للترتيب (terms of order)  $(\Delta x)^3$  و الأعلى قد أهملنا. إذا قمنا بإهمال الطرف الرياضي للترتيب (terms of order)  $(\Delta x)^2$  و الأعلى ، نحصل من المعادلة (5.1)،

$$u_{i+1,j} \approx u_{i,j} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x \quad (5.3)$$

حيث المعادلة (5.3) هو من الدرجة الأولى من الدقة. في المعادلات (5.2) و (5.3)، إهمال الأطراف الرياضية ذات الترتيب الأعلى تمثل خطأ الاقتران (truncation error) في تمثيل السلسلة المحدودة (finite series). على سبيل المثال، خطأ الاقتران (truncation error) للمعادلة (5.2) هو:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

ويمكن تقليل خطأ الاقتران (truncation error) عبر:

أ) نقل المزيد من الأطراف الرياضية (terms) في سلسلة تايلر (Taylor's series)، أي المعادلة (5.1). هذا يؤدي إلى ارتفاع مستوى الدقة (accuracy) في تمثيل  $u_{i+1,j}$

ب) تخفيض حجم  $\Delta x$ .

دعونا نعود إلى المعادلة (5.1)، ونحلها لـ  $(\partial u / \partial x)_{i,j}$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} - \underbrace{\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{\Delta x}{2} - \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{\Delta x^2}{6} - \dots}_{\text{Truncation error}}$$

أو

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (5.4)$$

في المعادلة (5.4)، رمز  $O(\Delta x)$  هو التدوين الرياضي الشكلي (formal mathematical notation) الذي يمثل حدود رياضية (terms) ذات الترتيب (of-order-of) بالنسبة ل  $\Delta x$ . المعادلة (5.4) هي عبارة فروقية بالاتجاه الامامي للمشتق  $(\partial u/\partial x)$  في النقطة الشبكية  $(i, j)$  ذات درجة اولى.<sup>6</sup>

المعادلة (5.4) هو تدوين أكثر دقة من المعادلة (5.3)، الذي ينطوي على تدوين "المساواة تقريبا (approximately equal)"؛ في المعادلة (5.4) ترتيب حجم خطأ الاقتطاع (truncation error) عُرضت بشكل صريح من قبل تدوين  $O$ .

دعونا الآن نكتب توسيع سلسلة تايلر (Taylor's series expansion) ل  $u_{i-1,j}$  ،  
وُسِّعَت على  $u_{i,j}$ .

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} (-\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(-\Delta x)^3}{6} + \dots$$

<sup>6</sup> Engl.: first order *forward* difference expression for the derivative  $(\partial u/\partial x)$  at grid point  $(i, j)$ .



or,

$$\begin{aligned}
 u_{i-1,j} = u_{i,j} &- \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} \\
 &- \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

التحليل لـ  $(\partial u / \partial x)_{i,j}$  ، يوصلنا الى

$$\boxed{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)} \tag{5.6}$$

المعادلة (5.6) عبارة فروقية بالاتجاه الامامي للمشتق  $(\partial u/\partial x)$  في النقطة الشبكية  $(i, j)$  ذات درجة اولى.<sup>7</sup>

دعونا الآن نطرح (subtract) المعادلة (5.5) من (5.1) .

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{3} + \dots \quad (5.7)$$

نحل المعادلة (5.7) ل  $(\partial u/\partial x)_{i,j}$ ، و نحصل على

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (5.8)$$

المعادلة (5.8) عبارة فروقية مركزية للمشتق  $(\partial u/\partial x)$  في النقطة الشبكية  $(i, j)$  ذات درجة

ثانية.<sup>8</sup>

<sup>7</sup> Engl.: first order *rearward* difference expression for the derivative  $(\partial u/\partial x)$  at grid point  $(i, j)$ .

<sup>8</sup> Engl.: *second order central difference* for the derivative  $(\partial u/\partial x)$  at grid point  $(i, j)$ .

للحصول على العبارة الجبرية للاختلاف المحدود للمشتق الجزئي الثاني  $(\partial^2 u / \partial x^2)_{i,j}$  تذكر أولاً أن ترتيب مصطلح الحجم (order-of magnitude) في المعادلة (5.8) يأتي من

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{6} + \dots \quad (5.9)$$

بإستبدال المعادلة (5.9) في (5.1)، نحصل على

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} = u_{i,j} &+ \left[ \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{6} + \dots \right] \Delta x \\ &+ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} \\ &+ \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^4}{24} + \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

حل المعادلة (5.10) بالنسبة ل  $(\partial^2 u / \partial x^2)_{i,j}$  ، نحصل على

$$\boxed{\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2} \quad (5.11)$$

المعادلة (5.11) هي عبارة للفرق الثاني المركزي من درجة ثانية ( *second-order central second difference* ) للمشتق (derivative)  $(\partial^2 u / \partial x^2)$  في نقطة الشبكة  $(i, j)$ . تعابير الفروق (Difference expressions) للمشتقات من  $y$  تُحصل عليها بنفس الطريقة تماماً و النتائج ماثلة تماماً للمعادلات السابقة للمشتقات  $x$  وهم:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad \text{Forward difference}$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad \text{Rearward difference}$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2$$

ومن المثير للاهتمام ان نلاحظ ان الفرق المركزي الثاني (central second difference) المعطى على سبيل المثال عن طريق المعادلة (5.11) يمكن تفسيره كفرق أمامي ( forward difference) للمشتقات الأولى (first derivatives) ، مع وجود الفرق للوراء ( rearward differences) المستخدمة في المشتقات الأولى (first derivatives). إذا اسقاطنا للتسهيل الرمز  $O$  ، لدينا:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &\approx \left[\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}\right) - \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}\right)\right] \frac{1}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} &\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

معادلة (5.12) هي نفس حاصل الفرق (difference quotient) مثل المعادلة (5.11). ويمكن استخدام نفس الفلسفة للتوليد بسرعة حاصل الفرق المحدود ( finite difference)

quotient) للمشتقات المختلطة (mixed derivative)  $(\partial^2 u / \partial x \partial y)$  في نقطة  $(i, j)$  على الشبكة. على سبيل المثال،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (5.13)$$

في المعادلة (5.13)، اكتب المشتق لـ  $x$  كفرق مركزي للمشتقات لـ  $y$ ، ومن ثم ضع المشتقات لـ  $y$  أيضا في شكل الفرق المركزية (Central differences).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i+1,j} - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &\approx \left[ \left( \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} \right) - \left( \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right) \right] \frac{1}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &\approx \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}) \end{aligned}$$

or

$$\boxed{\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}) + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2]} \quad (5.14)$$

ويمكن الحصول على العديد من الفروق التقريبية الأخرى للمشتقات (derivatives) أعلاه، فضلا عن المشتقات ذات الترتيب الأعلى (higher-order derivatives) من ذلك. الفلسفة هي نفسها.

لجدول مفصل للعديد من أشكال حواصل الفرق (difference quotients)، انظر مثلاً

الصفحات 44 و 45 من

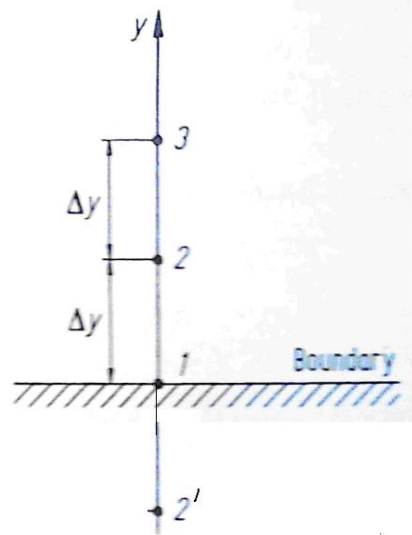
Anderson, D.A., Tannehill, John C. and Pletcher, Richard H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1984.

ماذا يحدث على الحدود (boundary)؟

ماذا يحدث على الحدود (boundary)؟ اي نوع من الفرق (differencing) يكون

بالإمكان اذا كان ليس لدينا الا اتجاه واحد لنمشي فيه اي الاتجاه الذي يتباعد عن الحدود

(boundary)؟



الشكل 5:2: نقاط للشبكة عند جدار

على سبيل المثال، اعتبر الشكل 5.2، والذي يُوضح جزء من الحدود. مع النقطة 1 من الشبكة (grid) تكون على الحدود. و النقاط 2 و 3 في مسافة  $\Delta y$  و  $2\Delta y$  فوق الحدود. الآن نريد ان نضع تقريب ل  $\partial u / \partial y$  بالفرق المحددة على الحدود.

فمن السهل وضع الفرق الأمامي (forward difference) كما

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_1 = \frac{u_2 - u_1}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (5.15)$$

التي هي من الدرجة الأولى للدقة (first-order accuracy). لكن، كيف يمكننا الحصول

على النتيجة التي هي من الدرجة الثانية للدقة (second-order accuracy)؟

لا نستطيع ان نضع فرق مركزي (central difference) كما هو في المعادلة (5.8) لأنه يتطلب نقطة اخرى وراء الجدار كما هو موضح في النقطة 2' في الشكل 5.2. النقطة 2' هي خارج نطاق الحساب (computation)، وليس لدينا عموماً أي معلومات عن  $u$  في هذه النقطة.

في الأيام الأولى من CFD، هناك العديد من الحلول قد طرحت. مثلاً افترض أن  $u_2 = u_2$ . ويسمى هذا الشرط جدار الإنعكاسي (reflection boundary). في معظم الحالات، لا معنى مادي (physical sense) لهذا، وبمجرد غير دقيق، إن لم يكن أكثر من ذلك. لذلك نحن نطرح هذا السؤال مرة أخرى، كيف يمكننا العثور على فرق محدود (finite difference) من الدرجة الثانية في الدقة (second-order accurate) على الحدود

(boundary)؟ الجواب بسيط، وأنه يوضح طريقة أخرى لاحتساب حواصل الفرق المحدود.

نفترض ان الحدود (boundary)  $u$  يمكن ان يعبر عنه متعدد الحدود (polynomial)

$$u = a + by + cy^2 \quad (5.16)$$

إذا طبقنا هذه المعادلة على نقاط الشبكة في الشكل 5.2، نصل الى

$$u_1 = a$$

$$u_2 = a + b\Delta y$$

$$+ c(\Delta y)^2$$

$$u_3 = a + b(2$$

$$\Delta y) + c(2\Delta$$

$$y)^2$$

و حل (solving) هذا النظام (system) بالنسبة ل  $b$  :

$$b = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y} \quad (5.17)$$

نعود الى المعادلة (5.16)، وبالمفاضلة (differentiating) نصل الى:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b + 2cy \quad \text{و بتقييم (evaluation)} \quad (5.18)$$

المعادلة (5.18) على الحدود

(عند نقطة 1) حيث  $y = 0$  :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = b \quad (5.19)$$

بعد الجمع بين المعادلات (5.18) و (5.19)، نحصل على:



$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y} \quad (5.20)$$

لإظهار ترتيب الدقة للمعادلة (5.20) سننظر في توسيع سلسلة تايلر ( Taylor's series expansion ) حول النقطة 1.

$$u(y) = u_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_1 \frac{y^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_1 \frac{y^3}{6} + \dots \quad (5.21)$$

قارن المعادلات (5.21) و (5.16). التعبير المتعدد الحدود (polynomial expression) الذي افترضناه في المعادلة (5.16) هو يساوي استخدام أول ثلاث مصطلحات في سلسلة تايلر (Taylor's series). وبالتالي، المعادلة (5.16) هي من  $O(\Delta y)^3$ . في تشكيل المشتق (derivative) في المعادلة (5.20)، نحن قسمناه بـ  $\Delta y$ ، الأمر الذي يجعل المعادلة (5.20) من نوع  $O(\Delta y)^2$  وبالتالي يمكن أن نكتب المعادلة (5.20) كما يلي:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y} + O(\Delta y)^2 \quad (5.22)$$

وهذا هو حاصل الفرق ذات الدرجة الثانية من دقة (second- difference quotient) order-accurate على الحدود الذي كنا نبحث عنه. كلا المعادلتين (5.15) و (5.22) تسمى الفرق من جانب واحد (one-sided differences)، لأنها تعبر عن المشتق (derivative) لدالة (function) في نقطة عن طريق مصطلح رياضي بمتغيرات تابعة التي تعتمد على جانب واحد فقط من هذه النقطة. يمكن تشكيل العديد من فرق من جانب واحد (one-sided

(differences)، بأعلى درجات من الدقة (accuracy)، وذلك باستخدام نقاط إضافية إلى جانب واحد (one side) من الحدود.

### 5.3 جوانب أساسية لمعادلات الفرق المحدود (Basic Aspects of Finite-Difference Equations)

الجوهر من حلول عن طريق الفرق المحدودة (finite-difference) في الـ CFD هو استخدام المقسومات الفرقية (difference quotients) التي استخرجت في فصل 5.2 بدل المشتقات الجزئية في المعادلات الأساسية لميكانيك الموائع (governing flow equations). النتيجة هي منظومة من معادلات فرقية جبرية (system of algebraic difference equations) للمتغيرات التابعة (dependent variables) في كل نقطة من الشبكة (grid).

في هذا الباب، سندرس بعض الجوانب الأساسية لمعادلة فرقية (a difference equation). اعتبر المعادلة النموذجية التالية، والتي يفترض فيها أن  $u$  هو المتغير التابع (dependent variable) و يكون دالة (function) من  $x$  و  $t$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.23)$$

نختار هذه المعادلة البسيطة تسهيلاً للعمل، في هذه المرحلة من مناقشاتنا ليس هناك ميزة يمكن الحصول عليها عن طريق التعامل مع معادلات السريان (flow equations) الأكثر تعقيداً. المعادلة (5.23) هي من نوع القطع المكافئ (parabolic).

إذا قمنا باستبدال مشتق الوقت (time derivative) في المعادلة (5.23) بفارق إلى الأمام (forward difference)، ومشتق المكاني (spatial derivative) مع اختلاف مركزي، نصل إلى النتيجة التالية:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (5.24)$$

سؤال: ما هو خطأ الاقتطاع (truncation error) لمعادلة الفرق محدود كاملة (finite-difference equation)؟  
الجمع بين المعادلات (5.23) و (5.24)، وكتابة بشكل واضح أخطاء الاقتطاع (truncation errors) المرتبطة بمواصل الفرق (difference quotients) من المعادلات (5.4) و (5.10) أصبح لدينا:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2} + \left[ -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i \frac{\Delta t}{2} + \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots \right] \quad (5.25)$$

على جانب اليسار للمعادلة (5.25) هناك المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية (original partial differential equation)، وعلى الجانب اليمين هناك المصطلحين الأول والثاني لمصطلح الفرق المحدودة (finite difference expression) لهذه المعادلة.

و المصطلحات الواردة في أقواس مربعة [] هي خطأ الاقتطاع (truncation error) للمعادلة الكاملة. خطأ الاقتطاع (truncation error) لهذا البيان (representation) هو .

$$O[\Delta t, (\Delta x)^2]$$

هل معادلة الفرق المحدود (finite-difference equation) تساوي المعادلة التفاضلية الأصلية (original differential equation) إذا عدد نقاط الشبكة يذهب إلى ما لا نهاية، أي لو

$$\text{مثلاً } \Delta x \rightarrow 0 \text{ و } \Delta t \rightarrow 0?$$

فحص المعادلة (5.25)، نلاحظ أن خطأ الاقتطاع (truncation error) يذهب إلى الصفر، وبالتالي معادلة الاختلاف (difference equation) تقترب حقا من المعادلة التفاضلية الأصلية.

عندما يكون هذا هو الحال، يقال إن بيان الفرق المحدودة (finite-difference representation) للمعادلة التفاضلية الجزئية (partial differential equation) متناسق (consistent).

حل المعادلة (5.24) يأخذ شكل حل 'السير' ('marching') في خطوات من الزمن. ولنتذكر من المقطع 4.3.2 أن حلول السير (marching solutions) هي سمة من سمات لمعادلات القطع المكافئ (parabolic equations).

فترض أننا نعرف المتغير التابع (dependent variable) لكل  $x$  في بعض لحظة من الزمن، لظروف الأولية (initial conditions) المعطية. و بفحص المعادلة (5.24)، نرى أنها تحتوي على متغير واحد فقط غير معروف (unknown)، وهو  $u_j^{n+1}$ . و بهذه الطريقة، يمكن الحصول على المتغير التابع (dependent variable) في الوقت  $(t + \Delta t)$  مباشرة من النتائج

المعروفة (known results) في الوقت  $t$  ، يعني ذلك انه يتم الحصول عليها مباشرةً من القيم المعروفة (known values)  $u_j^n$  ،  $u_{j+1}^n$  و  $u_{j-1}^n$ . هذا هو مثال على حل للفرق المحدودة بالشكل الواضح المباشر (explicit finite-difference solution).

بالمقابل كمثال مضاد، نعود إلى المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية (original partial differential equation) التي قدمتها المعادلة (5.23). هذه المرة، نكتب الاختلافات المكانية (spatial differences) على الجانب الأيمن و بمصطلحات المعدل (average properties) بين  $n$  و  $(n+1)$ ، وهذا هو

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n - 2u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_{i-1}^{n+1} + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad (5.26)$$

وهذا الشكل من الاختلاف (differencing) المبين في المعادلة (5.26) يسمى الشكل الكرانك-نيكلسون (Crank-Nicolson form).

افحص المعادلة (5.26). غير المعروف  $u_i^{n+1}$  لا يُعبَّر عنه فقط عبر كميات معروفة (terms of the known quantities) في نقطة الزمان  $n$  - وهي  $u_{i+1}^n, u_i^n, u_{i-1}^n$  - ولكن أيضا عبر كميات غير معروفة وهي في نقطة الزمان  $n+1$  - وهي  $u_{i+1}^{n+1}$  و  $u_{i-1}^{n+1}$ .

وبالتالي، اذا حاولنا ان نطبق المعادلة (5.26) عند نقطة معينة  $i$  في الشبكة (grid) لا يمكن في هذه النقطة بحذ ذاتها الحصول على الحل ل  $u_i^{n+1}$ . بدلا من ذلك، المعادلة (5.26) يجب أن تكون مكتوبة في جميع نقاط الشبكة، مما يؤدي الى نظام من المعادلات الجبرية (system)

(of algebraic equations) حيث يكون المجهول ( $u^{n+1}$ ) لجميع  $i$  و يمكن حلها سويةً في وقت واحد. هذا مثال على حل ضمني للفرق المحدود (implicit finite-difference solution). لأنها تعالج مع حل لنظم كبيرة (large systems) من المعادلات الجبرية الخطية في وقت واحد (simultaneous linear algebraic) وتشارك عادة الطرق الضمنية (implicit methods) في التلاعب بالمصفوفات الكبيرة (large matrices).

وفيما يلي موجز من الايجابيات (advantages) والسلبيات (disadvantages) الرئيسية بالنسبة لهذين المنهجين.

#### (1) النهج الصريح (Explicit approach)

(أ) ايجابية (advantage): بسيط نسبياً لإنشاء (set up) برنامج (program).

(ب) السلبية (disadvantage): على صعيد المثال اعلاه، ل  $\Delta x$  معين، يجب أن يكون  $\Delta t$  أقل من بعض الحدود (limit) التي تفرضها قيود الاستقرار (stability constraints). في كثير من الحالات، يجب أن تكون  $\Delta t$  ضئيلة للغاية للحفاظ على الاستقرار (stability)، وهذا يمكن أن يؤدي إلى تشغيل الكمبيوتر (computer) لوقت طويل لإجراء حسابات (calculations) على مدى فترة معينة من الزمان  $t$ .

#### (2) النهج الضمني (Implicit approach)

(أ) ميزة. يمكن الحفاظ على الاستقرار (stability) للقيم الأكبر بكثير من  $\Delta t$  ، وبالتالي باستخدام خطوات وقت أقل بكثير لجعل العمليات الحسابية (calculations) على مدى فترة معينة من  $t$ . هذه النتائج تأخذ وقتاً أقل في الكمبيوتر (computer).

ب) العيب. أكثر تعقيدا لإنشاء برنامج(program).

ج) العيب: بما ان التلاعب بالمصفوفة الضخمة (massive matrix) هي بشكل عام ضرورية في كل خطوة من الوقت, وقت الكمبيوتر في كل خطوة وقت هو أكبر بكثير مما كانت عليه في النهج الصريح (explicit approach).

د) العيب: بما انه يمكن اتخاذ  $\Delta t$  كبيرة ، وخطأ اقتطاع أكبر (truncation error)، واستخدام طرق ضمنية (implicit methods) لتابعة العابرين المحددين (اختلافات الوقت للمتغيرات المستقلة (independent variable)) قد لا تكون دقيقة كالنهج الصريح (explicit approach).

ومع ذلك للتوصل الى حل مشروط بالوقت حيث فيه حالة الاستقرار (steady state) هي النتيجة المرجوة بالنسبة لناحية الوقت غير الدقيق (inaccuracy) هي ليست مهمة.

خلال الفترة من عام 1969 إلى حوالي عام 1979، فإن الغالبية العظمى من الحلول CFD العملية التي تنطوي على حلول 'السير' ('marching') (كما هو الحال في المثال أعلاه) حيث الطرق الواضحة (explicit methods) هي المستخدمة.

ومع ذلك، فإن العديد من تطبيقات ال CFD الأكثر تطورا تلك التي تتطلب نقاط شبكة (grid points) قريبة جدا من بعضها في بعض مناطق التدفق (regions of the flow) الذي يتطلب وقت تشغيل أكبر للكمبيوتر نظراً إلى خطوات السير الصغيرة (small marching steps) المطلوبة.

وقد جعلت هذه الميزة (advantage) المذكورة أعلاه الطرق الضمنية (implicit methods) جذابة للغاية ألا وهي القدرة على استخدام خطوات سير كبيرة حتى بالنسبة لشبكة دقيقة جداً. لهذا السبب كانت الطرق الضمنية (implicit methods) في الثمانينيات محوراً رئيسياً من تطبيقات ال CFD.

### 5.3.1 تعليق عام

فمن الواضح أن حلول الفرق المحدودة ، تبدو فلسفياً واضحة باستبدال المشتقات الجزئية (partial derivatives) في المعادلات الأساسية (governing equations) بحواصل الفرق الجبرية (algebraic difference quotients)، و تقليص الفرق للحصول على حلول لهذه المعادلات الجبرية (algebraic equations) في كل نقطة من نقاط الشبكة. ومع ذلك، هذه الفكرة مضللة. لأي تطبيق معين، ليس هناك ما يضمن أن مثل هذه الحسابات (calculations) ستكون دقيقة (accurate)، أو حتى مستقرة (stable)، في ظل جميع الشروط. وعلاوة على ذلك، فإن شروط الحدود (boundary conditions) لمشكلة معينة إملأ حل، وبالتالي فإن العلاج المناسب لشروط الحدود (boundary conditions) في إطار تقنية محدودة، ولا سيما الفرق المحدود (finite-difference) أمر في غاية الأهمية

### 5.4 Errors and an Analysis of Stability - أخطاء وتحليل الاستقرار

At the end of the last section, we stated that no guarantee exists for the accuracy and stability of a system of finite-difference, equations under all conditions.

في نهاية المقطع الأخير، ذكرنا أنه لا وجود لضمان دقة واستقرار نظام الفرق المحدود،



للمعادلات في كل الشروط.

However for linear equations there is a formal way of examining the accuracy and stability and these ideas at least provide guidance for the understanding of the behaviour of the more complex non-linear system that is our governing flow equations.

ولكن للمعادلات الخطية هناك وسيلة رسمية لفحص الدقة والاستقرار وهذه الأفكار على الأقل تقدم توجيهه لبيان فهم سلوك النظام غير الخطي والأكثر تعقيدا وهذه هي المعادلات الأساسية للسريان.

In this section we introduce some of these ideas, applied to simple linear equations.

في هذا القسم نقدم بعض هذه الأفكار التي تطبق على المعادلات الخطية البسيطة.

The material in this section is patterned somewhat after section 3–6 of the excellent new book on CFD by Dale Anderson, John Tannehill and Richard Pletcher (Ref. [1]) which should be consulted for more details. Consider a partial differential equation, such as for example Eq. (5.23). The numerical solution of this equation is influenced by two sources of error:

ونمط هذه المواد في هذا الباب إلى حد ما بعد القسم 3–6 من كتاب CFD الجديد الممتاز من قبل دايل أندرسون (Dale Anderson)، جون تانهيل (John Tannehill) وريتشارد بلاتشار (Richard Pletcher) (( المرجع [1] )) التي ينبغي التشاور معها لأي تفصيل دقيق. نعتبر المعادلة التفاضلية الجزئية، مثل على سبيل المثال المعادلة (5.23). ويتأثر الحل العددي لهذه المعادلة من قبل اثنين من مصادر الخطأ:

1 .Discretization error. The difference between the exact analytical solution of the partial differential equation (for example, Eq. (5.23)) and the exact (round-off free) solution of the corresponding difference equation (for example, Eq. (5.24)).

From our previous discussion, the discretization error is simply the truncation error for the difference equation plus any errors introduced by the numerical treatment of the boundary conditions.

1. خطأ التفريز (Discretization error). الفرق بين الحل التحليلي ( analytical solution) الدقيق للمعادلة التفاضلية الجزئية (partial differential equation) (على سبيل المثال المعادلة (5.23)) والحل الدقيق (تقريباً حر (round-off free)) الذي يتوافق مع معادلة الفرق (difference equation) (على سبيل المثال المعادلة (5.24)).

في مناقشتنا السابقة خطأ التفريز (discretization error) هو ببساطة خطأ اقتطاع (truncation error) معادلة الفرق (difference equation) بالإضافة الى الاخطاء التي تدخل في المعالجة الرقمية (numerical treatment) لشروط الحدود ( boundary conditions).

2 .Round-off error. The numerical error introduced after a repetitive number of calculations in which the computer is constantly rounding the numbers to some significant figure.

2. خطأ التقريب (Round-off error). يدخل الخطأ العددي (numerical error) بعد عدد من العمليات الحسابية (calculations) المتكررة في جهاز الكمبيوتر الذي يقوم بتقريب

(rounding) الأرقام باستمرار إلى بعض الأعداد المعبرة (significant figure) .

If we let

A = analytical solution of the partial differential equation

D = exact solution of the difference equation

N = numerical solution from a real computer with finite accuracy

إذا تركنا

A = الحل التحليلي (analytical solution) للمعادلة التفاضلية الجزئية (partial

(differential equation

D = الحل الدقيق (exact solution) لمعادلة الفرق (difference equation)

N = الحل العددي (numerical solution) من جهاز كمبيوتر الحقيقي مع دقة متناهية

then ,

Discretization error = A-D

Round-off =  $\epsilon$  = N -D (5.27)

From Eq. (5.27), we can write

N = D +  $\epsilon$  (5.28)

ثم،

A-D = خطأ التفريز (Discretization error)

(5.27) N -D =  $\epsilon$  = التقريب (Round-off)

من المعادلة (5.27)، يمكن أن نكتب

(5.28) N = D +  $\epsilon$

Where again  $\varepsilon$  is the round-off error, which for the remainder of our discussion in this section, we will simply call "error" for brevity. The numerical solution  $N$  must satisfy the difference equation. Hence from Eq. (5.24),

حيث مرة أخرى  $\varepsilon$  هو خطأ التقريب (round-off error)، لبقية مناقشتنا في هذا القسم، و سوف نسميه ببساطة "خطأ" للإيجاز. الحل العددي  $N$  (numerical solution) يجب ان تكفي معادلة الفرق (difference equation). وبالتالي من المعادلة (5.24)،

$$\frac{D_i^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1} - D_i^n - \varepsilon_i^n}{\Delta t} = \frac{D_{i+1}^n + \varepsilon_{i+1}^n - 2D_i^n - 2\varepsilon_i^n + D_{i-1}^n \varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (5.29)$$

By definition,  $D$  is the exact solution of the difference equation, hence it exactly satisfies:

بحكم التعريف،  $D$  هو الحل الدقيق (exact solution) لمعادلة الفرق (difference equation)، وبالتالي انه يفي تماما:

$$\frac{D_i^{n+1} - D_i^n}{\Delta t} = \frac{D_{i+1}^n - 2D_i^n + D_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (5.30)$$

Subtracting Eq. (5.30) from (5.29),

طرح المعادلة (5.30) من (5.29)،

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (5.31)$$

From Eq. (5.31), we see that the error  $\varepsilon$  also satisfies the difference equation.

من المعادلة (5.31)، نرى ان الخطأ (error)  $\varepsilon$  يكفي ايضاً معادلة الفرق ( difference equation ).

### تحليل الاستقرار - Stability Analysis

We now consider aspects of the stability of the difference equation, Eq. (5.24). **If errors  $\varepsilon_i$  are already present at some stage of the solution of this equation (as they always are in any real computer solution), then the solution will be stable if the  $\varepsilon_i$ 's shrink, or at best stay the same, as the solution progresses from step  $n$  to  $n+1$ ; on the other hand, if the  $\varepsilon_i$ 's grow larger during the progression of the solution from steps  $n$  to  $n+1$ , then the solution is unstable.**

That is, for a solution to be stable,

نحن نعتبر الآن جوانب الاستقرار (aspects of the stability) في معادلة الفرق (difference equation)، المعادلة (5.24). إذا كانت الأخطاء  $\varepsilon_i$  موجودة في بعض مراحل الحل لهذه المعادلة (كما هم دائماً في أي حل حقيقي للكمبيوتر)، ثم فإن الحل يكون مستقراً (**stable**) إذا كانت الأخطاء  $\varepsilon_i$  تتقلص، أو في أحسن الأحوال تبقى نفسها، حيث الحل يتقدم من الخطوة  $n$  إلى  $n+1$ ، ومن ناحية أخرى، إذا كانت  $\varepsilon_i$  تكبر مع تقدم الحل من المرحلة  $n$  إلى  $n+1$  فإن الحل يكون غير مستقر (**unstable**).

بطريقة أخرى للتوصل إلى حل يكون مستقر (stable)،

$$|\varepsilon_i^{n+1} / \varepsilon_i^n| \leq 1 \quad (5.32)$$

For Eq. (5.24), let us examine under what conditions Eq. (5.32) holds. Assume that the distribution of errors along the x-axis is given by a Fourier series in x, and that the time-wise variation is exponential in t, i.e.

للمعادلة (5.24)، دعونا نبحث تحت أي شروط تستمر المعادلة (5.32). لنفرض ان توزيع الاخطاء (distribution of errors) على طول محور x (x-axis) تكون معطاة من قبل سلسلة فورييه (Fourier series) في x ، وهذا من ناحية الوقت الاختلاف هو الأسّي (exponential) في t ، أي

$$\varepsilon(x, t) = e^{at} \sum_m e^{ik_m x} \quad (5.33)$$

Where  $k_m$  is the wave number and where the exponential factor a is a complex number. Since the difference equation is linear, when Eq. (5.33) is substituted into Eq. (5.31) the behaviour of each term of the series is the same as the series itself. Hence, let us deal with just one term of the series, and write

حيث  $k_m$  هو عدد الموجات (wave number) وحيث العامل الأسّي (exponential factor) a هو عدد مركب (complex number). بما ان معادلة الفرق (difference equation) هي خطية (linear)، عندما يتم استبدال المعادلة (5.33) في المعادلة (5.31) سلوك كل مصطلح (term) من هذه السلسلة (series) هو نفس السلسلة (series) ذاتها. ومن ثم، دعونا نتعامل مع مصطلح واحد فقط من هذه السلسلة (series)، وكتابة

$$\varepsilon_m(x, t) = e^{at} e^{ik_m x} \quad (5.34)$$

Substitute Eq. (5.34) into Eq. (5.31),

استبدال المعادلة (5.34) في المعادلة (5.31).

$$\frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m x}}{\Delta t} = \frac{e^{at} e^{ik_m(x+\Delta x)} - 2e^{at} e^{ik_m x} + e^{at} e^{ik_m(x-\Delta x)}}{(\Delta x)^2} \quad (5.35)$$

Divide Eq. (5.35) by  $e^{at} e^{ik_m x}$ .

تقسيم (Divide) المعادلة (5.35) من قبل  $e^{at} e^{ik_m x}$ .

$$\frac{e^{a\Delta t} - 1}{\Delta t} = \frac{e^{ik_m \Delta x} - 2 + e^{-ik_m \Delta x}}{(\Delta x)^2}$$

or,

$$e^{a\Delta t} = 1 + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (e^{ik_m \Delta x} + e^{-ik_m \Delta x} - 2) \quad (5.36)$$

Recalling the identity that

تذكير الهوية (identity) تلك

$$\cos(k_m \Delta x) = \frac{e^{ik_m \Delta x} + e^{-ik_m \Delta x}}{2}$$

Equation (5.36) can be written as

ويمكن كتابة المعادلة (5.36) على الشكل التالي:

$$e^{a\Delta t} = 1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} [\cos(k_m \Delta x) - 1] \quad (5.37)$$

Recalling another trigonometric identity that

تذكير بهوية مثلثاتي (trigonometric identity) أخرى و هي

$$\sin^2[(k_m \Delta x)/2] = \frac{1 - \cos(k_m \Delta x)}{2}$$

Equation (5.37) finally becomes

المعادلة (5.37) تصبح في نهاية المطاف

$$e^{a\Delta t} = 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2[(k_m \Delta x)/2] \quad (5.38)$$

From Eq. (5.34),

من المعادلة. (5.34)



$$\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n} = \frac{e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x}}{e^{at} e^{ik_m x}} = e^{a\Delta t} \quad (5.39)$$

Combining Eqs. (5.39), (5.38) and (5.32), we have

الجمع (Combining) بين المعادلات (5.39)، (5.38) و (5.32)، يصبح لدينا

$$\left| \frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n} \right| = |e^{a\Delta t}| = \left| 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2[(k_m \Delta x)/2] \right| \leq 1 \quad (5.40)$$

Equation (5.40) must be satisfied to have a stable solution, as dictated by Eq. (5.32). In Eq. (5.40) the factor

يجب أن توفى المعادلة (5.40) كل شروط ليكون لدينا حل مستقر وفقا لما تمليه المعادلة.

(5.32). في المعادلة (5.40) العامل

$$\left| 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2[(k_m \Delta x)/2] \right| \equiv G$$

is called the amplification factor, and is denoted by G. Evaluating the inequality in Eq. (5.40), namely  $G \leq 1$ , we have two possible situations which must hold simultaneously:

وهو يسمى عامل التضخيم (amplification factor) ويرمز اليه عبر الرمز G. تقييم

التفاوت (inequality) في المعادلة (5.40)، أي  $G \leq 1$ ، لدينا اثنين من الحالات المحتملة

التي يجب ان تحصل و تستمر في نفس الوقت:

$$(1) \quad 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2[(k_m \Delta x)/2] \leq 1$$

Thus

$$\frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2[(k_m \Delta x)/2] \geq 0$$

Since  $\Delta t/(\Delta x)^2$  is always positive, this condition always holds.

بما ان  $\Delta t/(\Delta x)^2$  هي دائماً ايجابي هذا الشرط يستمر دائماً

$$(2) \quad 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2[(k_m \Delta x)/2] \geq -1$$

Thus

$$\frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2[(k_m \Delta x)/2] - 1 \leq 1$$

For the above condition to hold,

لاستمرار الشروط اعلاه

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (5.41)$$

Equation (5.41) gives the stability requirement for the solution of the difference equation, Eq. (5.24), to be stable.

المعادلة (5.41) تعطي متطلبات الاستقرار (stability requirement) لحل

معادلة الفرق (difference equation)، المعادلة (5.24)، ممكن ان تكون

مستقرة (stable).

Clearly, for a given  $\Delta x$ , the allowed value of  $\Delta t$  must be small enough to satisfy Eq. (5.41).

بوضوح، لاجل  $\Delta x$  محددة، يجب أن تكون قيمة  $\Delta t$  صغيرة بما يكفي لتلبية حاجة المعادلة (5.41).

Here is a stunning example of the limitation placed on the marching variable by stability considerations for explicit finite difference models.

هنا هو مثال مذهل لوضع القيود على متغير السير (marching variable) التي تفرضها اعتبارات الاستقرار (stability) لنماذج الفرق المحدود الواضحة (explicit finite difference models).

As long as  $\Delta t/(\Delta x)^2 \leq 1/2$ , the error will not grow for subsequent marching steps in  $t$ , and the numerical solution will proceed in a stable manner.

طالما  $\Delta t/(\Delta x)^2 \leq 1/2$ ، الخطأ لن ينمو لخطوات السير (marching steps) اللاحقة في  $t$ ، والحل العددي (numerical solution) سيحدث في حالة مستقرة (stable manner).

On the other hand, if  $\Delta t/(\Delta x)^2 > 1/2$ , then the error will progressively become larger, and will eventually cause the numerical marching solution to 'blow up' on the computer .

من ناحية أخرى، إذا  $\Delta t/(\Delta x)^2 > 1/2$ ، إذاً الخطأ سوف يصبح تدريجياً أكبر، ويسبب في نهاية المطاف حل عددي للسير (numerical marching solution) لتفجير ('blow up') جهاز الكمبيوتر.

The above analysis is an example of a general method called the von Neuman stability method, which is used frequently to study the stability

properties of linear difference equations.

إن التحليل (analysis) الوارد أعلاه هو مثال على طريقة عامة تسمى طريقة استقرار فون نيومان (von Neuman stability method)، التي كثيرا ما تستخدم لدراسة خصائص الاستقرار (stability properties) لمعادلات الفرق الخطية (linear difference equations).

مثال - Stability analysis of a hyperbolic equation: Another Example:

آخر: تحليل الاستقرار للمعادلة القطعية

Let us quickly examine the stability characteristics of another simple equation, this time a hyperbolic equation. Consider the first order wave equation:

Laissez-nous examiner rapidement les caractéristiques de stabilité d'une autre équation simple, cette fois une équation hyperbolique. Considérons l'équation du premier ordre d'onde:

دعونا بسرعة نقوم بدراسة خصائص الاستقرار (stability characteristics) لمعادلة بسيطة أخرى وهذه المرة لمعادلة قطعية (hyperbolic equation). نعتبر معادلة الدرجة الأولى للموجة (first order wave equation):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.42)$$

Let us replace the spatial derivative with a central difference (see Eq. (5.8)).

دعونا نستبدل المشتق المكاني (spatial derivative) مع الفرق المركزي (central

(difference) (انظر المعادلة (5.8)).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (5.43)$$

Let us replace the time derivative with a first order difference, where  $u(t)$  is represented by an average value between grid points  $(i+1)$  and  $(i-1)$ , i.e.

دعونا نستبدل مشتق الوقت (time derivative) مع الفرق ذات الدرجة الأولى ( first order difference) حيث يتم تمثيل قيمة المعدل (average value) بين نقاط الشبكة (grid points)  $(i+1)$  و  $(i-1)$  ، أي

$$u(t) = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$$

Then

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\Delta t} \quad (5.44)$$

Substituting Eqs. (5.43) and (5.44) into (5.42), we have

استبدال المعادلات (5.43) و (5.44) في (5.42)، يصبح لدينا

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2} \right) \quad (5.45)$$

Combining Eqs. (5.18) and (5.19), we obtain The differencing used in the above equation, where Eq. (5.44) is used to represent the time derivative, is called the Lax method, after the mathematician Peter Lax who first

proposed it. If we now assume an error of the form  $\varepsilon_m(x, t) = e^{at}e^{ik_m t}$  as done previously, and substitute this form into Eq. (5.45), the amplification factor become sin

الجمع بين المعادلات (5.18) و (5.19)، نحصل على التفريق (differencing) المستخدم في المعادلة المذكورة أعلاه، حيث المعادلة (5.44) مستعملة لتمثيل مشتق الوقت (time derivative)، التي تسمى طريقة لاكس (Lax)، وبعد بيتر لاكس (Peter Lax) عالم الرياضيات الذي كان اول من طرحها. لو افترضنا الآن شكل الخطأ (error)  $\varepsilon_m(x, t) = e^{at}e^{ik_m t}$  المعمول بها سابقا، واستبدال هذا الشكل في المعادلة (5.45)، عامل التضخيم أصبح sin

$$G = \cos(km\Delta x) - iC \sin(km\Delta x) \quad (5.46)$$

where  $C = c.\Delta t/\Delta x$ . The stability requirement is  $|e^{at}| \leq 1$ , which when applied to Eq. (5.46) yields

حيث  $C = c.\Delta t/\Delta x$  الشرط المطلوب للاستقرار (stability requirement) هو  $|e^{at}| \leq 1$ ، عندما تطبق على المعادلة (5.46) نحصل على:

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (5.47)$$

In Eq. (5.47),  $C$  is called the *Courant number*. This equation says that  $\Delta t \leq \Delta x/c$  for the numerical solution of Eq. (5.45) to be stable. Moreover, Eq. (5.47) is called the *Courant–Friedrichs–Lewy condition*, generally written as the CFL condition. It is an important stability criterion for hyperbolic equations. Let us examine the physical significance of the CFL condition. Consider the second order wave equation

في المعادلة (5.47)، تسمى  $C$  عدد كوران (*Courant number*). هذه المعادلة تقول إن  $(\Delta t \leq \Delta x/c)$  من أجل ان يكون الحل العددي (numerical solution) في المعادلة

(5.45) مستقرًا (stable). وعلاوة على ذلك، المعادلة (5.47) تسمى شرط كوران - فريدرخس - ليفي (*Courant–Friedrichs–Lewy condition*)، عموماً يكتب كشرط CFL. من المهم الإشارة إلى معيار الاستقرار (stability) العام للمعادلات القطعية (hyperbolic equations). دعونا ندرس الأهمية الفيزيائية (physical) لشرط الـ CFL. لنعتبر معادلة الموجة (wave equation) ذات الدرجة الثانية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.48)$$

The characteristic lines for this equation (see Sect. 4.2) are given by

الخطوط الرئيسية (characteristic lines) لهذه المعادلة (انظر القسم 4.2) تكون مقدمة عبر

$$x = ct \quad (\text{right running})$$

and

$$x = -ct \quad (\text{left running})$$

and are sketched in Fig. 5.3(a) and (b). In both parts (a) and (b) of Fig. 5.3, let point b be the intersection of the right-running characteristic through grid point (i - 1) and the left-running characteristic through grid point (i+1).

ورسمت في الشكل 5.3(a) و (b). في كلا الجزئين (a) و (b) من الشكل 5.3، سمح للنقطة b ان تكون تقاطع (intersection) لخصائص الاندفاع يميناً (right-running) خلال نقطة الشبكة (i - 1)، و خصائص الاندفاع يساراً (left-running) خلال نقطة

الشبكة (i+1).

For Eq. (5.48), the CFL condition as given in Eq. (5.47) holds as the stability criterion. Let  $\Delta t_{C=1}$  denote the value of  $\Delta t$  given by Eq. (5.47) when  $C = 1$ . Then  $\Delta t_{C=1} = \Delta x/c$ , and the intersection point  $b$  is therefore a distance  $\Delta t_{C=1}$  above the  $x$ -axis, as sketched in Figs. 5.3(a) and (b).

للمعادلة (5.48)، شرط ال CFL المعطى في المعادلة (5.47) يعطي معيار الاستقرار (stability criterion). لنفترض  $\Delta t_{C=1}$  يدل على قيمة ال  $\Delta t$  المقدمة بواسطة المعادلة

(5.47) حيث  $C = 1$ . ثم  $\Delta t_{C=1} = \Delta x/c$  وبالتالي نقطة التقاطع (stability criterion)  $b$

على مسافة  $\Delta t_{C=1}$  فوق المحور  $x$  (x-axis)، كما رسمت في الرسم 5.3(a) و (b).

Now assume that  $C < 1$ , which is the case sketched in Fig. 5.3(a). Then from Eq. (5.47),  $\Delta t_{C<1} < \Delta t_{C=1}$ , as shown in Fig. 5.3(a).

لنفترض الآن ان  $C < 1$ , وهي الحالة (case) المرسوم في الرسم 5.3(a). ثم من المعادلة

(5.47)،  $\Delta t_{C<1} < \Delta t_{C=1}$ ، كما هو مبين في الشكل 5.3(a).

Let point  $d$  correspond to the grid point at point  $i$ , existing at time  $(t+\Delta t_{C<1})$ . Since properties at point  $d$  are calculated numerically from the difference equation using grid points  $(i-1)$  and  $(i+1)$ , the numerical domain for point  $d$  is the triangle  $adc$  shown in Fig. 5.3(a).

لنفترض النقطة  $d$  تتوافق مع نقطة في الشبكة عند النقطة  $i$ ، الموجودة في الوقت  $(t+\Delta t_{C<1})$ .

بما ان الخصائص (properties) عند النقطة  $d$  تحسب عددياً (calculated)

(numerically) من معادلة الفرق (equation) باستخدام نقاط الشبكة (grid)  $(i-1)$  و

$(i+1)$ ، النطاق العددي (numerical domain) لنقطة  $d$  يكون المثلث (triangle)  $adc$ .

الذي يظهر في الشكل 5.3(a).



المجال التحليلي (analytical domain) للنقطة  $d$  هو المثلث المظلل (shaded triangle) في الشكل 5.3(a), المعرّف عنه بالخصائص (characteristics) عند النقطة  $d$ . ونلاحظ أن في الشكل 5.3(a) المجال العددي (numerical domain) للنقطة  $d$  يشمل المجال التحليلي (analytical domain). في المقابل، لنفترض الحالة المبينة في الشكل 5.3(b). هنا،  $C > 1$ ، إذاً، من المعادلة (5.47)،  $\Delta t_{C>1} > \Delta t_{C=1}$ ، كما هو مبين في الشكل 5.3(b). لنفترض النقطة  $d$ .

الشكل 5.3:

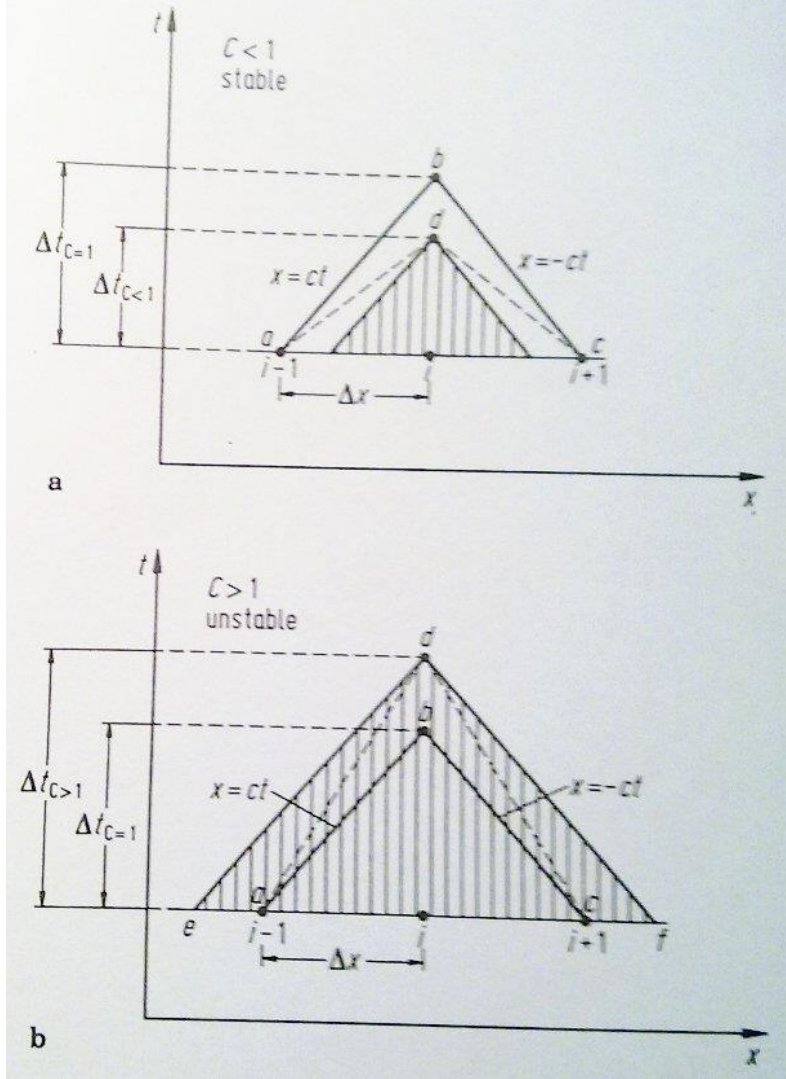
توضيح للأهمية

physical)

significance

( الفيزيائية

لشروط CFL



في الشكل 5.3(b) التي تتناسب مع نقطة الشبكة  $i$ ، الموجودة في الوقت  $(t + \Delta t_{C > 1})$ . بما ان الخصائص في النقطة  $d$  تحسب عددياً (calculated numerically) من معادلة الفرق (difference equation) باستخدام نقاط شبكة (grid points)  $(i-1)$  و  $(i+1)$  ، النطاق العددي (numerical domain) للنقطة  $d$  هو المثلث  $adc$  (triangle) الذي يظهر في

الشكل 5.3(b). المجال التحليلي (analytical domain) للنقطة  $d$  هو المثلث المظلل (shaded triangle) في الشكل 5.3(b). والمعروف عنه من خلال الخصائص (characteristics) عند النقطة  $d$ . نلاحظ أن في الشكل 5.3(b) المجال العددي (numerical domain) لا يشمل كل المجال التحليلي (analytical domain)، وهذا هو الشرط (condition) الذي يؤدي إلى سلوك غير مستقر (unstable behaviour). ولذلك، يمكن أن نقدم التفسير الفيزيائي (physical interpretation) التالي لشرط ال CFL (CFL condition):

من أجل الاستقرار (stability)، المجال الحسابي (computational domain) يجب أن يشمل كل المجال التحليلي (analytical domain). الاعتبارات المذكورة أعلاه تدرس مع الاستقرار (stability). مسألة الدقة (accuracy)، والتي تختلف تماما في بعض الأحيان، يمكن أيضاً أن تدرس من وجهة نظر الشكل 5.3. نعتبر الحالة المستقرة (stable case) كما هو مبين في الشكل 5.3(a). نلاحظ ان المجال التحليلي (analytic domain) للتبعية (dependence) للنقطة  $d$  هو المثلث المظلل (shaded triangle) في الشكل 5.3(a). من مناقشاتنا في الفصل 4 (Chap. 4)، والخصائص في نقطة  $d$  نظرياً يعتمد فقط على النقاط داخل المثلث المظلل (shaded triangle). ومع ذلك، نلاحظ ان نقاط الشبكة العددية (numerical grid points)  $(i-1)$  و  $(i+1)$  تكون خارج مجال التبعية (of dependence) وبالتالي نظريا يجب ان لا يؤثر على الخصائص (properties) عند النقطة  $d$ . من ناحية أخرى، الحساب العددي (numerical calculation) للخصائص (properties) في نقطة  $d$  تأخذ معلومات من نقاط الشبكة (grid points)  $(i-1)$  و  $(i+1)$ . وهذه الحالة تكون قد

تفاقت عندما يتم اختيار  $\Delta t_{C=1}$  صغيرة جداً،  $\Delta t_{C=1} \ll \Delta t_{C=1}$ . في هذه الحالة، على الرغم من ان العمليات الحسابية (calculations) في حالة مستقرة (stable)، قد تكون النتائج (results) غير دقيقة (inaccurate) تماماً بسبب البعد (mismatch) الواسع بين المجال التبعية للنقطة (domain of dependence)  $d$ ، و بين موقع البيانات العددية الفعلية (actual numerical data) المستخدمة لحساب الخصائص (properties) عند  $d$ . في ضوء المناقشة الواردة أعلاه، نخلص إلى أن العدد الحالي (Courant number) يجب أن يكون مساوي أو أقل من وحدة (unity) من أجل الاستقرار (stability)،  $C \leq 1$ ، المرغوب فيه بنفس الوقت هو أن يكون  $C$  أقرب إلى وحدة (unity) كاحتمال من أجل الدقة (accuracy).

#### References

Anderson, D.A., Tannehill, John C. and Pletcher, Richard H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1984.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Computational\\_fluid\\_dynamics](http://en.wikipedia.org/wiki/Computational_fluid_dynamics)

## 6 تحولات الشبكة (Grid transformations)

### 6.1 مدخل

إذا كانت كل تطبيقات CFD تتعامل مع المشاكل الفيزيائية المنتظمة، باستخدام الشبكة المستطيلة، لن يكون هناك أي سبب لتغيير معادلات التحكم المستمدة من الجزء 2 يمكننا ببساطة تطبيق هذه المعادلات في فضاء  $(x,y,z,t)$ ، والفروق المحدودة. هذه المعادلات وفقا لحواصل الفرق المستمدة من الجزء 5، والحساب بعيدا، باستخدام قيم موحدة لل  $\Delta x$ ،  $\Delta y$ ،  $\Delta z$  و  $\Delta t$ ، ومع ذلك، بعض المشاكل الحقيقية يمكن استيعابها أكثر من أي وقت مضى، لنفترض أننا نريد حساب تدفق الهواء من الجنيح، كما هو واضح في Fig. 6.1، حيث وضعنا الجنيح في شبكة مستطيلة.

بعض المشاكل مع هذا النوع من الشبكات:

(1) تسقط بعض نقاط الشبكة داخل الجنيح، أي أنهم تماما خارج التدفق. إذا ما هي قيمة

خصائص التدفق التي يمكن ان ننسبها إلى هذه النقاط؟

(2) هناك عدد قليل، و إن وجد من نقاط الشبكة التي تقع على سطح الجنيح. هذا ليس

جيد. وذلك لأن سطح الجنيح هو شرط حيوي لحدود تحديد التدفق، وبالتالي سطح الجنيح

يجب أن يظهر بوضوح وبقوة بالحل العددي.

كنتيجة. يمكننا أن نستنتج أن الشبكة المستطيلة في Fig. 6.1 غير مناسبة لإيجاد حل لمجال

التدفق. النقيض من ذلك، الشبكة التي تظهر خصائصها في Fig. 6.2(a). هنا نرى شبكة

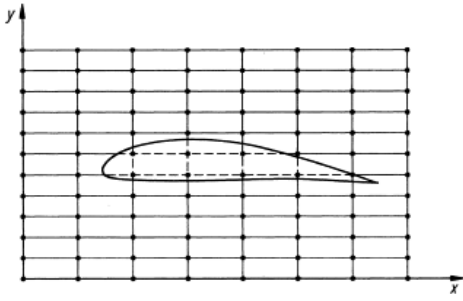
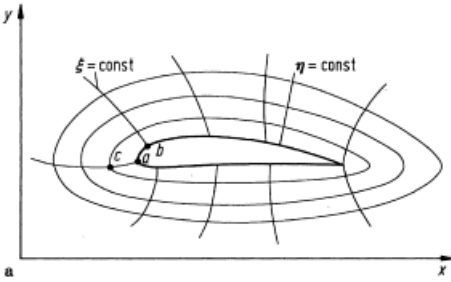
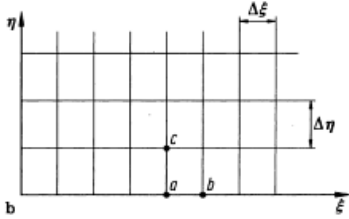
غير منتظمة و منحنية التي تقوم بالالتفاف كليا حول الجنيح. تنسيق جديد للخطوط؟؟ و؟؟

= ثابت. وهذا ما يسمى نظام أبعاد الحدود-المركبة، وسيتم مناقشتها بالتفصيل لاحقا في هذا

الفصل. والنقطة المهمة هي أن نقاط الشبكة تسقط بشكل طبيعي على سطح الجنيح، كما هو مبين في Fig. 6.2(a). و ما هو بنفس القدر من الأهمية هو أنه، في الحيز الفيزيائي المبين في Fig. 6.2(a) ، وحواصل الفرق التقليدية التي يصعب استخدامها. ما يجب القيام به هو تحويل الشبكة المنحنية في الفضاء الفيزيائي إلى شبكة مستطيلة من حيث  $\xi$  و  $\eta$  يظهران. في Fig. 6.2(b) والتي توضح شبكة رباعية الابعاد من حيث  $\xi$  و  $\eta$ . الشبكة المستطيلة كما هو مبين في Fig. 6.2(b) وتسمى أيضا التخطيط الحاسوبي. هنا يأتي التطابق في النقط بين هذه الشبكة وشبكة الخطوط المنحنية في Fig. 6.2(a) وتسمى أيضا التخطيط الفيزيائي. على سبيل المثال، النقاط a و b و c في التخطيط الفيزيائي (Fig. 6.2a) تتوافق مع نقاط a و b و c في التخطيط الحاسوبي، والذي يتضمن  $\Delta \xi$  متجانسة و  $\Delta \eta$  متجانسة. ثم يتم نقل المعلومات المحسوبة إلى التخطيط الفيزيائي. بالإضافة إلى ذلك، عندما يتم حل المعادلات التي تحكم البعد الحاسوبي، لا بد من التعبير ب  $\xi$  و  $\eta$  باعتبارها المتغيرات بدلا من x و y، أي يجب أن تتحول المرتبطة ب (x, y) إلى ( $\xi$ ,  $\eta$ ) والمتغيرات المستقلة الجديدة.

والغرض من هذا الفصل هو وصف لأول مرة التحول العام للمعادلات التي تتحكم بالتدفق بين التخطيط الفيزيائي و التخطيط الحاسوبي.

بعد ذلك، سيتم مناقشة عدة شبكات محددة. هذه المواد هي مثال على أبحاث متطورة في مجال CFD تسمى شبكة الجيل.

<p><b>Fig. 6.1:</b> Airfoil on a rectangu lar grid</p>	
<p><b>Fig. 6.2 (a)</b> Physical plane</p>	
<p>(b) Comput ational plane</p>	

## 6.2 General Transformation of the Equations

لتبسيط الأمر، سوف ندرس تدفق متقلب ثنائي الأبعاد، مع المتغيرات المستقلة  $s$ ،  $v$  و  $r$ ،  $x$ ،  $(y, t)$ ؛ نتائج التدفق المتقلب ثلاثي الأبعاد، مع المتغيرات المستقلة  $s$ ،  $v$ ،  $z$  و  $r$ ،  $x$ ،  $y$ ،  $z$ ،  $t$ ، هي مشاهدة، و ببساطة تنطوي على مزيد من الأفكار.

سنقوم بتحويل المتغيرات من الحيز الفيزيائي  $(x, y, z)$  إلى الحيز  $(\xi, \eta, \tau)$ ، حيث

$$\xi = \xi(x, y, t) \quad (6.1a)$$

$$\eta = \eta(x, y, t) \quad (6.1b)$$

$$\tau = \tau(t) \quad (6.1c)$$

في التحويل المذكور أعلاه، تتغير  $\tau$  حسب  $t$  فقط، وكثيرا ما تعطى على شكل  $t = \tau$ . هذا يبدو نافها إلى حد ما؛ ومع ذلك، Eq. (6.1c) يجب أن تتم هذه الصيغة التحويلية، وإلا ستحتفي بعض الشروط الضرورية.

في سلسلة حساب التفاضل، لدينا

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,t} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{y,t} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{y,t} \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)_{y,t} \end{aligned}$$



وأضيفت السفلية في التعبير أعلاه للتأكيد على ما هو ثابت في المعادلات التفاضلية الجزئية. في المعادلات اللاحقة، سيتم إسقاط السفلية. ومع ذلك، فمن المفيد دائما إبقائها في الذهن. وهكذا، وسوف نكتب التعبير أعلاه كالتالي:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (6.2)$$

Similarly,

$$\frac{\partial}{\partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (6.3)$$

Also,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{x,y} &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)_{\eta,\tau} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{x,y} + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right)_{\xi,\tau} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{x,y} \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)_{\xi,\eta} \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} \right)_{x,y} \end{aligned} \quad (6.4)$$

or,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{d\tau}{dt} \quad (6.5)$$

معادلات (6.2)، (6.3) و (6.5) تسمح للمشتقات فيما يتعلق س، ص و ر (x, y, t) إلى أن تتحول إلى مشتقات فيما يتعلق  $\xi$ ،  $\eta$  و  $\tau$ . مُعَامِلَاتِ المشتقات فيما يتعلق  $\xi$ ،  $\eta$  و  $\tau$  وتسمى المقاييس، على سبيل المثال  $\partial \xi / \partial x$ ،  $\partial \xi / \partial y$  و  $\partial \eta / \partial x$  و  $\partial \eta / \partial y$  هي مقياس والتي يمكن الحصول عليها من التحول العام للمعادلات. (6.1a, b and c). Eqs. إذا المعادلات. (6.1a, b and c) أعطيت على شكل تحليلي مغلق، وبالإمكان الحصول على المقاييس في شكل مغلق. ومع ذلك، فإن التحول الذي يُعطى من قبل (6.1a, b, and c) Eqs. هو في كثير من الأحيان ناتج عن وجود علاقة عددية بحتة، وفي هذه الحالة المقاييس يمكن تقييمها من قبل حواصل الفروق المحدودة - عادة الاختلافات المركزية.

دراسة المعادلات التحكم المستمدة في الجزء 2 ، نلاحظ أن معادلات التدفق اللزج تشمل المشتقات الثانية. ولذلك، فإننا بحاجة إلى التحول لهذه المشتقات. يمكن الحصول عليها من المعادلة (6.2) ، Eq.

$$A = \frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

Then,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) + \underbrace{\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \right)}_B + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \underbrace{\left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial x} \right)}_C \end{aligned} \quad (6.6)$$

المشتقات المختلطة المرموز لها بواسطة B و C في المعادلة. Eq. (6.6c) ويمكن الحصول عليها من قاعدة السلسلة على النحو التالي:

$$B = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$$

معتمدين على قاعدة السلسلة، المعادلة. Eq. (6.2)، ونحن نملك:

$$B = \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (6.7)$$

Similarly:

$$C = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (6.8)$$

وباستبدال B و C من المعادلات (6.7) و (6.8) ووضعها في المعادلة. Eq. (6.6)، وإعادة ترتيب تسلسل الشروط، يصبح لدينا:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad (6.9)$$

المعادلة (6.9) تعطي المشتقات الجزئية الثانية فيما يتعلق ب x من حيث المشتقات الأولى والثانية، والمختلط فيما يتعلق ب  $\xi$  و  $\eta$ ، مضروباً بمقاييس مختلفة. دعونا الآن نستمر في الحصول على الجزئية الثانية فيما يتعلق ب y. من المعادلة. Eq. (6.3)، والسماح

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$$

Then,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial D}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial y} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial y} \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Using Eq. (6.3),

$$E = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (6.11)$$

and

$$F = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (6.12)$$

بإستبدال Eqs. (6.11) و (6.12) في (6.10). نحصل على التالي

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \quad (6.13)$$

المعادلة (6.13) تعطي المشتقات الجزئية الثانية فيما يتعلق ب  $y$  من حيث الأولى، والمشتقات الثانية، والمختلطة فيما يتعلق ب  $\xi$  و  $\eta$ ، مضروبة بمقاييس مختلفة. نواصل الآن العمل للحصول على الجزئية الثانية فيما يتعلق ب  $x$  و  $y$ .

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial x} \right) \quad (6.14)$$

نستبدل Eqs. (6.7) و (6.8) لل  $B$  و  $C$  على التوالي في المعادلة (6.14)، ونعيد ترتيب المعادلة.

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] \quad (6.15)$$

المعادلة (6.15) تعطي المشتقات الجزئية الثانية فيما يتعلق ب  $x$  و  $y$  من حيث الأولى، والمشتقات الثانية، والمختلط فيما يتعلق ب  $\xi$  و  $\eta$ ، مضروبة بمقاييس مختلفة.

جميع المعادلات الواردة أعلاه تمثل كل ما هو ضروري لتحويل المعادلات التي تحكم التدفق تم الحصول عليها في Chap. 2 مع  $(x, y, t)$  كمغيرات مستقلة ل  $\xi$ ،  $\eta$ ، و  $T$  كمغيرات

مستقلة جديدة. بوضوح ، عندما يتم هذا التحويل، والمعادلات التي تتغير حسب  $\xi$ ،  $\eta$ ، و  $T$  تصبح طويلة نوعا ما. دعونا ننظر في مثال بسيط، وهو التدفق غير اللزج، غير الدوراني، الثابت، و غير القابل للإنضغاط، حيث معادلة لابلاس هي المعادلة التي تحكم.

$$\text{Laplace's Equation : } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.16)$$

تحويل المعادلة. (6.16) من  $(x, y)$  إلى  $(\xi, \eta)$  ، حيث  $\xi(x, y) = \xi$  و  $\eta(x, y) = \eta$  بالاعتماد على Eqs. (6.9) و (6.13) :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \\ & + \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \\ & + 2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \partial \xi} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \\ & + \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Rearranging terms, we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \\ & + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right] \\ & + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

بعد مراجعة المعادلات Eqs. (6.16) and (6.17) ؛ معادلة لابلاس السابقة في الفضاء

الفيزيائي

، و الأخيرة هي معادلة لابلاس في الفضاء الحاسوبي  $(\xi, \eta)$ . تحتوي المعادلة بوضوح

العديد من الشروط.

ومرة أخرى نؤكد أن Eqs. (6.1), (6.2), (6.3), (6.5), (6.9), (6.13), و(6.15) تستخدم لتحويل المعادلات التي تحكم التدفق من التخطيط الفيزيائي  $(x, y)$  إلى التخطيط الحسابي  $(\xi, \eta)$  ، وأن الهدف من التحويل في معظم التطبيقات CFD هو تحويل شبكة غير موحدة في الحيز الفيزيائي (مثل كما هو مبين في Fig. 6.2a) إلى شبكة موحدة في الحيز الحسابي (مثل ما هو مبين في Fig. 6.2b). معادلات التحكم التفاضلية الجزئية المتحولة تكون محدودة-الفرق في التخطيط الحسابي، حيث توجد  $\Delta \xi$  متجانسة و  $\Delta \eta$  متجانسة، كما هو مبين في Fig. 6.2b. يتم احتساب متغيرات ميدان التدفق في جميع نقاط الشبكة في التخطيط الحاسوبي، مثل نقاط a, b, and c في Fig. 6.2(b). هذه هي نفس متغيرات مجال التدفق التي توجد في التخطيط الفيزيائي في نقاط المقابلة a, b, and c في Fig. 6.2(a). وبالنظر إلى التحويل الذي يحقق كل هذا في الشكل العام من قبل Eqs. (6.1a, b, and c). وبطبيعة الحال، لتنفيذ حل لمشكلة معينة، التحويلات تُعطى بشكل عام من قبل Eqs. (6.1a, b, and c) لذلك يجب تحديدها صراحة. سيتم إعطاء أمثلة لبعض التحويلات محددة في الأقسام اللاحقة.

### Metrics and Jacobians 6.3

Eqs. (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6), (6.7), (6.8), (6.9), (6.10), (6.11), (6.12), (6.13), (6.14), (6.15) والشروط التي تحوي هندسة الشبكات، مثل  $\partial\xi/\partial x$  ،  $\partial\xi/\partial y$  ،  $\partial\eta/\partial x$  ،  $\partial\eta/\partial y$  ، وما إلى ذلك، تُسما: المقاييس. إذا كان التحول، مُعطى (6.1a, b and c)، من الناحية التحليلية، يمكن الحصول على قيم تحليلية لهذه المقاييس .

ومع ذلك، في العديد من التطبيقات CFD ، (6.1a, b and c) ، تُعطى التحولات بشكل عددي، وبالتالي تُحسب المقاييس كما الفروق المحدودة.

أيضا، في العديد من التطبيقات، يُعبر عن التحولات بسهولة أكثر كمعكوس (6.1a, b)، وهذا قد يتيح لدينا التحول العكسي.

$$x = x(\xi, \eta, \tau) \quad (6.18a)$$

$$y = y(\xi, \eta, \tau) \quad (6.18b)$$

$$t = t(\tau) \quad (6.18c)$$

في (6.18a, b and c)،  $\xi$ ،  $\eta$  و  $\tau$  هي المتغيرات المستقلة. ومع ذلك، في التحويلات المشتقة التي قدمتها المعادلات (6.2)، (6.3)، (6.4)، (6.5)، (6.6)، (6.7)، (6.8)، (6.9)، (6.10)، (6.11)، (6.12)، (6.13)، (6.14)، and (6.15) وشروط المقاييس  $\partial\xi/\partial x$ ،  $\partial\eta/\partial y$ ، ما هي إلا مشتقات جزئية من حيث  $x$ ،  $y$  و  $t$  باعتبارها المتغيرات المستقلة. ولذلك، من أجل حساب شروط القياس في هذه المعادلات من التحول العكسي في (6.18a, b and c)، نحن في حاجة لربط  $\partial\xi/\partial x$ ،  $\partial\eta/\partial y$ ، وما إلى ذلك لعكس أشكال  $\partial\xi/\partial x$ ،  $\partial\eta/\partial y$ ، الخ. هذه الأشكال معكوس المقاييس هي القيم التي يمكن الحصول عليها مباشرة من التحول العكسي عبر (6.18a, b and c). دعونا نمضي قدما لإيجاد مثل هذه العلاقات.

النظر في المتغير التابع (المتصل) في المعادلات التي تحكم التدفق، مثل عنصر  $x$  من سرعة،  $u$ . حيث  $u(x, y) = u$ ، من المعادلة (6.18 a b) و  $x(\eta, \xi) = x$  و  $y(\eta, \xi) = y$ . التفاضل الكامل ل  $u$  هو:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (6.20)$$

المعادلاتان (6.20) و (6.21) يمكن أن ننظر إليهما باعتبارهما معادلتين لمجهولين اثنين  $\partial u/\partial x$  و  $\partial u/\partial y$ . حل نظام المعادلات (6.20) و (6.21) لل  $\partial u/\partial x$  باستخدام قاعدة كرامر Cramer، لدينا





$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}}$$

6.22

في المعادلة (6.22)، يتم التعرف على المحددات كمصفوفة جاكوبي *Jacobian determinant*، والتي نرمز لها بالتالي:

$$J \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

وُكُتِبَ المعادلةة (6.22) على الشكل التالي:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right]} \quad (6.23)$$

الآن دعونا نعود إلى Eqs. (6.20) و (6.21)، والحل ل  $\partial u / \partial y$ .

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{array} \right|}$$

or,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right] \right| \quad (6.24)$$

دراسة. Eqs. (6.23) and (6.24) التي تعبر عن المشتقات من متغيرات مجال التدفق

في البعد الفيزيائي من حيث المشتقات إلى متغيرات مجال التدفق في البعد الحاسوبي.

المعادلات (6.23) و (6.24) تنجز نفس التحويلات المشتقة كما قدمتها (6.2) Eqs.

و (6.3). لكن، Eqs. (6.2) و (6.3) حيث الشروط المترية هي  $\partial \xi / \partial x$ ،

$\partial \eta / \partial y$ ، الخ، و المعادلات الجديدة. (6.23) and (6.24) تحوي المقاييس المعكوسة،

$\partial x / \partial \xi$ ،  $\partial y / \partial \eta$ ، الخ ونلاحظ أيضا أن Eqs. (6.23) و (6.24) تشمل مصفوفه

جاكوبي Jacobian من التحول. لذلك، كلما كان لدينا تحول يعطى في شكل Eqs.

(6.18a, b and c)، و التي يمكنك من خلالها الحصول بسهولة على المقاييس في شكل

$\partial x / \partial \eta$ ، الخ، والتدفق الذي يحكم التحول يمكن التعبير عن معادلاته من حيث

هذه المقاييس العكسية ومصفوفه جاكوبي J.A، Jacobian ولكن مجموعة مماثلة و طويلة

أكثر من النتائج يمكن الحصول عليها في تحول ثلاثي الأبعاد من  $(x, y, z)$  إلى  $(\xi, \eta, \zeta)$ .  
استشارة المرجع. [1] لمزيد من التفاصيل. مناقشة اعلاه قد اقتضت عمدا إلى بعدين من أجل  
إظهار المبادئ الأساسية دون التبعثر النظر مع التفاصيل.

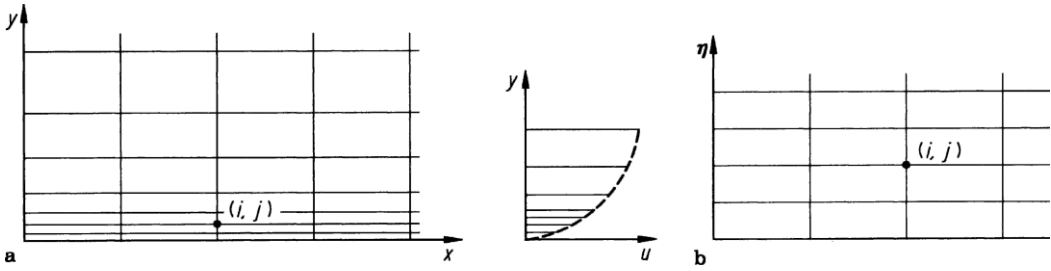
## Coordinate Stretching 6.4

في الأقسام الثلاثة المتبقية من هذا الفصل، سوف ندرس ثلاثة أنواع من تحويلات الشبكة. الأكثر بساطة مطروحة هنا. وهنا نطرح تمتد الشبكة في واحدة أو أكثر بالنسبة لاحتداثيات الاتجاهات.

على سبيل المثال، وبالإعتماد على التخطيط الفيزيائي والحسابي المبين في Fig. 6.3(a, b). لنفترض أننا نتعامل مع تدفق لزج على سطح مستو، حيث السرعة تتغير بشكل ملحوظ بالقرب من السطح كما هو موضح في ملف تعريف سرعة رسمت في التخطيط الفيزيائي ( Fig. 6.3a). لحساب تفاصيل هذا التدفق قرب السطح، نعتمد على شبكة متباعدة في الاتجاه  $y$ ، ينبغي أن تستخدم الشبكة، كما رسمت في التخطيط الفيزيائي. ومع ذلك، بعيدا عن السطح، يمكن للشبكة أن تكون أكثر قُربا .

لذلك، يجب أن تكون الشبكة المناسبة واحدة في أي تنسيق خطوط و تصبح تدريجيا متباعدة كلما اقتربنا من السطح. من ناحية أخرى، نحن نرغب في التعامل مع شبكة موحدة في التخطيط الحسابي، كما هو مبين في الشكل Fig. 6.3(b).

في الحقيقة نرى أن الشبكة في الحيز الفيزيائي قد "امتدت"، كما لو انها شبكة موحدة وضعت على قطعة من المطاط، وقد امتدت صعودا في الاتجاه  $y$ . تحول تحليلي بسيط قادر على أن ينفذ هذا التمدد في الشبكة.



**Fig. 6.3** Example of grid stretching. (a) Physical plane. (b) Computational plane

$$\xi = x \quad (6.25a)$$

$$\eta = \ln(y+1) \quad (6.25b)$$

التحول العكسي هو

$$x = \xi \quad (6.26a)$$

$$y = e^{\eta} - 1 \quad (6.26b)$$

المقاييس المعكوسة يتم الحصول عليها على النحو التالي:

6.22

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = e^{\eta} \quad (6.27)$$

في المعادلة (6.22)، يتم التعرف على محددات القاسم كمحدد مصفوفه جاكوبي *Jacobian*

*determinant*، المرموز لها بواسطة:  $J = e^{\eta}$

وبالتالي، المعادلة. (6.22) يمكن أن تكتب:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = e^\eta \quad (6.27)$$

دعونا ننظر في معادلة الاستمرارية، التي مهدت لهذه المعادلة. (2.27). لتدفق ثنائي الأبعاد:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (6.28)$$

المعادلة (6.27) هي معادلة الاستمرارية مكتوبة من حيث التخطيط الفيزيائي. هذه المعادلة يمكن

أن تتحول من قبل النتائج العامة التي قدمها (6.24) and (6.23) Eqs.، إلى

$$\frac{1}{J} \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial(\rho u)}{\partial \eta} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial(\rho v)}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right] = 0 \quad (6.29)$$

باستبدال المعادلة. (6.29) في المقاييس المعكوسة من المعادلة. (6.27):



$$e^{\eta} \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} = 0 \quad (6.30)$$

المعادلة (6.30) هي معادلة الاستمرارية في التخطيط الحاسوبي. كما يمكن الحصول عليها من التحول المباشر الذي قدمته Eqs. (6.25a and b). هنا، والمقاييس هي:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{y+1} \quad (6.31)$$

باستخدام التحولات التي قدمتها Eqs. (6.2) و (6.3)، تصبح المعادلة (6.28) كالتالي:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.32)$$

باستبدال المعادلة (6.32) في المقاييس في المعادلة (6.31)، يصبح لدينا:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \frac{1}{(y+1)} \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} = 0 \quad (6.33)$$

من المعادلة (6.26b)،  $y+1 = e^{\eta}$ . تصبح المعادلة (6.33):

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \frac{1}{e^{\eta}} \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} = 0$$

or

$$e^{\eta} \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} = 0 \quad (6.34)$$

المعادلة (6.34) مطابقة للمعادلة (6.30). كل ما قمنا به هنا هو شرح كيفية الحصول على المعادلات تحولت إما تحول المباشر أو تحول عكسي. النتائج هي نفسها. مثال على شبكة أكثر تعقيدا تتمدد، في كل من الاتجاهات  $X$  و  $y$ ، كما ورد في المرجعين [2، 3]. هنا، ندرس التدفق اللزج الأسرع من سرعة الصوت على قاعدة حادة. وتوضح التخطيطات الفيزيائية والحسابية في Fig. 6.4. أن التحكم بالسائل المتمدد ينجز من خلال تحويلات تستخدم من قبل هولست [4].

$$x = \frac{\xi_0}{A} [\sinh((\xi - x_0)\beta_x) + A]$$

where

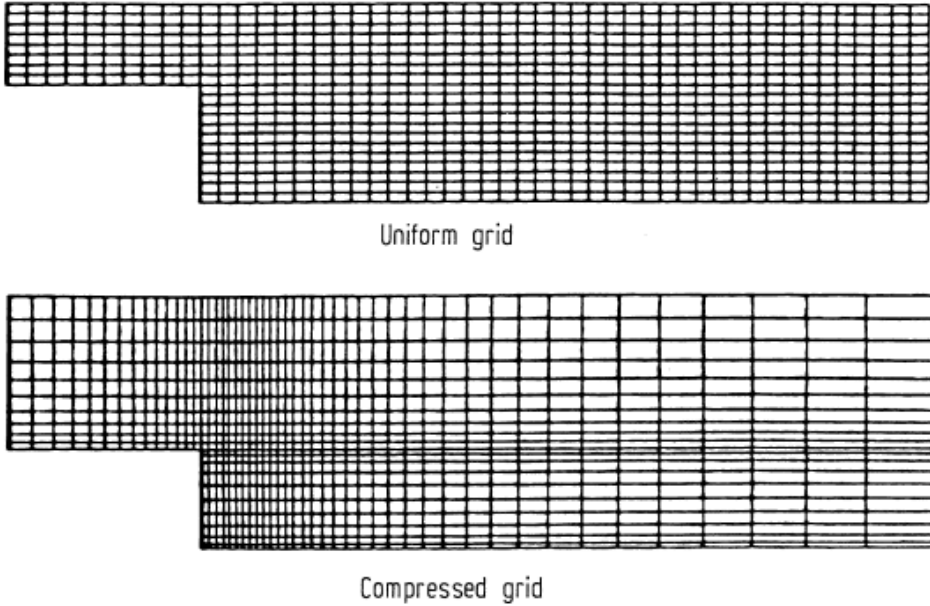
$$A = \sinh(\beta_x x_0)$$

and

$$x_0 = \frac{1}{2\beta_x} \ln \left[ \frac{1 + (e^{\beta_x} - 1)\xi_0}{1 + (e^{-\beta_x} - 1)\xi_0} \right]$$

حيث  $\xi_0$  هو الموقع في التخطيط الحسابي حيث الحد الأقصى للتشابك، و  $\beta_x$  هو الثابت الذي يسيطر على درجة من التشابك في  $\xi_0$ .

مع قيم أكبر من  $\beta_x$  نوفر شبكة دقيقة في المنطقة المتشابكة. ويتم إنجاز عرضية تمتد بقسمة التخطيط الفيزيائي إلى قسمين: (1) الحيز المباشر وراء هذه الخطوة، و (2) في الحيز التالي (سواء أمام وخلف) للخطوة. ويستند هذا التحول على تلك المستخدمة من قبل روبرتس [5] Roberts، وتعطى من خلال:



**Fig. 6.4** Comparison of uniform and compressed grid

$$y = \frac{(\beta_y + 1) - (\beta_y - 1)e^{-c(\eta-1-\alpha)/(1-\alpha)}}{(2\alpha + 1)(1 + e^{-c(\eta-1-\alpha)/(1-\alpha)})}$$

where

$$c = \log\left(\frac{\beta_y + 1}{\beta_y - 1}\right)$$

و  $\beta_y$  و  $\alpha$  الثوابت القابلة للاستخدام، وتختلف عن القسمين اللذين تم تحديدهما أعلاه. التحولات الجبرية الواردة أعلاه نتجت عن شبكة تمدد كما هو مبين في Fig. 6.4.

## Boundary-Fitted Coordinate Systems 6.5

الآن نعتبر أن التدفق يجري خلال قناة تتباعد كما هو مبين في Fig. 6.5(a). منحنى  $de$  هو الجدار العلوي من القناة، وخط  $fg$  هو خط المنتصف لهذا التدفق. الشبكة المستطيلة البسيطة في التخطيط الفيزيائي ليست مناسبة، للأسباب التي ذكرناها في المقطع 6.1 (Sect. 6.1) بدلا من ذلك، سنستخدم الشبكة المنحنية في Fig. 6.5(a) التي تسمح لكل من الحدود العليا و  $fg$  المنتصف أن تكون خطوط منسقة، بما يناسب بالضبط هذه الحدود. في المقابل، فإن شبكة الخطوط المنحنية في Fig. 6.5(a) يجب أن تتحول إلى شبكة مستطيلة في التخطيط الحاسوبي، Fig. 6.5(b). ويمكن تحقيق ذلك على النحو التالي. السماح  $(y = f(x))$  ليكون تنسيق من المساحة  $de$  العلوي في Fig. 6.5(a). ثم التحول التالي سوف يؤدي إلى شبكة مستطيلة في البعد  $(\xi, \eta)$ :

$$\xi = x$$

ما سبق هو مثال بسيط من الحدود المركبة على نظام الإحداثيات. ويرد مثال أكثر تطورا في Fig. 6.6، و وضع القضية موضع في Fig. 6.2.

لننظر في أمر الجنيح الوارد في Figure 6.6(a). نظام منحنى الأضلاع يلف حول الجنيح، حيث تنسيق الخط  $\eta = \eta_1 = \eta_2 = \eta$  ثابت على سطح الجنيح. هذه هي الحدود الداخلية للشبكة، المعروفة ب  $\Gamma_1$ . و الحدود الخارجية من الشبكة تعرف ب  $\Gamma_2$  في Figure 6.6(a)، وتُعطى بواسطة  $\eta = \eta_2 = \eta_1 = \eta$  ثابت على سطح الجنيح.

الخطوط المنتشرة على الحدود الداخلية  $\Gamma_1$  والتي تتقاطع و الحدود الخارجية  $\Gamma_2$  هي خطوط  $\xi$  الثابت، مثل خط  $ef$  ذو  $\xi = \xi_1 = \text{ثابت}$ . (لاحظ أن في Fig. 6.6(a) خطوط من  $\eta$  ثابتة ترافق الجنيح تماما، مثل الكثير من الدوائر الممدودة. وتسمى مثل هذه الشبكة '0'، صلة اخرة للشبكة المنحنية يمكن أن تكون  $\eta =$  خطوط ثابتة متابعة للمجرى إلى اليمين، و ليست مرفقة تماما بالجنيح (إلا على الحدود الداخلية  $\Gamma_1$ ). وتسمى مثل هذه الشبكة: الشبكة 'C'. سوف نرى مثالا على نوع الشبكة 'C' قريبا.)

السؤال: ما هو التحول الذي يمكن أن يلقي الشبكة المنحنية في Fig.6.6(a) في شبكة موحدة في التخطيط الحسابي كما في Fig.6.6(b)؟ للإجابة على هذا السؤال، لاحظ في Fig. 6.6(a) أن طول الحدود الداخلية  $\Gamma_1$ ، وتعرف الإحداثيات الفيزيائية للجسم:

$$(x, y) \text{ معروف على طول } \Gamma_1$$

وبالمثل، الإحداثيات الفيزيائية للحدود الخارجية  $\Gamma_2$  معروفة أيضا، لأن  $\Gamma_2$  هو مجرد حلقة تقريبية تم رسمها بشكل عشوائي حول الجنيح. مرة واحدة يتم تحديد هذه الحلقة  $\Gamma_2$ ، ثم الإحداثيات الفيزيائية تصبح معروفة على طول ذلك:

$$(x, y) \text{ معروفة على طول } \Gamma_2$$

هذا يلمح لوجود مشكلة في قيمة الحدود حيث نعرف الشروط الحدودية (وهي قيم  $x$  و  $y$ ) في كل مكان على طول الحدود. أذكر من Sect. 4.3.3 أن حل المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليلجية الشكل يتطلب مواصفات شروط الحدود في كل مكان على طول الحدود داخل المجال. لذلك، دعونا ننظر للتحول في Fig. 6.6 الذي تحده المعادلة التفاضلية الجزئية

الإهليلجية الشكل (على النقيض من علاقة جبرية كما هو موضح في المقطع 6.4 Sect.

6.4). واحد من أبسط المعادلات الإهليلجية الشكل هي معادلة لابلاس Laplace:

حيث لدينا شروط الحدود ديريتشليت Dirichlet

$$\Gamma_1 \text{ على } \eta = \eta_1 = \text{ثابت}$$

$$\Gamma_2 \text{ على } \eta = \eta_2 = \text{ثابت}$$

$$\xi = \xi(x, y) \text{ يتم تحديد على كلا } \Gamma_1 \text{ و } \Gamma_2$$

من المهم أن نأخذ في عين الاعتبار ما نقوم به هنا. المعادلات (6.35) (a and b) لا علاقة لها بفيزياء مجال التدفق شيئاً. هم ببساطة المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليلجية الشكل التي اخترناه لربط  $\xi$  و  $\eta$  ب  $x$  و  $y$ ، وبالتالي تشكل تحولا (المطابقة لواحدة واحدة من نقاط الشبكة) من التخطيط الفيزيائي إلى التخطيط الحاسوبي. لأنه هذا التحول يخضع للمعادلات الإهليلجية الشكل، هو مثال على الطبقة العامة من شبكة تسمى شبكة الجيل الإهليلجية الشكل. وقد استُخدمت شبكة الجيل الإهليلجية الشكل عمليا من قبل جو تومسون Joe Thompson في جامعة ولاية Mississippi، ووصفت بالتفصيل في المرجع [6].

دعونا نلقي نظرة عن كثب على التخطيط الفيزيائي والحاسوبي المبين في Fig. 6.6. من أجل بناء شبكة مستطيلة في التخطيط الحاسوبي (Fig. 6.6b)، يجب أن يتم خفض التخطيط الفيزيائي (Fig. 6.6a) على حافة زائدة من الجنيح. هذا الخفض يمكن تصوره كاثنين من

الخطوط المتراكبة على بعضها البعض: خط  $pq$  المرموز له بواسطة  $\Gamma_3$  يمثل خط الحدود للحيز الفيزيائي فوق  $pq$  ، وخط  $rs$  الذي نرسم اليه بواسطة  $\Gamma_4$  يمثل خط الحدود للحيز الفيزيائي دون  $rs$ . في التخطيط الفيزيائي، النقاط  $p$  و  $r$  هي نفس عينها، و  $q$  و  $s$  هما نفس النقطة. (في Fig. 6.6(a) نبعد قليلا عن الوضوح. ومع ذلك، في التخطيط الحاسوبي، هذه النقاط كلها مختلفة. في الواقع، يتم الحصول على الشبكة في التخطيط الحاسوبي عبر تفصيل للشبكة الفيزيائية في التقطيع، ثم "إزالة تغليف" الشبكة من الجنيح. على سبيل المثال، سطح الجنيح في التخطيط الفيزيائي، ومنحنى  $pgecar$ ، يصبح خط مستقيم أقل من الرمز بواسطة  $\Gamma_1$  في التخطيط الحاسوبي. وبالمثل، فإن الحدود الخارجية  $ghfdbs$  تصبح خط مستقيم علوي يرمز له بواسطة  $\Gamma_2$  في التخطيط الحاسوبي. يشكل الجانبين الأيمن والأيسر من المستطيل في التخطيط الحاسوبي قطع من التخطيط الفيزيائي؛ الجانب الأيسر هو خط  $rs$  يرمز اليه بواسطة  $\Gamma_4$  (في Fig. 6.6(b)) ، وعلى الجانب الأيمن هو خط  $pq$  يرمز اليه بواسطة  $\Gamma_3$  في Fig. 6.6(b). ويُرسم التخطيط الحاسوبي مرة أخرى في Fig. 6.7. نحن هنا نؤكد معرفة قيمة  $(x, y)$  على طول كل الحدود الأربعة،  $\Gamma_1$ ،  $\Gamma_2$ ،  $\Gamma_3$  و  $\Gamma_4$ . الجانب الرئيسي لمنهج شبكة الجيل الإهليلجية الشكل هو أنه، مع شروط الحدود يتم حل (Eqs. (6.35a and b) لقيمة  $(x, y)$  التي تنطبق على جميع النقاط الداخلية. وتعطى مثالا على مثل هذه النقاط الداخلية من خلال النقطة (A) في Fig. 6.7، والتي تتطابق مع نفس النقطة (A) في Figs. 6.6(a) and (b). في الواقع، حل المعادلات نعتمد على معكوس (Eqs. (6.35a and b))، وهذه المعادلات التي تم الحصول عليها من (Eqs. (6.35a and b)) تتبادل في المتغيرات التابعة والمستقلة. والنتيجة هي:

نلاحظ في (Eqs. (6.36a and b)) أن  $x$  و  $y$  يتم التعبير عنهم الآن كمتغيرات تابعة. نعودة مرة أخرى إلى (Fig. 6.7, Eqs. (6.36a and b)) نحل هذه المعادلة، بالموازاة مع شروط الحدود نظراً ل  $(x, y)$  على  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  و  $\Gamma_4$ ، للحصول على قيمة  $(x, y)$  التي تتوافق مع نقاط الشبكة المتباعدة بشكل موحد في التخطيط الحاسوبي  $(\xi, \eta)$ . وهكذا، فإن أي نقطة تقع في شبكة معينة في التخطيط الحاسوبي  $(\xi_i, \eta_j)$  تتوافق مع نقطة في شبكة حسابية في الحيز الفيزيائي  $(x_i, y_j)$ .

حل (Eqs. (6.36a and b)) أن يتم بحل هذه الفروق المحدودة المناسبة للمعادلات الإهليلجية الشكل. على سبيل المثال، تقنيات الاسترخاء مستعملة كثيراً لمثل هذه المعادلات. لاحظ أن التحول المذكور أعلاه، يستخدم المعادلة التفاضلية الجزئية الإهليلجية الشكل لتوليد الشبكة، لا تنطوي على تعابير تحليلية مغلقة في المعادلات التحليلية؛ بدلاً من ذلك، فإنها تنتج مجموعة من الأرقام والتي تحدد نقاط الشبكة  $(x_i, y_j)$  في الحيز الفيزيائي و التي تتوافق مع نقطة في شبكة معينة  $(\xi_i, \eta_j)$  في الحيز الحاسوبي. في المقابل، يتم الحصول على المقاييس في المعادلات التي تحكم التدفق (التي تحل في التخطيط الحاسوبي)، مثل  $\partial \xi / \partial x, \partial \eta / \partial y$ ، وما إلى ذلك من الفروق المحدودة. وكثيراً ما تستخدم العناصر المنتهية والمراكز المنتهية لهذا الغرض، فإن المنحني و نظام إحداثيات الحدود المركبة، المبيينين في (Fig. 6.6(a)) وتوضح ببساطة المعنى النوعي لأغراض وتعليمات معينة. في الحقيقة الشبكة المتولدة عن وجود الجنيح



باستخدام منهج شبكة الجيل الإهليلجية الشكل مبين أعلاه في Fig. 6.8، انظر المرجع. [7]. باستخدام مخطط شبكة الجيل طومسون Thompson (المرجع [6])، ([7]) التي ولدت نظام الإحداثيات في الحدود المجهزة حول جنين مايلي Miley. (وجنين مايلي Miley هو الجنين المصمم خصيصا لتطبيقات قاعدة عدد رينولدز Reynolds من قبل ستان مايلي Stan Miley في جامعة ولاية ميسيسيبي Mississippi). في Fig. 6.6 البقعة البيضاء في منتصف الشكل هي الجنين، والشبكة تنتشر بعيدا عن الجنين في كل الاتجاهات. في المرجع. [7] تدفقات قاعدة رقم رينولدز Reynolds على الجنيحات خلال الوقت تعتمد على حل الفروق المحدودة في معادلات الانضغاط لنافير ستوكس Navier-Stokes (وسنناقش مثل هذه الحلول المعتمدة على الزمن في Chap. 7). التيار الحر الذي هو دون سرعة الصوت، وبالتالي يجب وضع الحدود الخارجية بعيدا عن الجنين بسبب انتشارات بعيدة المدى من اضطرابات في تدفق دون سرعة الصوت. وترد التفاصيل من الشبكة في المحيط القريب من الجنين في Fig. 6.9. نلاحظ في كل من Figs. 6.8 and 6.9 أن نوع الشبكة هو "C"، على النقيض من نوع الشبكة '0' التي رسمت في Fig. 6.6. نوضع حد لهذا القسم من خلال التأكيد مرة أخرى على أن شبكة الجيل إهليلجية الشكل، مع حل لها من المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليلجية الشكل للحصول على نقاط الشبكة الداخلية، منفصل تماما عن حل الفروق المحدودة من المعادلات التي تحكمها.

أولا يتم إنشاء شبكة، قبل محاولة أي حل للمعادلات التي تحكمها. ثم استخدام معادلة لابلاس Laplace (المعادلة (6.35) a and b)) للحصول على هذه الشبكة، لا توجد أي

علاقة مع الجوانب الفيزيائية لمجال التدفق الفعلي. هنا، نستخدم معادلة لابلاس Laplace ببساطة لتوليد الشبكة فقط.

الآن نعتبر أن التدفق يجري خلال قناة تتباعد كما هو مبين في Fig. 6.5(a). منحنى  $de$  هو الجدار العلوي من القناة، وخط  $fg$  هو خط المنتصف لهذا التدفق. الشبكة المستطيلة البسيطة في التخطيط الفيزيائي ليست مناسبة، للأسباب التي ذكرناها في المقطع 6.1. (Sect. 6.1) بدلا من ذلك، سنستخدم الشبكة المنحنية في Fig. 6.5(a) التي تسمح لكل من الحدود العليا و  $fg$  المنتصف أن تكون خطوط منسقة، بما يناسب بالضبط هذه الحدود. في المقابل، فإن شبكة الخطوط المنحنية في Fig. 6.5(a) يجب أن تتحول إلى شبكة مستطيلة في التخطيط الحاسوبي، Fig. 6.5(b). ويمكن تحقيق ذلك على النحو التالي. السماح  $ys = f(x)$  ليكون تنسيق من المساحة  $de$  العلوي في Fig. 6.5(a). ثم التحول التالي سوف يؤدي إلى شبكة مستطيلة في البعد  $(\xi, \eta)$ :

$$\xi = x$$

$$\eta = y/ys \quad \text{where } ys = f(x)$$

ما سبق هو مثال بسيط من الحدود المركبة على نظام الإحداثيات. ويرد مثال أكثر تطورا في Fig. 6.6، و وضع القضية موضح في Fig. 6.2.

لننظر في أمر الجنيح الوارد في Figure 6.6(a). نظام منحنى الأضلاع يلف حول الجنيح، حيث تنسيق الخط  $\eta = \eta_1 = \eta = \text{ثابت}$  على سطح الجنيح. هذه هي الحدود الداخلية للشبكة، المعروفة ب  $\Gamma_1$ . و الحدود الخارجية من الشبكة تعرف ب  $\Gamma_2$  في Figure 6.6(a)، وتُعطى بواسطة  $\eta = \eta_2 = \eta = \text{ثابت}$  على سطح الجنيح.

الخطوط المنتشرة على الحدود الداخلية  $\Gamma_1$  والتي تقاطع و الحدود الخارجية  $\Gamma_2$  هي

خطوط  $\xi$  الثابت، مثل خط  $ef$  ذو  $\xi_1 = \xi = \text{ثابت}$ . (لاحظ أن في Fig. 6.6(a) خطوط من  $\eta$  ثابتة ترافق الجنيح تماما، مثل الكثير من الدوائر الممدودة. وتسمى مثل هذه الشبكة '0'، صلة اخرة للشبكة المنحنية يمكن أن تكون  $\eta =$  خطوط ثابتة متابعة للمجرى إلى اليمين، و ليست مرفقة تماما بالجنيح (إلا على الحدود الداخلية  $\Gamma_1$ ). وتسمى مثل هذه الشبكة: الشبكة 'C'. سوف نرى مثالا على نوع الشبكة 'C' قريبا.)

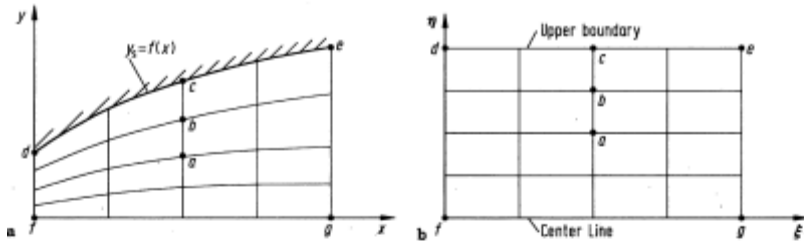
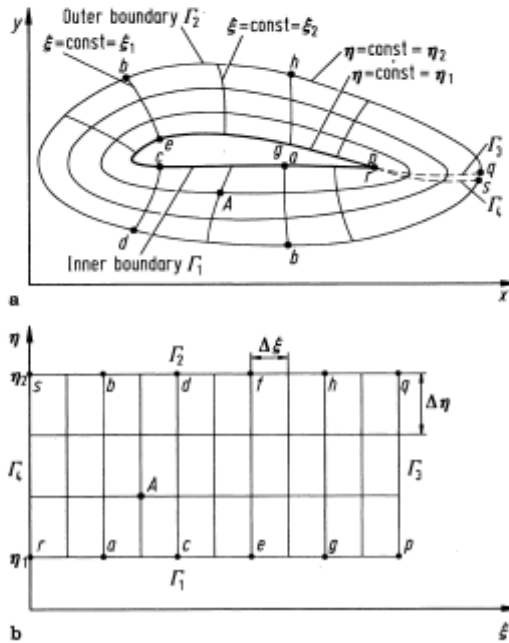


Fig. 6.5 A simple boundary-fitted coordinate system. (a) Physical plane. (b) Computational plane

6 Transformations and Grids

117

Fig. 6.6 (a) Physical plane.  
(b) Computational plane



السؤال: ما هو التحول الذي يمكن أن يلقي الشبكة المنحنية في Fig.6.6(a) في شبكة موحدة في التخطيط الحسابي كما في Fig.6.6(b)? للإجابة على هذا السؤال، لاحظ في

Fig. 6.6(a) أن طول الحدود الداخلية  $\Gamma_1$ ، وتعرف الإحداثيات الفيزيائية للجسم:

$$(X, Y) \text{ معروف على طول } \Gamma_1$$

وبالمثل، الإحداثيات الفيزيائية للحدود الخارجية  $\Gamma_2$  معروفة أيضا، لأن  $\Gamma_2$  هو مجرد حلقة تقريبية تم رسمها بشكل عشوائي حول الجنيح. مرة واحدة يتم تحديد هذه الحلقة  $\Gamma_2$ ، ثم الإحداثيات الفيزيائية تصبح معروفة على طول ذلك:

$$(X, Y) \text{ معروفة على طول } \Gamma_2$$

هذا يلزم لوجود مشكلة في قيمة الحدود حيث نعرف الشروط الحدودية (وهي قيم  $x$  و  $y$ ) في كل مكان على طول الحدود. أذكر من Sect. 4.3.3 أن حل المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليلجية الشكل يتطلب مواصفات شروط الحدود في كل مكان على طول الحدود داخل المجال. لذلك، دعونا ننظر للتحويل في Fig. 6.6 الذي تحدده المعادلة التفاضلية الجزئية الإهليلجية الشكل (على النقيض من علاقة جبرية كما هو موضح في المقطع 6.4 Sect. 6.4). واحد من أبسط المعادلات الإهليلجية الشكل هي معادلة لابلاس Laplace:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.35a)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \quad (6.35b)$$

حيث لدينا شروط الحدود ديريتشليت Dirichlet

$$\Gamma_1 \text{ على } \eta = \eta_1 = \text{ثابت}$$

$$\Gamma_2 \text{ على } \eta = \eta_2 = \text{ثابت}$$

و  $\xi = \xi(x, y)$  يتم تحديد على كلا  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$

من المهم أن نأخذ في عين الاعتبار ما نقوم به هنا. المعادلات (6.35a and b) لا علاقة لها بفيزياء مجال التدفق شيئاً. هم ببساطة المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليلجية الشكل التي اخترناه لربط  $\xi$  و  $\eta$  ب  $x$  و  $y$ ، وبالتالي تشكل تحولا (المطابقة لواحدة واحدة من نقاط الشبكة) من التخطيط الفيزيائي إلى التخطيط الحاسوبي. لأنه هذا التحول يخضع للمعادلات الإهليلجية الشكل، هو مثال على الطبقة العامة من شبكة تسمى شبكة الجليل الإهليلجية الشكل. وقد استُخدمت شبكة الجليل الإهليلجية الشكل عمليا من قبل جو تومسون Joe Thompson في جامعة ولاية Mississippi، ووصفت بالتفصيل في المرجع [6].

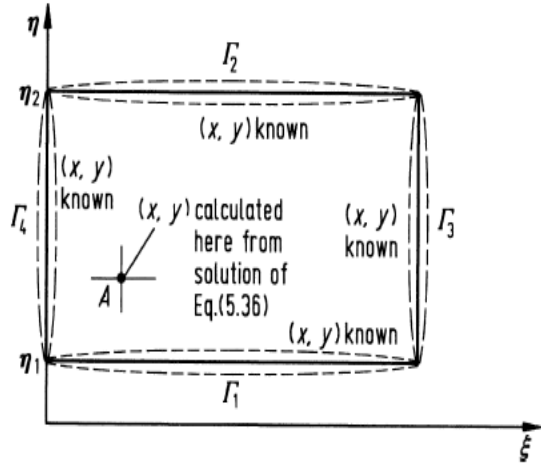
دعونا نلقي نظرة عن كثب على التخطيط الفيزيائي والحاسوبي المبين في Fig. 6.6. من أجل بناء شبكة مستطيلة في التخطيط الحاسوبي (Fig. 6.6b)، يجب أن يتم خفض

التخطيط الفيزيائي (Fig. 6.6a) على حافة زائدة من الجنيح. هذا الخفض يمكن تصوره كاثنين من الخطوط المتراكبة على بعضها البعض: خط  $pq$  المرموز له بواسطة  $\Gamma 3$  يمثل خط الحدود للحيز الفيزيائي فوق  $pq$ ، وخط  $rs$  الذي يرمز اليه بواسطة  $\Gamma 4$  يمثل خط الحدود للحيز الفيزيائي دون  $rs$ . في التخطيط الفيزيائي، النقاط  $p$  و  $r$  هي نفس عينها، و  $q$  و  $s$  هما نفس النقطة. في Fig. 6.6(a) نبعد قليلا عن الوضوح. ومع ذلك، في التخطيط الحاسوبي، هذه النقاط كلها مختلفة. في الواقع، يتم الحصول على الشبكة في التخطيط الحاسوبي عبر تفصيل للشبكة الفيزيائية في التقطيع، ثم "إزالة تغليف" الشبكة من الجنيح. على سبيل المثال، سطح الجنيح في التخطيط الفيزيائي، ومنحنى  $pq$  يصبح خط مستقيم أقل من الرمز بواسطة  $\Gamma 1$  في التخطيط الحاسوبي. وبالمثل، فإن الحدود الخارجية  $ghfdbs$  تصبح خط مستقيم علوي يرمز له بواسطة  $\Gamma 2$  في التخطيط الحاسوبي. يشكل الجانبين الأيمن والأيسر من المستطيل في التخطيط الحاسوبي قطع من التخطيط الفيزيائي؛ الجانب الأيسر هو خط  $rs$  يرمز اليه بواسطة  $\Gamma 4$  في Fig. 6.6(b)، وعلى الجانب الأيمن هو خط  $pq$  يرمز اليه بواسطة  $\Gamma 3$  في Fig. 6.6(b). ويُرسم التخطيط الحاسوبي مرة أخرى في Fig. 6.7. نحن هنا نؤكد معرفة قيمة  $(x, y)$  على طول كل الحدود الأربعة،  $\Gamma 1$ ،  $\Gamma 2$ ،  $\Gamma 3$  و  $\Gamma 4$ . الجانب الرئيسي لمنهج شبكة الجيل الإهليلجية الشكل هو أنه، مع شروط الحدود يتم حل Eqs. (6.35a and b) لقيمة  $(x, y)$  التي تنطبق على جميع النقاط الداخلية. وتعطى مثالا على مثل هذه النقاط الداخلية من خلال النقطة (A) في Fig. 6.7، والتي تتطابق مع نفس النقطة (A) في Figs. 6.6(a) and (b). في الواقع، لحل المعادلات نعتمد على معكوس Eqs. (6.35a and b)، وهذه المعادلات التي تم الحصول عليها من Eqs.



(6.35a and b) تتبادل في المتغيرات التابعة والمستقلة. والنتيجة هي:

Fig. 6.7 Computational plane, illustrating the boundary conditions and an internal point



$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \quad (6.36a)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (6.36b)$$

where

$$\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2$$

$$\beta = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)$$

$$\gamma = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2$$

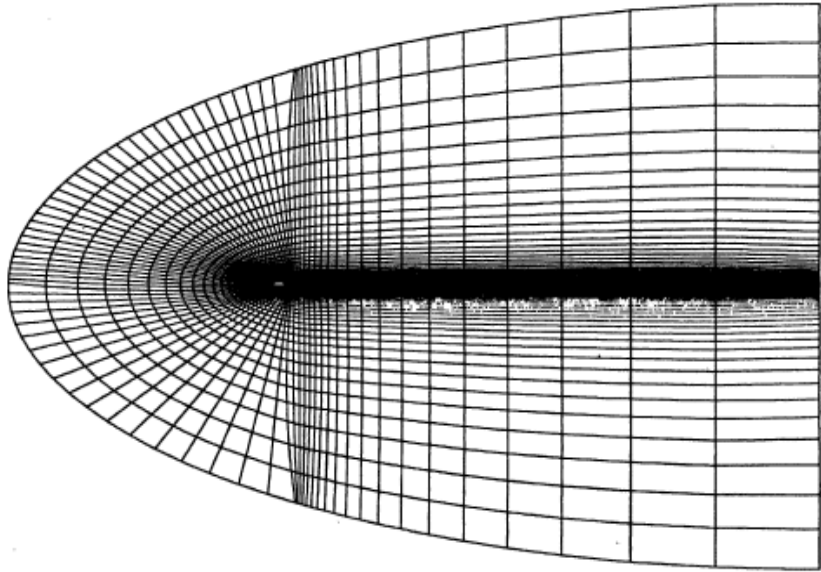
نلاحظ في Eqs. (6.36a and b) أن  $x$  و  $y$  يتم التعبير عنهم الآن كمتغيرات تابعة. نعود مرة أخرى إلى Fig. 6.7, Eqs. (6.36a and b) تحل هذه المعادلة، بالموازاة مع شروط الحدود نظراً لـ  $(x, y)$  على  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  و  $\Gamma_4$ ، للحصول على قيمة  $(x, y)$  التي تتوافق مع نقاط الشبكة المتباعدة بشكل موحد في التخطيط الحاسوبي  $(\xi, \eta)$ . وهكذا، فإن أي نقطة تقع في شبكة معينة في التخطيط الحاسوبي  $(\xi_i, \eta_j)$  تتوافق مع نقطة في شبكة حسابية في الحيز الفيزيائي  $(x_i, y_j)$ .

حل Eqs. (6.36a and b) أن يتم بحل هذه الفروق المحدودة المناسبة للمعادلات الإهليلجية الشكل. على سبيل المثال، تقنيات الاسترخاء مستعملة كثيراً لمثل هذه المعادلات. لاحظ أن التحول المذكور أعلاه، يستخدم المعادلة التفاضلية الجزئية الإهليلجية الشكل لتوليد الشبكة، لا تنطوي على تعابير تحليلية مغلقة في المعادلات التحليلية؛ بدلاً من ذلك، فإنها تنتج مجموعة من الأرقام والتي تحدد نقاط الشبكة  $(x_i, y_j)$  في الحيز الفيزيائي و التي تتوافق مع نقطة في شبكة معينة  $(\xi_i, \eta_j)$  في الحيز الحاسوبي. في المقابل، يتم الحصول على المقاييس في المعادلات التي تحكم التدفق (التي تحل في التخطيط الحاسوبي)، مثل  $\partial \xi / \partial x$ ،  $\partial \eta / \partial y$ ، وما إلى ذلك من الفروق المحدودة. وكثيراً ما تستخدم العناصر المنتهية والمراكز المنتهية لهذا الغرض، فإن المنحني و نظام إحداثيات الحدود المركبة، المبينين في Fig. 6.6(a) وتوضح ببساطة المعنى النوعي لأغراض وتعليمات معينة. في الحقيقة الشبكة المتولدة عن وجود الجنيح باستخدام منهج شبكة الجيل الإهليلجية الشكل مبين أعلاه في Fig. 6.8، انظر المرجع [7]. باستخدام مخطط شبكة الجيل طومسون

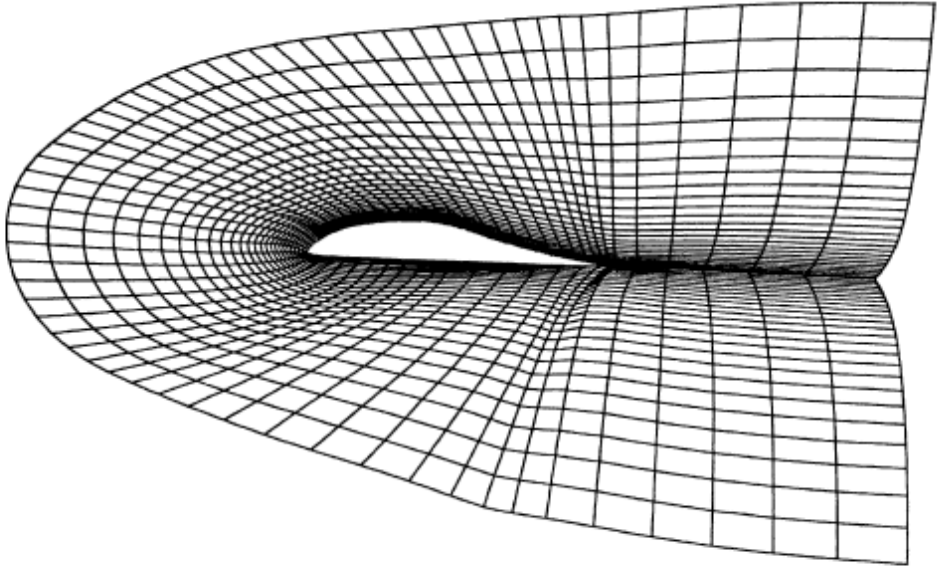
Thompson (المرجع [6])، ([7]) التي ولدت نظام الإحداثيات في الحدود المجهزة حول جنيح مايلي Miley. (وجنيح مايلي Miley هو الجنيح المصمم خصيصا لتطبيقات قاعدة عدد رينولدز Reynolds من قبل ستان مايلي Stan Miley في جامعة ولاية ميسيسيبي (Mississippi). في Fig. 6.6 البقعة البيضاء في منتصف الشكل هي الجنيح، والشبكة تنتشر بعيدا عن الجنيح في كل الاتجاهات.

في المرجع. [7] تدفقات قاعدة رقم رينولدز Reynolds على الجنيحات خلال الوقت تعتمد على حل الفروق المحدودة في معادلات الانضغاط لنافير ستوكس Navier-Stokes (وسنناقش مثل هذه الحلول المعتمدة على الزمن في Chap. 7). التيار الحر الذي هو دون سرعة الصوت، وبالتالي يجب وضع الحدود الخارجية بعيدا عن الجنيح بسبب انتشارات بعيدة المدى من اضطرابات في تدفق دون سرعة الصوت. وترد التفاصيل من الشبكة في المحيط القريب من الجنيح في Fig. 6.9. نلاحظ في كل من Figs. 6.8 and 6.9 أن نوع الشبكة هو "C"، على النقيض من نوع الشبكة '0' التي رسمت في Fig. 6.6. نوضع حد لهذا القسم من خلال التأكيد مرة أخرى على أن شبكة الجيل إهليلجية الشكل، مع حل لها من المعادلات التفاضلية الجزئية الإهليلجية الشكل للحصول على نقاط الشبكة الداخلية، منفصل تماما عن حل الفروق المحدودة من المعادلات التي تحكمها.

أولا يتم إنشاء شبكة، قبل محاولة أي حل للمعادلات التي تحكمها. ثم استخدام معادلة لابلاس Laplace (المعادلة (6.35a and b)) للحصول على هذه الشبكة، لا توجد اي علاقة مع الجوانب الفيزيائية لمجال التدفق الفعلي. هنا، نستخدم معادلة لابلاس Laplace ببساطة لتوليد الشبكة فقط.



**Fig. 6.8** Boundary fitted grid (from Ref. [7])



**Fig. 6.9** A detail of the boundary fitted grid (from Ref. [7])

## 6.6 Adaptive Grid

الشبكة التكيفية هي شبكة من الشبكات (network) حيث يُجمع نقاط الشبكة تلقائياً في مناطق ذات مجال تدفق عالي. الحل لخصائص حقل التدفق في نقاط الشبكة تكون في التخطيط الفيزيائي. شبكة التكيف تتطور مع الوقت بالتزامن مع وقت حل يعتمد على المعادلات التي تحكم مجال التدفق، والذي يحسب متغيرات مجال التدفق في مراحل من الوقت. أثناء الحل، حيث تكون نقاط الشبكة في التخطيط الفيزيائي في مثل هذه الحالة "للتكيف" مع المناطق ذات درجات التدفق العالي. وبالتالي، فإن نقاط الشبكة الفعلية في التخطيط الفيزيائي هي باستمرار في الحركة خلال إيجاد حل لمجال التدفق، وتصبح ثابتة فقط عندما يقترب التدفق إلى حالة مستقرة. وبالتالي، فخلافاً لشبكة الجيل

الإهليلجية الشكل المناقشة في المقطع 6.5 حيث الحل في جيل الشبكة منفصل تماما عن الحل في مجال التدفق، و الذي يرتبط بالشبكة التكيفية ارتباطا وثيقا مع حل حقل التدفق، الذي يتغير مع التغيرات في مجال التدفق. الهدف من مزايا وضع شبكة التكيف بجميع نقاط الشبكة في المناطق التي يتم فيها حدوث "العمل". هذه المزايا هي: (1) زيادة الدقة لعدد محدد من نقاط الشبكة، أو (2)، لدقة معينة، وهناك حاجة إلى نقاط أقل في الشبكة. شبكات التكيف لا تزال جديدة للغاية في CFD، سواء أنجزت هذه المزايا أم لا فهي غير راسخة. مثال بسيط على شبكة التكيف الذي استخدم من قبل كوردا Corda [8] من أجل حل تدفق لزج أسرع من الصوت. والتحول معرب عنه في شكل:

$$\Delta x = \frac{B\Delta\xi}{1 + b\frac{\partial g}{\partial x}}$$

$$\Delta y = \frac{C\Delta\eta}{1 + c\frac{\partial g}{\partial y}}$$

حيث  $g$  هو متغير حقل التدفق الأصلي، مثل  $p$ ,  $q$  أو  $T$ . إذا  $g = p$ ، اذا (6.37). Eqs. (6.38) and حيث مجموعة نقاط الشبكة تقع في مناطق ذات فروقات كبيرة في الضغط؛ إذا كانت  $T = g$  فإن نقاط الشبكة العنقودية تتمركز في مناطقات فروقات حرارية مرتفعة وهكذا دواليك. في (6.37) EQS. و (6.38)، يتم إصلاح  $\Delta\xi$  و  $\Delta\eta$ ، على شبكة

موحدة في التخطيط الحاسوبي  $(\xi, \eta)$ ، و  $b$  و  $c$  ثوابت مختارة لزيادة أو تقليل تأثير التدرج مع تغيير تباعد الشبكة في التخطيط الفيزيائي، و  $B$  و  $C$  و عوامل نطاق و  $\Delta x$  و  $\Delta y$  هي شبكة المباعدة الجديدة في التخطيط الفيزيائي. لأن  $\partial g/\partial x$  و  $\partial g/\partial y$  تتغير مع مرور الوقت خلال حل يعتمد على الوقت من مجال التدفق، فمن الواضح ان  $\Delta x$  و  $\Delta y$  تتغير مع الوقت، أي تتحرك نقاط الشبكة في الحيز الفيزيائي بشكل واضح، في مناطق تدفق حيث  $\partial g/\partial x$  و  $\partial g/\partial y$  كبيرة Eqs. (6.37) and (6.38) تسفر عن قيمة صغيرة من  $\Delta x$  و  $\Delta y$  ل  $\Delta \xi$  و  $\Delta \eta$  معين. هذه هي آلية مجموعات نقاط الشبكة. هذه هس آلية التعامل مع شبكة التكيف، وتتكون من التخطيط الحاسوبي من نقاط ثابتة في البعد  $(\xi, \eta)$ ؛ حيث يتم إصلاح هذه النقاط في الوقت المناسب، أي أنها لا تتحرك في البعد الحاسوبي. وعلاوة على ذلك،  $\Delta \xi$  موحدة، و  $\Delta \eta$  موحدة. وبالتالي، فإن التخطيط الحاسوبي هو نفسه كما ناقشنا في الأقسام السابقة.

تحل المعادلات التي تحكم التدفق في التخطيط الحاسوبي، حيث يتم تحويل المشتقات  $X, Y$  و  $t$  وفقاً ل Eqs. (6.2), (6.3) and (6.5). على وجه دراسة التحول الذي قدمته المعادلة. (6.5) لمشتقات الوقت. في حالة شبكات الضغوط أو الحدود المجهزة كما نوقش في (Sects. 6.4 and 6.5) على التوالي، وكانت مقاييس  $\partial \xi/\partial t$  و  $\partial \eta/\partial t$  صفر، والمعادلة. (6.5) تنتج  $\partial/\partial t = \partial/\partial \tau$ . لشبكة تكيفية،

and

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \equiv \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{x,y}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \equiv \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{x,y}$$

هذا محدود. لماذا؟ لأنه، على الرغم من أن نقاط الشبكة ثابتة في التخطيط الحاسوبي، إلا أنها تتحرك مع مرور الوقت في التخطيط الفيزيائي. المعنى الفيزيائي ل  $x, y$   $(\partial \xi / \partial t)$  هو معدل تغير  $\xi$  مع الوقت في  $(x, y)$  الموقع ثابت في التخطيط الفيزيائي. وبالمثل، فإن المعنى الفيزيائي ل  $x, y$   $(\partial \eta / \partial t)$  هو معدل تغير  $\eta$  مع الوقت في  $(x, y)$  الموقع ثابت في التخطيط الفيزيائي. تخيل أن عينيك تنظر نقطة ثابتة  $(x, y)$  في التخطيط الفيزيائي. بوصفها دالة من الزمن، قيمة  $\xi$  و  $\eta$  المرتبطة بثوابت نقطة  $(x, y)$  سوف تتغير. هذا هو السبب أن  $\partial \xi / \partial t$  و  $\partial \eta / \partial t$  محدودة. و بالتالي، عند التعامل مع معادلات التدفق التي تحولت في التخطيط الحاسوبي، جميع المصطلحات الثلاثة على الجانب الأيمن من المعادلة (6.5) تكون محدودة، ويجب تضمينها في المعادلات التحويلية. في هذا الشكل، مقياس الوقت  $\partial \xi / \partial t$  و  $\partial \eta / \partial t$  تأخذ تلقائياً بعين الاعتبار حركة شبكة التكيف خلال حل المعادلات التي تحكم التدفق.

قيمة مقياس الوقت في الشكل المبين في المعادلة (6.5) صعبة التقييم. من ناحية أخرى، فإن مقياس الوقت ذات الصلة:

$$\left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\xi, \eta} \quad \text{and} \quad \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{\xi, \eta}$$



هي أسهل بكثير للتقييم، لأنها تأتي من

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi,\eta} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (6.39)$$

and

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\xi,\eta} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (6.40)$$

حيث يتم الحصول على  $\Delta x$  و  $\Delta y$  مباشرة من صيغ التحويل الواردة في Eqs. (6.37) and (6.38) على التوالي. دعونا نعرثر على العلاقة بين

هاتين المجموعتين من مقاييس الزمن. انظر التالي

$$x = x(\xi, \eta, \tau)$$

Hence

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau} d\xi + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau} d\eta + \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta} d\tau$$

From this result, we write

$$\cancel{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{x,y}}^0 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta} \cancel{\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)_{x,y}}^1$$

or

$$-\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_{\xi,\eta} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{\eta,\tau} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{\xi,\tau} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{x,y} \quad (6.41)$$

ملاحظة نحن نضع السفلية على المشتقات الجزئية لتجنب أي التباس حول أي المتغيرات تبقى

ثابتة. الآن نرى:

$$y = y(\xi, \eta, \tau)$$

Hence:

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{\eta, \tau} d\xi + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{\xi, \tau} d\eta + \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} \right)_{\xi, \eta} d\tau$$

Thus, from this result we write

$$\left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x, y}^0 = \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{\eta, \tau} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{x, y} + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{\xi, \tau} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{x, y} + \left( \frac{\partial y}{\partial \tau} \right)_{\xi, \eta} \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} \right)_{x, y}$$

or

$$-\left( \frac{\partial y}{\partial \tau} \right)_{\xi, \eta} = \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{\eta, \tau} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{x, y} + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{\xi, \tau} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{x, y}$$

Solve Eqs. (6.41) and (6.42) for  $\left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{x, y}$

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{x, y} = \frac{\begin{vmatrix} -\left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)_{\xi, \eta} & \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)_{\xi, \tau} \\ -\left( \frac{\partial y}{\partial \tau} \right)_{\xi, \eta} & \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{\xi, \tau} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)_{\eta, \tau} & \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)_{\xi, \tau} \\ \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_{\eta, \tau} & \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_{\xi, \tau} \end{vmatrix}}$$

وإذا سلمنا بأن  $t = \tau$  ، وأن القاسم المشترك هو مصفوفه جاكوبي J

Jacobian، تصبح المعادلة أعلاه (باسقاط السفلية) كالتالي:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{J} \left[ - \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right]$$

حل لـ  $\left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{x,y}$  Eqs. (6.41) and (6.42)

نجده بالطريقة الأمثل:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) - \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right] \quad (6.44)$$

دعونا نستجمع الأفكار.

للحصول على شبكة التكيف، للمعادلات التي تحكم التدفق، سنحول الحل للتخطيط الحاسوبي  $(\xi, \eta)$ ، حيث من الواجب توافر كل الشروط لتحويل الوقت التي قدمتها المعادلة (6.5). بالنسبة لمقاييس الوقت،  $\partial \xi / \partial t$  و  $\partial \eta / \partial t$ ، في المعادلة (6.5) فإنه يمكن التعبير عنهم من حيث  $\partial x / \partial t$  و  $\partial y / \partial t$  من خلال Eqs. (6.43) and (6.44). هذه المقاييس الزمنية الجديدة يمكن بدورها أن تحسب بسهولة من خلال Eqs. (6.39) and (6.40)، حيث يتم إعطاء  $\Delta x$  و  $\Delta y$  قبل التحول الأساسي في Eqs. (6.37) and (6.38). ونعطي مثالا على شبكة التكيف لتدفق لزج أسرع من الصوت يتحرك باتجاه خلفي حسب Fig. 6.10، التي أُخذت من عمل كوردا [8]. التدفق هو من اليسار إلى اليمين. لاحظ أن الشبكة العنقودية تتشابك حول موجة التوسع من

الزاوية العليا وحول موجة الصدمة المرتكزة حول تيار التدفق. من المثير للاهتمام أن نلاحظ أن الشبكة التكيف في حد ذاتها هي نوع من "تصور طريقة تدفق الحقل" حيث تساعد على تحديد موقع الأمواج وفروقات أخرى في التدفق.

وكملاحظة أخيرة، هناك العديد من الأساليب المختلفة لتوليد شبكات التكيف. المناقشة الواردة أعلاه هي مجرد غيض من فيض؛ تقوم على الأفكار التي قدمها دواير Dwyer وآخرون. في المرجع. [9]. لمناقشة أكثر شمولية حول شبكات التكيف، و شبكة الجيل بشكل عام، انظر المرجع. [1].

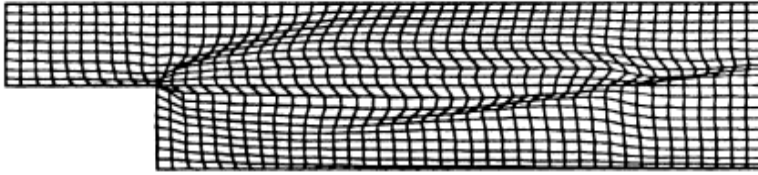


Fig. 6.10 Adapted grid for the rearward-facing step problem (from Corda, Ref. [8])

## References

1. Anderson, D.A., Tannehill, John C. and Pletcher, Richard H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1984.
2. Sullins, G.A., Anderson, J.D., Jr. and Drummond, J.P., 'Numerical Investigation of Supersonic Base Flow with Parallel Injection,' AIAA Paper No. 82-1001.
3. Sullins, G.A., Numerical Investigation of Supersonic Base Flow with Tangential Injection,  
M.S. Thesis, Department of Aerospace Engineering, University of Maryland, 1981.
4. Holst, T.L., 'Numerical Solution of Axisymmetric Boattail Fields with Plume Simulators,'  
AIAA Paper No. 77-224, 1977.
5. Roberts, B.O., 'Computational Meshes for Boundary Layer Problems,' *Lecture Notes in Physics*, Springer-Verlag, New York, 1971, pp. 171-177.
6. Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin, C.W., 'Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies,' *Journal of Computational Physics*, Vol. 15, pp. 299-319, 1974.
7. Wright, Andrew F., A Numerical Investigation of Low Reynolds Number Flow Over an Airfoil,  
M.S. Thesis, Department of Aerospace Engineering, University of Maryland, 1982.
8. Corda, Stephen, Numerical Investigation of the Laminar, Supersonic Flow

over a Rearward-

*Facing Step Using an Adaptive Grid Scheme*, M.S. Thesis, Department of Aerospace Engineering,

University of Maryland, 1982.

9. Dwyer, H.A., Kee, R.J. and Sanders, B.R., 'An Adaptive Grid Method for Problems in Fluid

Mechanics and Heat Transfer,' AIAA Paper No. 79-1464, 1979.

## 7 طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللانزج<sup>9</sup>

### 7.1 مدخل (Introduction)

في هذا الفصل نحن سنقوم بجولة شاملة حول ديناميكيات الموائع الحسابية (computational fluid dynamics) من خلال مناقشة بعض التطبيقات (applications) من طرق الفرق المحدودة الواضحة (explicit finite difference methods) لأمثلة مختارة لسريان (flows) غير لزج (inviscid) ولزج (viscous). هذه الأمثلة مأخوذة من النتائج التي حصل عليها J.D. Anderson, Jr. و طلابه. المقصود هو التوضيح ما يمكن القيام به من قبل الطلاب نوعاً ما مبتدئين غير متمكنين جيداً من أفكار لديناميكيات الموائع الحسابية (CFD).

وعلاوة على ذلك، في جميع الحالات يتم القيام بالتطبيقات (applications) مع برامج كمبيوتر (computer programs) مصممة تماماً ومكتوبة من قبل كل طالب. هذا وتتابع فكرة J.D. Anderson, Jr. التعليمية أن كل طالب يجب أن يكون لديه تجربة بدء من ورقة وقلم، بكتابة المعادلات الأساسية (governing equations) . وضع

---

<sup>9</sup> معظم هذه الفقرة من

[Wendt 2009], Ch. 7 (Author: Anderson jr.)

طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض

التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللالزج

الحل العددي (numerical solution) المناسب لهذه المعادلات، وكتابة برنامج (C program) ووضع البرنامج في الكمبيوتر، ومن ثم المرور بجميع التجارب والمحن لجعل البرنامج يعمل بشكل صحيح. هذا هو جانب هام من تعليم ديناميات الموائع الحاسوبية (CFD).

قبل أن نناقش بعض الأمثلة عن ذلك، من المهم أن نصف آلية (mechanism) حسابات الفرق المحدود الصريح (explicit finite-difference calculations)،. تم التمييز بين النهج الصريح (explicit) والضمني (implicit) في القسم 5.3، التي ينبغي أن يعاد النظر فيها قبل التقدم أكثر في هذا الفصل. في المقاطع القليلة المقبلة، سوف نقوم بوصف الطرق المعلنة (explicit methods) الشعبية و الواضحة نوعا ما. أما بالنسبة للطرق الضمنية (implicit methods) فلن تتم مناقشتها هنا.

وأخيرا، فإن الأمثلة التي تمت مناقشتها في هذا الفصل تتضمن كل طريقة تعتمد على الوقت، أي السير قدما في خطوات من الزمن (forward marching in steps of time dependent). الغالبية العظمى من الحلول التي تعتمد على الزمن (time dependent solutions) يكون هدفها حل حقل السريان الثابت الحالة (steady-state flow field) والتي تقترب من الحل عندما يكون الوقت كبيرا، وهنا، فإن الوقت هو مجرد وسيلة لتحقيق هذه الغاية.

في تطبيقات (applications) أخرى، يتم استخدام الطريقة التي تعتمد على الزمن لحساب العوابع الحالية (actual transients) في سريان متقلب (unsteady flow).



وهناك أمثلة من الاثنتين قد اعطيا هنا. نلاحظ، مع ذلك، أنه على الرغم من أن المقاطع التالية تعالج السير إلى الأمام (marching forward) بالنسبة للوقت (time)، يتم تطبيق نفس التقنيات (techniques) بسهولة لحساب السريان الثابت (steady flow) حيث يتم السير المكاني (spatial marching) على طول بعض محاور التنسيق (coordinate axis). لقد رأينا في الفصل 4 أن السير إلى الأمام (forward marching) من هذا القبيل (في الزمان أو المكان) هو مناسب عندما تكون المعادلات الأساسية (governing equations) قطعية (hyperbolic) او قطعية مكافئة (parabolic).

## 7.2 طريقة لأكس واندرروف (The Lax- Wendroff Method)

دعونا نصف هذه الطريقة من خلال النظر الى مشكلة بسيطة لديناميك الغاز (gas-dynamic problem)، وهي مشكلة سريان دون سرعة الصوت - الأسرع من الصوت من خلال فوهة متقاربة- متباعدة (subsonic-supersonic isentropic flow through a convergent-divergent nozzle)، كما هو واضح في الشكل. 7.1. هنا، من فوهة توزيع منطقة محددة،  $A=A(x)$ ، يكون مُعطى، و تكون ظروف الخزان (reservoir conditions) معروفة. دعونا ننظر الى حل شبه أحادي البعد (quasi-one-dimensional)، حيث متغيرات (variables) مجال السريان (flow field) مرتبطة (functions) ب  $x$  (في حالة ثابتة) steady state)). للحصول على غاز (gas) مثالي بالنسبة للوحدات الحرارية

طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض

التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللالزج

(calorically)، والحل لهذا السريان (flow) هو كلاسيكي (classical)، ويمكن العثور عليه في أي نص كتاب جريان قابل للانضغاط (compressible flow) (انظر على سبيل المثال المرجع. [1، 2]). نستخدم هذا المثال هنا فقط لأنه وسيلة ممتازة لتعريف ووصف فلسفة الاختلاف المحدودة المعتمدة على وقت (time-dependent finite-difference philosophy).

تنقسم الفوهة (nozzle) إلى عدد من نقاط الشبكة (grid points) في اتجاه (direction)  $x$ ، كما هو مبين في الشكل 7.1، والتباعد (spacing) بين نقاط الشبكة المتجاورة هو  $\Delta x$ . لنفترض الآن قيم (values) متغيرات (variables) مجال السريان (flow field) في جميع نقاط الشبكة، والنظر في هذا السريان (flow) بصورة عشوائية (arbitrarily) بل يفترض كشرط (condition) أولي في الزمن  $t = 0$  بشكل عام، فإن هذه القيم لا يفترض أن تكون على وجه الدقة حالة استقرار (steady-state) للنتائج (steady-state results)، بل على وجه الدقة حالة استقرار النتائج (steady-state results) هي ما نسعى لحسابها.

لنعتبر نقاط الشبكة (grid point)، ونعتبر النقطة  $i$ . و نترك  $g_i$  دلالة على متغير مجال السريان (flow field variable) عند هذه النقطة ( $g_i$  قد تكون الضغط (pressure)، الكثافة (density)، السرعة (velocity)، وغيرها). هذا المتغير  $g_i$  سوف يكون دالة الزمن (function of time)، ومع ذلك، ونحن نعلم  $g_i$

في الوقت  $t = 0$  ، أي أننا نعرف  $g_i(0)$  لأننا نفترض القيم لجميع متغيرات مجال السريان (flow field variables) في جميع النقاط في الوقت الاولي ( the )  
 $t = 0$  (initial time

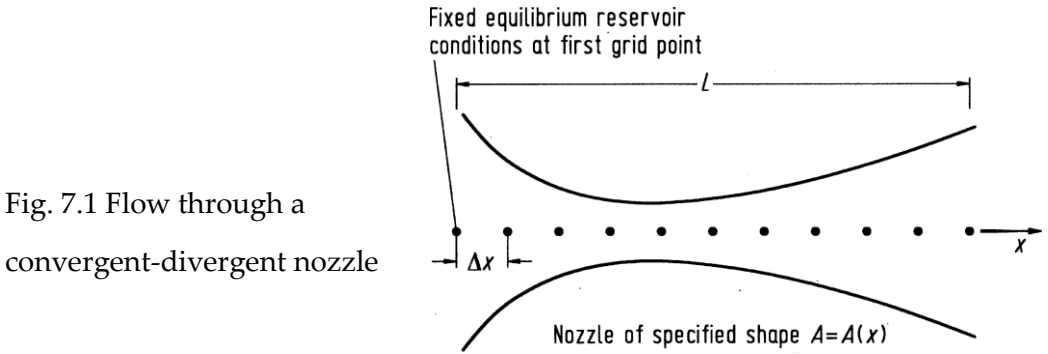


Fig. 7.1 Flow through a convergent-divergent nozzle

الشكل 7.1: السريان من خلال فوهة متقاربة-متباعدة

نحن نحسب الآن قيمة جديدة من  $g_i$  في وقت  $t + \Delta t$  ، وانطلاقاً من الشروط الأولية (initial conditions) ، في المرات الأولى الجديدة  $t + \Delta t = 0 + \Delta t$  . هنا،  $\Delta t$  هو زيادة صغيرة في الوقت لمناقشتها في وقت لاحق. يتم الحصول على قيمة جديدة ( new value ) من  $g_i$  ، أي  $g_i(t + \Delta t)$  ، من توسيع سلسلة تايلور ( Taylor's series expansion ) في الوقت مع مرور الوقت كما:

$$g_i(t + \Delta t) = g_i(t) + \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)_i \Delta t + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right)_i \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots$$

طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض

التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللانزج

أو، باستخدام ترميز موحد بالنسبة للوقت باعتبارها مرتفع

$$g_i^{t+\Delta t} = g_i^t + \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)_i \Delta t + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right)_i \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots \quad (7.1)$$

هنا  $g_i^{t+\Delta t}$  هي قيمة  $g$  في النقطة  $i$  من الشبكة في وقت  $t + \Delta t$ ;  $(\partial g / \partial t)_i^t$  هو الأول من جزئية  $g$  تقييما في النقطة  $i$  من الشبكة في الزمن  $t$ ، وما إلى ذلك في المعادلة (7.1)، وتصح  $g_i^t$  معروفة و  $\Delta t$  محددة. لذلك، يمكننا استخدام المعادلة (7.1) لحساب  $g_i^{t+\Delta t}$

لحساب  $g_i^{t+\Delta t}$  إذا كان لنا أن يكون بين أرقام مشتقات  $(\partial g / \partial t)_i^{t+\Delta t}$  فإنه و  $(\partial^2 g / \partial t^2)_i^{t+\Delta t}$  فإنه يتم الحصول على أرقام مشتقات بذلك من فيزياء التدفق كما وردت في المعادلات التي تحكم التدفق. (ملاحظة أن المعادلة (7.1) هي ببساطة رياضيات، والتي في حد ذاتها بالتأكيد ليست كافية لحل المشكلة) والمعادلات التي تحكم التدفق لتدفق شبه أحادي الأبعاد من خلال فوهة هي (14):

$$\text{Continuity : } \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} \quad (7.2)$$

$$\text{Momentum : } \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (7.3)$$

$$\text{Energy : } \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left[ p \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial(1nA)}{\partial x} + \rho u \frac{\partial e}{\partial x} \right] \quad (7.4)$$

ملاحظة المعادلات. (7.3)، (7.2) و (7.4) المكتوبة مع مشتقات الوقت على الجانب الأيسر، والمشتقات المكانية على الجانب الأيمن. ل هذه اللحظة، دعونا نحسب الكثافة، أي  $g \equiv \rho$ ، ودعونا نل نظر فقط للمعادلة الاستمرارية، المعادلة. (7.2). توسيع الجانب الأيمن من المعادلة. (7.2)، نحصل على

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{A} \rho u \frac{\partial A}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.5)$$

في وقت  $t=0$ ، نفترض المتغيرات مجال تدفق، ومن هنا يمكننا استبدال المشتقات مع وجود اختلافات المكانية المركزية:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t = -\frac{1}{A} \rho_i^t u_i^t \left(\frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2\Delta x}\right) - u_i^t \left(\frac{\rho_{i+1}^t - \rho_{i-1}^t}{2\Delta x}\right) - \rho_i^t \left(\frac{u_{i+1}^t - u_{i-1}^t}{2\Delta x}\right) \quad (7.6)$$

المعادلة (7.6) تعطينا الرقم  $(\partial \rho / \partial t)_i^t$ ، والذي يتم إدراجه في المعادلة. (7.1)، ولكن لإكمال المعادلة. (7.1)، نحن بحاجة الى عدد الجزئية الثانية أيضا، وهو  $(\partial^2 \rho / \partial t^2)_i^t$ . للحصول على هذا، تفرق معادلة الاستمرارية، (7.5). Eq.، فيما يتعلق بالوقت:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{1}{A} \left[ \frac{\partial A}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \right] - u \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial t} - \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (7.7)$$

أيضا، تفرق المعادلة الاستمرارية، المعادلة. (7.5)، بالنسبة ل  $x$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{A} \left[ \rho u \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right] - u \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (7.8)$$

طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض

التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللالزج

يعمل هذا الإجراء الآن على النحو التالي:

(1) في المعادلة (7.8)، يستعاض عن المشتقات على الجانب الأيمن مع وجود اختلافات

المركزية، مثل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^t - u_{i-1}^t}{2\Delta x}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^t - 2u_i^t + u_{i-1}^t}{(\Delta x)^2}$$

etc.

هذا يوفر الآن عدد ل  $(\partial^2 q / \partial t \partial x)_i$  من المعادلة (7.8).

(2) تدرج هذا العدد ل  $(\partial^2 q / \partial t \partial x)_i$  في المعادلة (7.7). كما في المعادلة (7.7)، وأرقام

ل  $\partial u / \partial t$  و  $\partial^2 u / \partial x \partial t$  يتم الحصول على معادلة الزخم عبر علاج المعادلة (7.3)، على نحو

كان يعالج بالضبط نفس معادلة الاستمرارية أعلاه. لن تعطى تفاصيل هنا في المعادلة.

(7.7)، لعدد  $(\partial q / \partial t)$  متاحة بالفعل، وهما من المعادلة (7.6). والنتيجة الصافية هي أن لدينا

الآن عدد ل  $(\partial^2 q / \partial t^2)_i$ ، التي تم الحصول عليها من المعادلة (7.7).

(3) تضاف لهذا العدد ل  $(\partial^2 q / \partial t^2)_i$  المعادلة (7.1) تذكر أن  $g \equiv q$  لهذه القضية.

(4) لإدراج رقم ل  $(\partial q / \partial t)_i$ ، التي تم الحصول عليها من المعادلة (7.6)، في المعادلة (7.1).

(5) كل كمية على الجانب الأيمن من المعادلة (7.1) ومن المعروف الآن. هذا يسمح

بحساب الكثافة  $q_{i+t\Delta t}$  من المعادلة (7.1). هذا هو في الواقع ما كنا نريده. والآن لدينا

كثافة في النقطة  $i$  من الشبكة في الخطوة التالية في الوقت المناسب،  $t+\Delta t$ .

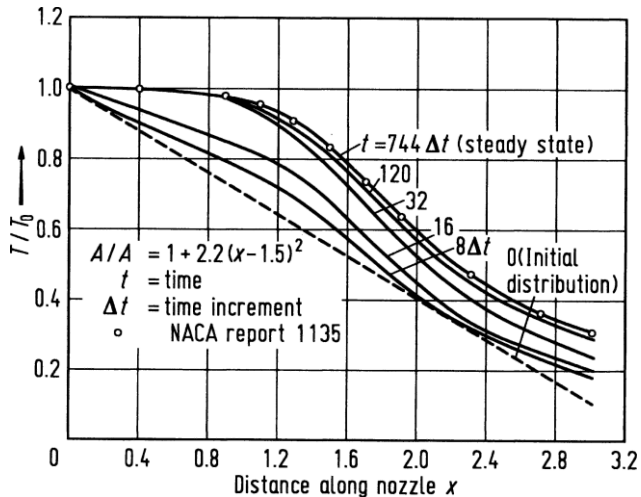
(6) نفذ الإجراء أعلاه عند كل نقطة في الشبكة للحصول على  $\rho(t + \Delta t)$  في كل مكان في جميع أنحاء الفوهة.

(7) تنفيذ الإجراءات المذكورة أعلاه على معادلات الزخم والطاقة للحصول على  $u(t + \Delta t)$  and  $e(t + \Delta t)$  في كل مكان في جميع أنحاء الفوهة. لدينا الآن مجرى السريان كاملة في وقت  $(t + \Delta t)$ ، تم الحصول عليها من معرفة مجرى السريان في الزمن  $t$ . (تذكر أن يتم بدء العملية في  $t = 0$  مع الظروف الأولية المفترضة).

(8) كرر العملية المذكورة أعلاه بالنسبة لعدد كبير من خطوات الزمن. في كل خطوة زمنية، فإن خصائص التدفق في جميع نقاط الشبكة تتغير من وقت لآخر، في فترات زمنية طويلة، هذه التغيرات تصبح صغيرة جداً، ويتم التعامل مع حالة مستقرة. هذه الحالة المستقرة هي النتيجة المرجوة، وهذه التقنية المعتمدة على الزمن هو مجرد وسيلة لتحقيق هذه الغاية.

Fig. 7.2 Transient and final steady-state temperature distributions for a calorically perfect gas obtained from the present time dependent analysis,  $\gamma = 1.4$

Fig. 7.2 الحالة العابرة و الحالة النهائية المستقرة لتوزيعات درجة الحرارة للغاز بالوحدات الحرارية المثالية لذلك في الوقت الحالي يتم الحصول عليها ،  $\gamma = 1.4$



طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض

التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللابلزج

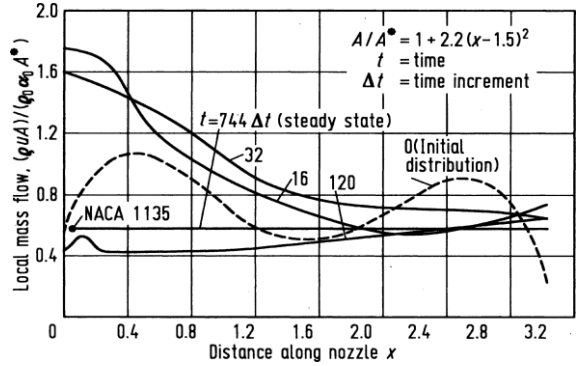
ويتضح من سلوك هذا النوع من الحل في Figs. 7.2 and 7.3 في الشكل 7.2، يظهر من خلال توزيع درجات الحرارة لفوهة معينة. خط متقطع المسمى  $t = 0$  هو القيم يفترض في البداية ل  $T$  في جميع أنحاء الفوهة. منحنى فوقه المسمى  $8\Delta t$  هو توزيع درجات الحرارة بعد خطوة الوقت الثامنة في أعقاب الإجراء أعلاه. منحنيات المسمى  $16\Delta t$  and  $32\Delta t$  هي نتائج ماثلة بعد خطوات الوقت 16 and 32 على التوالي. نلاحظ أن توزيع درجات الحرارة قد تغير بسرعة في التوزيع الأولي يفترض في  $t = 0$ . في أوقات لاحقة، التغييرات تصبح أصغر؛ لاحظ أن منحنى  $120\Delta t$  المسمى لا تختلف كثيرا عن  $32\Delta t$ . أخيرا، وبعد 744 خطوة وقت، التغييرات تصبح صغيرة جدا لدرجة أن توزيع درجات الحرارة بشكل أساسي في حالة مستقرة. والمطلوب هذه الحالة المستقرة للحل. نلاحظ أن الحالة الثابتة التي تم الحصول عليها عدديا، تتفق تماما مع النتائج الكلاسيكية، ويمكن الحصول عليها من المراجع [1 و 3]، ومن المرجع [4]. الشكل 7.3 يوضح الاختلاف في تدفق الشامل،  $\dot{m}$ ، من خلال الفوهة. الخط المتقطع هو  $\dot{m}$  بما يتفق مع ظروف الأولية يفترض في  $t = 0$  منحنيات. المسمى  $16\Delta t$  and  $32\Delta t$  تثبت بوضوح الاختلافات غير المنتظمة في  $\dot{m}$  في أوقات مبكرة.

Fig. 7.3 Transient and final steady-state mass-flow distributions for a calorically perfect gas obtained from the present time-dependent analysis,  $\gamma = 1.4$



Fig. 7.3 الحالة العابر و الحالة النهائية

المستقرة لتوزيعات درجة الحرارة للغاز  
بالوحدات الحرارية المثالية لذلك في الوقت  
الحالي يتم الحصول عليها ،  $\gamma = 1.4$



ومع ذلك، بعد 120 خطوة زمنية م<sup>3</sup> أصبحت أكثر استقرارا ، وبعد 744 خطوة زمنية قد وصلت إلى حالة مستقرة. هذا التوزيع للحالة المستقرة م<sup>3</sup> هي على التوالي، خط أفقي، كما ينبغي أن يكون لتدفق مستمر، حيث  $m = \text{constant}$  من خلال الفجوة، هو القيمة الصحيحة من التدفق الشامل، بالمقارنة مع النتائج من المرجع. [4]. وصف الأسلوب أعلاه، وذلك باستخدام المعادلة (7.1)، والذي هو أول ثلاثة شروط لتوسيع سلسلة تايلور Taylor's series، وحيث كل من المشتقات الجزئية الأولى والثانية في المعادلة (7.1) يتم العثور عليها من خلال الفروق المحدودة، في المشتقات المكانية في المعادلات التي تحكم التدفق مع وجود اختلافات مركزية، يتم استدعاء أسلوب Lax-Wendroff. لاحظ أن هذه الطريقة من الدرجة الثانية من الدقة، من المعادلة (7.1). كان يعمل هذا الأسلوب بكثير من النجاح في أواخر 1960 حتى قدمت نسخة أكثر تطور في نفس الفكرة من قبل ماكورماك MacCormack في عام 1969. هذا هو موضوع الجزء التالي. لمزيد من المعلومات حول أسلوب Lax-Wendroff كما ينطبق على مشكلة فوهة، انظر الحكام. [5,6].

### 7.3 MacCormack's Method

طريقة ماكورماك (MacCormack's method)، وقدمت للمرة الأولى في عام 1969 (انظر المرجع [7])، كانت طريقة الفروق المحدودة الصريحة، الأكثر شعبية بالنسبة لحل تدفقات السوائل. وترتبط ارتباطاً وثيقاً بطريقة Lax-Wendroff، ولكن هي أسهل للتطبيق. دعونا نستخدم نفس المشكلة الفوهة المناقشة في المقطع 7.2 لتوضيح طريقة ماكورماك MacCormack's method في هذا الباب. طريقة ماكورماك، على غرار طريقة Lax-Wendroff، وتستند على توسع سلسلة تايلور Taylor's series في الوقت المناسب. ومرة أخرى، كما هو الحال في الطائفة 7.2، دعونا النظر في كثافة عند النقطة  $i$ .

$$\rho_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{ave}} \Delta t \quad (7.9)$$

المعادلة (7.9) هي اقتطاع سلسلة تايلور (Taylor's series)، والذي يبدو من الدرجة الأولى دقيق. ومع ذلك،  $(\partial \rho / \partial t)_{\text{ave}}$  هو مشتق متوسط الوقت الذي يستغرقه بين الزمن  $t$  و  $t + \Delta t$ . يتم تقييم هذا المشتق في مثل هذه الحالة عبر حساب  $\rho_i^{t+\Delta t}$  ذلك من المعادلة (7.9) يصبح من الدرجة الثانية دقيقة.

متوسط مشتق الوقت في المعادلة. (7.9) يتم تقييم من فلسفة التنبؤ والتصحيح كما توابع الخطوات المتنبأة. نكرر معادلة الاستمرارية، المعادلة. (7.5) أدناه:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{A} \rho u \frac{\partial A}{\partial x} - u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.5 \text{ repeated})$$

في المعادلة. (7.5)، حساب المشتقات المكانية من القيم المعروفة لمجال التدفق في الزمن t باستخدام الاختلافات إلى الأمام. وهذا هو، من المعادلة. (7.5)،

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t = -\frac{1}{A} \left[ \rho_i^t u_i^t \left( \frac{A_{i+1} - A_i}{\Delta x} \right) \right] - u_i^t \left( \frac{\rho_{i+1}^t - \rho_i^t}{\Delta x} \right) - \rho_i^t \left( \frac{u_{i+1}^t - u_i^t}{\Delta x} \right) \quad (7.10)$$

الحصول على القيمة المتوقعة للكثافة،  $\rho_i^{t+\Delta t^-}$ ، من حيث التعبيرين الأولين من سلسلة لتايلور Taylor's series، على النحو التالي

$$\bar{\rho}_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t \Delta t \quad (7.11)$$

في المعادلة. (7.11)،  $\rho_i^t$ ، معروفة، و  $(\partial \rho / \partial t)_i^t$  هو العدد المعروف من المعادلة. (7.10)؛

وبالتالي، يتم الحصول على  $\rho_i^{t+\Delta t}$  بسهولة. بطريقة مماثلة، في معادلات الزخم والطاقة، وتوقع قيمة المتغيرات تدفق أخرى مثل  $u_i^{t+\Delta t}$ ،  $e_i^{t+\Delta t}$ ، الخ نحصل عليها.

خطوة مصححة هنا، نحن أولاً نحصل على القيمة المتوقعة لمشتقات الوقت،  $(\partial \rho / \partial t)_i^{t+\Delta t}$ ، عن طريق استبدال القيم المتوقعة ل  $\rho_i^{t+\Delta t}$ ،  $u_i^{t+\Delta t}$ ، وما إلى ذلك في المعادلة. 7.5، وذلك باستخدام الخلافات المؤخرة.

$$\overline{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)}_i^{t+\Delta t} = -\frac{1}{A} \bar{\rho}_i^{t+\Delta t} \bar{u}_i^{t+\Delta t} \left( \frac{A_i - A_{i-1}}{\Delta x} \right) - \bar{u}_i^{t+\Delta t} \left( \frac{\bar{\rho}_i^{t+\Delta t} - \bar{\rho}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) - \bar{\rho}_i^{t+\Delta t} \left( \frac{\bar{u}_i^{t+\Delta t} - \bar{u}_{i-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) \quad (7.12)$$

طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض

التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللزج

الآن احسب متوسط مشتق الوقت الحسابي بين (7.10) and (7.12) Eqs، أي

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\text{ave}} = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^t + \overline{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t}} \right] \quad (7.13)$$

حيث أرقام للمصطلحين على الجانب الأيمن من المعادلة. (7.13) تأتي من (7.10) and (7.12) على التوالي. وأخيرا، فإننا حصول على قيمة تصحيح ل  $\rho_i^{t+\Delta t}$  من المعادلة (7.9)، وكرر أدناه:

$$\rho_i^{t+\Delta t} = \rho_i^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\text{ave}} \Delta t \quad (7.9 \text{ repeated})$$

يتم تنفيذ نهج التنبؤ والتصحيح أعلاه بالنسبة لجميع نقاط الشبكة في جميع أنحاء الفوهة، ويطبق في الوقت نفسه على معادلات الزخم والطاقة من أجل توليد  $u_i^{t+\Delta t}$  و  $e_i^{t+\Delta t}$ . في هذا المجال، مجال التدفق من خلال فوهة كامل في الزمن  $t + \Delta t$  يتم احتسابها. ويتكرر هذا بالنسبة لعدد كبير من خطوات الوقت حتى يتم تحقيق حالة مستقرة، تماما كما هو الحال بالنسبة للطريقة Lax-Wendroff وصفها في الطائفة. 7.2.

تقنية ماكورماك MacCormack's technique كما هو مذكور أعلاه، لأنه يستخدم من خطوتين تسلسل التنبؤ والتصحيح مع وجود اختلافات الأمام على التنبؤ والخلافات المؤخرة على مصحح، هو وسيلة دقيقة من الدرجة الثانية. لذلك، فإنه لديه نفس الدقة كأسلوب Lax-Wendroff التي وصفها في الطائفة. 7.2. ومع ذلك، أسلوب ماكورماك MacCormack method هو أسهل بكثير للتطبيق، لأنه ليست هناك حاجة لتقييم المشتقات الوقت الثانية كما كان الحال بالنسبة لطريقة Lax-Wendroff. لرؤية هذا أكثر وضوحا، أذكر Eqs. (7.7) and

(7.8) ، وهي مطلوبة للأسلوب Lax- Wendroff. وتمثل هذه المعادلات عدد كبير من حسابات إضافية. وعلاوة على ذلك، لمشكلة ديناميكية السوائل أكثر تعقيدا، والتفريق بين الاستمرارية، والزخم والطاقة. المعادلات للحصول على المشتقات الثانية، أولا فيما يتعلق بالوقت، وبعد ذلك مشتقات مختلطة فيما يتعلق بالزمان والمكان، ويمكن أن تكون مملة للغاية، و يوفر مصدرا إضافيا للخطأ البشري. لا يتطلب طريقة ماكورماك MacCormack's technique في مثل هذه المشتقات الثانية، وبالتالي لا يتعامل مع معادلات مثل (7.7) and (7.8) Eqs.

وقدم بعض الملاحظات فيما يتعلق بتطبيق معين على شبه بعد واحد تدفق فوهة هو مبين في الشكل 7.1. على حدود التدفق (نقطة الشبكة الأولى في اليسار)، قيم  $p$ ،  $T$  و  $q$  يتم إصلاحها، بغض النظر عن الوقت، ويفترض أن تكون القيم الخزان. يتم حساب سرعة التدفق، والذي هو قيمة صغيرة جدا دون سرعة الصوت، عبر استخدام النقاط الداخلية المجاورة، أو يمكن تقييمها من معادلة الزخم تطبيقها عند نقطة الشبكة الأولى باستخدام الاختلافات من جانب واحد. على حدود التدفق (نقطة الشبكة الماضية في الحق في الشكل 7.1)، ويتم الحصول على جميع المتغيرات التابعة من استقراء خطية من النقاط الداخلية المجاورة، أو من خلال تطبيق المعادلات التي تحكم في هذه المرحلة، وذلك باستخدام الاختلافات من جانب واحد.

وأخيرا، نلاحظ أن النتائج التي تم الحصول عليها من طريقة Lax-Wendroff وعن الأسلوب ماكورماك MacCormack method متطابقة تقريبا. على سبيل المثال، تتم مقارنة هاتين الطريقتين للاسترخاء الاهتزازي، ارتفاع في درجة الحرارة، وعدم توازن تدفق الفوهة في المرجع. [8]. لا يوجد فرق بين المجموعتين من النتائج.

#### 7.4 Stability Criterion مقياس الاستقرار

دراسة المعادلة (7.1)، هو أمر حيوي لطريقة Lax-Wendroff. لاحظ أنه يتطلب مواصفات لزيادة الوقت،  $\Delta t$ . دراسة يكس. (7.9) و (7.11) (7.11) and (7.9) Eqs. ، والتي تعتبر حيوية لطريقة ماكورماك MacCormack method . أنها تتطلب أيضا مواصفات لزيادة الوقت،  $\Delta t$ . للحصول على طرق واضحة، فإن قيمة  $\Delta t$  لا يمكن أن يكون تعسفية، بل يجب أن تكون أقل من المسموح به بنسبة للقيمة القصوى لتحقيق الاستقرار. التطبيقات التي تعتمد على الوقت التي تم وصفها في الطوائف. 7.2 و 7.3 تتعامل مع المعادلات التي تحكم التدفق التي هي القطعي (hyperbolic) فيما يتعلق بالوقت. أذكر مناقشتنا في الطائفة. 5.4 التعامل مع معايير الاستقرار لمثل هذه المعادلات. هناك، قيل إن  $\Delta t$  يجب أن تنصاع ل معيار-ما يسمى المعيار كورانت-فريدريكس-يوي CFL Courant-Friedrichs-Lewy. ويتجسد هذا في المعادلة (5.47)، والتي كانت مستمدة من معادلة نموذج بسيطة التي قدمتها المعادلة (5.42). هذه معادلة الموجة الخطية، حيث  $c$  هي سرعة انتشار الموجات. اذا تمت الموجة من خلال نشر الغاز التي لديها بالفعل

سرعة  $u$ ، ثم ستتحرك الموجة في سرعة  $(u + c)$  نسبة إلى المناطق المحيطة الثابتة. لمثل هذه الحالة، المعادلة (5.47) تصبح:

$$\Delta t = C \left( \frac{\Delta x}{u + c} \right); \quad C \leq 1 \quad (7.14)$$

حيث  $C$  هو عدد كورانت Courant number ، و  $c$  هي سرعة الصوت،  $s = c(\partial p / \partial \rho)$ . Eq. (7.14) هو المعيار CFL المناسب للحلول أحادية الأبعاد، صريحة من فوهة التدفقات التي تم مناقشتها في الطوائف. 7.2 و 7.3. معيار CFL الذي قدمه المعادلة (7.14) يقول جسدياً أن خطوة الوقت صريحة يجب أن لا تكون أكبر من الوقت اللازم لموجة الصوت لنشر شبكة من نقطة واحدة إلى أخرى. وقد تم تجربة هذا البلاغ بأن  $C$  يجب أن تكون الأقرب امكانية إلى الوحدة، ولكن اعتماداً على التطبيق الفعلي، القيمة القصوى للاستقرار المتاحة ل  $C$  في الوقت الصريح تعتمد على حسابات الفرق المحدودة يمكن أن تختلف من حوالي 0.5-1.0. نأخذ في الاعتبار أن معايير الاستقرار تتضح من Eqs. (5.47) and (7.14) تستند إلى تحليل المعادلات الخطية. من ناحية أخرى، فإن المعادلات التي تحكم تدفق السوائل العام هي خطية غير عالية. لذلك، لن نتوقع معايير CFL للتطبيق بالضبط لمثل هذه الحالات؛ بدلا من ذلك، فإنه يوفر تقدير معقول لل  $\Delta t$  لمشكلة غير خطية معينة، ونتيجة لذلك قيمة الرقم كورانت Courant number في المعادلة (7.14) يمكن أن ينظر إليها باعتبارها عامل متغير في التجربة قابلة للتعديل adjustable parameter للتعويض عن تلك غير التخطيطية. العودة لحظة لتطبيق تدفق فوهة مناقشتها في الطوائف. 7.2 و 7.3. هنا، في أي وقت من الأوقات  $t$  ، المعادلة (7.14) يتم تقييم في كل نقطة في الشبكة في جميع أنحاء

طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض

التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللالزج

التدفق. لأن  $c$  و  $u$  تختلف مع  $x$ ، ثم القيمة المحلية ل  $\Delta t$  المرتبطة بكل نقطة الشبكة ستكون مختلفة من نقطة إلى أخرى. قيم  $\Delta t$  يعملون فعلا في يكس. (7.1) و (7.9) Eqs. (7.1) and (7.9) للمضي قدما في مجال تدفق من خلال الخطوة التالية في الوقت المناسب يجب أن يكون الحد الأدنى ل  $\Delta t$  محسوبة على جميع نقاط الشبكة.

[بعض التطبيقات CFD قد استخدمت " طريقة خطوة الوقت المحلي"، حيث يتم استخدام القيم المحلية من  $\Delta t$  في كل نقطة الشبكة في يكس. (7.1) و (7.9) Eqs. (7.1) and (7.9). في هذه الحالة، فإن الاختلافات العابرة the transient variations محسوبة على العديد من خطوات الوقت لا يخفون فيزيائيا. تم تطوير نوع من مجال تدفق "مشوه الوقت"، حيث كل متغيرات التدفق الجديدة المحسوبة لخطوة لاحقة تتعلق بالوقت فعلا للقيم الإجمالية المختلفة من الزمن. هذه " طريقة خطوة الوقت المحلي" نتائج كثيرا في التقارب أسرع اقترابا إلى حالة مستقرة، وهذا هو، هناك حاجة ل أقل مجموع خطوات الوقت للحصول على حالة مستقرة. من ناحية أخرى، احتساب العابرين ليس لها أي معنى فيزيائي، وبعض خبراء CFD يتساءل علنا عن الدقة الشاملة لمثل هذا الأسلوب، حتى بالنسبة للنتائج الحالة المستقرة النهائية.]

وأخيرا، نلاحظ أن لتدفق اثنين أو ثلاثة أبعاد، امتدادا من المعادلة. (7.14) هو:

$$\Delta t = \text{Min}(\Delta t_x, \Delta t_y) \quad (7.15a)$$

$$\Delta t_x = C \frac{\Delta x}{u+c} \quad (7.15b)$$

$$\Delta t_y = C \frac{\Delta y}{v+c} \quad (7.15c)$$



## 7.5 تطبيقات مختارة من تقنيات المعتمدة على الزمن صريح (Explicit Time-Dependent Technique)

والغرض من هذا القسم هو لتوضيح بعض التطبيقات لهذه التقنية الواضحة، نعتمد الوقت الموضوع في الأقسام السابقة من هذا الفصل. هذه التطبيقات تحتوي على العديد من ميزات CFD التي نوقشت طوال هذه الملاحظات.

### 7.5.1 Non-equilibrium Nozzle Flows

المراجع [5،6،8] تمثل أول تطبيق لهذه التقنية المعتمدة على الزمن للذبذبات وكيميائية فوهة التدفقات غير المتوازن. تحليل بحثي للتدفق المستمر في هذه التدفقات، والذي ينطوي قدما بمسيرة من الحزان للخروج من الفوهة، واجه التفرد سرج نقطة في الحلق فوهة. هذا التفرد يعقد إلى حد كبير الحالة المستقرة للحلول العددية للتدفق. من ناحية أخرى، أول تفسير في الحكام. [5،6]، والحل العددي المعتمد على الزمن تلتف مثل هذه المشاكل في منطقة الحلق، ويشكل ذلك حلا عدديا بسيطا نسبيا للتحليل مثل هذه الذبذبات في سريان فوهة التدفقات

طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض

التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللزج

غير المتوازن يتطلب إدراج من معادلة معدل الذبذبات، مثل:

$$\frac{\partial e_{\text{vib}}}{\partial t} = \frac{1}{\tau} [(e_{\text{vib}})_{\text{eq}} - e_{\text{vib}}] - u \frac{\partial e_{\text{vib}}}{\partial x} \quad (7.16)$$

حيث  $e_{\text{vib}}$  هو قيمة محلية غير متوازنة لطاقة الذبذبات في وحدة الكتلة الجزيئية للغاز،

$(e_{\text{vib}})_{\text{eq}}$

هي القيمة

التوازن

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} = w_i - u \frac{\partial \eta_i}{\partial x} \quad (7.17)$$

المحلي، و  $\tau$  هو وقت استرخاء الذبذبات التي هي وظيفة  $p$  المحلية و  $T$ . التحليل الكيميائي

لتدفقات الفوهة غير المتوازنة يتطلب إدراج الأنواع لمعادلات الاستمرارية - واحد لكل الأنواع

الكيميائية الموجودة في الغاز - والتي هي من النموذج:

حيث  $\eta_i$  هي نسبة الخلد الشامل mole-mass ratio (مولات moles الأنواع في وحدة كتلة  $i$

من خليط)،  $w_i$  هو معدل تكوين rate of formation (أو انقراض الأنواع  $i$ ) بسبب التفاعلات

الكيميائية المحدودة الصرف finite-rate. شكل  $w_i$  ينطوي الثوابت الكيميائية ومعدل تركيز المحلية

من الأنواع الكيميائية. لتطوير التمهيدي من المعادلات. (7.16) و (7.17)، انظر الفصول.

13 و 14 من المرجع. [3]. نلاحظ أنه، وعلى نفس المنوال المعادلات. (7.2)، (7.3) و

(7.4) و يكس. Eqs (7.16) و (7.17) مكتوبة في شكل مشتق الوقت على الجانب الأيسر،

والمشتقات المكانية على الجانب الأيمن. في المقابل، يتم حساب المتغيرات غير المتوازنة  $e_{\text{vib}}$  و  $\eta_i$

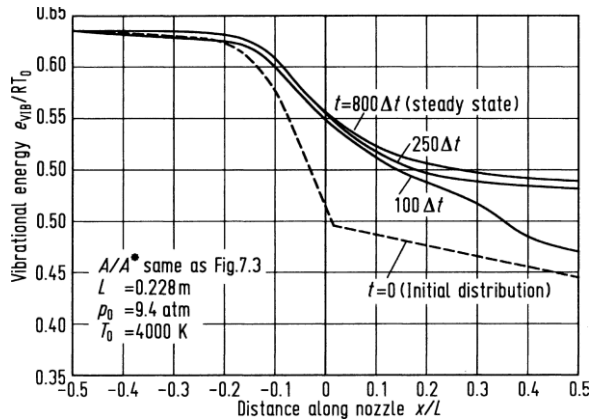
في الخطوات من الوقت في نفس منوال  $e$ ،  $u$  and  $q$  من المعادلات. (7.2)، (7.3) و (7.4).

في الواقع، من أجل الحل المعتمد على الزمن غير المتوازن لتدفقات الفوهة يكس. Eqs. (7.2)، (7.3) (7.4)، (7.16) و (7.17)، تحل بنفس الطريقة في كل خطوة إلى جانب الوقت كما هو موضح في الطوائف. 7.2 و 7.3. ومع ذلك، هناك قيد واحد إضافي للاستقرار الناجم عن الظواهر غير المتوازن. ل الحلول الصريحة من التدفقات غير المتوازنة، بالإضافة إلى معيار CFL التي نوقشت في الفرع 7.4، يجب أن تكون قيمة  $\Delta t$  أيضا أقل من الوقت المخصص ل أسرع معدل محدود يجري في النظام. وهذا هو

$$\Delta t < BF$$

حيث  $\Gamma = \tau$  لذبذبات عدم التوازن،  $\Gamma = (\partial w_i / \partial \eta_i)^{-1}$  هو وقت الاسترخاء الكيميائي الفعال. (وانظر الحكام [5، 6] لمزيد من التفاصيل) لهذه المشكلة، تحول الشبكة أمر غير ضروري، والحيز الفيزيائي والحاسوبي هي واحدة في داخل نفسه.

Fig. 7.4 Transient and final steady-state evib distributions for the non-equilibrium expansion of N2 obtained from the present time-dependent analysis



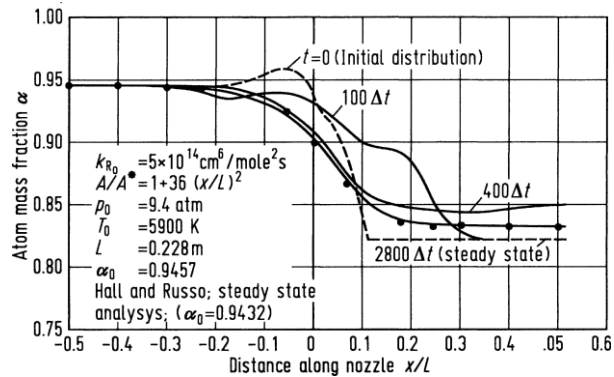
الشكل. 7،4 عابر و حالة الاستقرار الأخيرة لتوزيعات evib للتوسع غير المتوازن ل N2 تم

الحصول عليها من التحليل المعتمدة على الزمن الحاضر

وتظهر النتائج التي تم الحصول عليها نموذجية مع تقنية تعتمد على الوقت LAX-Wendroff في الشكل 7.4 و 7.5، من المرجع [5]. ويتضح حالة التوسع غير المتوازن للذبذبات ل N2 النقي في الشكل 7.4. هنا، يظهر طبيعة المعتمدة على الزمن من قيمة غير متوازنة ل evib بوصفها وظيفة من المسافة من خلال الفوهة. خط متقطع يمثل التوزيع الأولي المفترضة في  $T = 0$ . توزيعات المتوسطة بعد 100 و 250 خطوة، وتظهر، جنباً إلى جنب مع حالة ثابتة للخطوات النهائية بعد 800 خطوة زمن. وهناك حالة مختلفة مشتقة، وهي ان من عدم التوازن الكيميائي يرد توسيع نشر الأكسجين، في الشكل 7.5. هنا، خط متقطع يمثل الاختلاف يفترض في البداية من جزء من كتلة الأكسجين الذري من خلال فوهة في  $T = 0$ . وتظهر منحنيات وسيطة بعد 100 و 400 خطوة زمنية، جنباً إلى جنب مع المباراة النهائية، تقارب ل حالة مستقرة بعد 2800 خطوة زمنية. هذا النهائي التوزيع ل حالة مستقرة يتفق تماما مع حل تدفق مطرد في وقت سابق قام بها هال وروسو Hall and Russo [9]، والذي يظهر كالدوائر الصلبة في الشكل.

## 7.5

Fig. 7.5 Transient and final steady-state atom mass fraction distributions for the non-equilibrium expansion of dissociating oxygen obtained from the present time-dependent method; the steady state distribution is compared with the steady-flow analysis of Ref. [9]



الشكل 7.5 حالة استقرار توزيعات جزء كتلة الذرة العابرة والأخيرة لتوسيع عدم متوازن النأي الأكسجين لذلك تم الحصول عليها من طريقة تعتمد على الوقت الحالي؛ وبالمقارنة توزيع الحالة مطرد مع تحليل تدفق مستمر من المرجع. [9]

### 7.5.2 Flow Field over a Supersonic Blunt Body

ونحن نفترض تدفق غير لزج. وبالتالي يتم تمثيل المعادلات التي تحكم التدفق بواسطة المعادلة. (2.65) مع  $U$ ،  $F$ ،  $G$ ،  $H$  التي قدمتها التعبيرات غير اللزجة في الطائفة. 2.9. لهذه القضية، قوات الجسم تكاد لا تذكر، وبالتالي يظهر  $J = 0$ . التخطيط الفيزيائي في الجزء العلوي من الشكل 7.6.  $BC$  منحنى الجسم ومنحنى  $AD$  هو موجة صدمة. يتم إعطاء الإحداثيات  $X$  من الصدمة والجسم عن طريق  $s$  and  $b$  على التوالي. ونظرا لمسافة صدمة الانفصال المحلية التي كتبها  $\delta = s - b$ . خلال الحل الذي يعتمد على الوقت، الجسد ثابت، وبالتالي  $b = b(y)$ . ومع ذلك، فإن موجة صدمة تغيير شكل ومكان مع مرور الوقت، وبالتالي  $s = s(y, t)$ . لذلك،

$$\delta(y, t) = s(y, t) - b(y) \quad (7.18)$$

الحيز الحاسوبي ( $\xi$ ،  $\eta$ ) هو مبين في الشكل 7.6، ويتم الحصول عليها من التحول

طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض

التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللالزج

$$\xi = \frac{x-b}{\delta}; \quad \eta = y; \quad \tau = t \quad (7.19)$$

حيث يتم الحصول على  $\delta$  من المعادلة (7.18). لاحظ أن هذا التحول هو مثال على نظام أحداثيات الحدود المجهزة كما نوقش في الطائفة 5.5 النتائج نموذجي ، تم الحصول عليها من المرجع [10]، وتظهر في الشكل 7.7، 7.8 و 7.9.

تم الحصول على هذه النتائج باستخدام طريقة Lax-Wendroff. في الشكل 7.7، ويتضح من موجة الحركة التي تتغير مع الوقت، بدءاً من قيمتها المفترضة في البداية  $t = 0$ ، وتتقدم على شكل حالة مستقرة، بعد 500 خطوة وقت. وتظهر اختلافات الوقت ل منتصف centreline موجة السرعة و نقطة الركود الضغط stagnation point pressure في الشكل 7.8 و 7.9 على التوالي. نلاحظ في كل الأشكال الثلاثة 7.7، 7.8 و 7.9، أن أكثر التغيرات السريعة تحدث في العصور الأولى، واقترب من حالة مستقرة بدلا مقارب في بعض الأحيان.

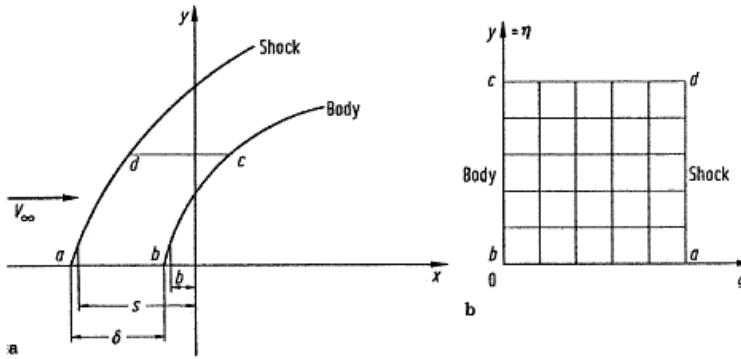


Fig. 7.6 Coordinate system for the blunt body problem

Fig. 7.7 Time-dependent shock wave motion, parabolic cylinder,  $M_\infty = 4$

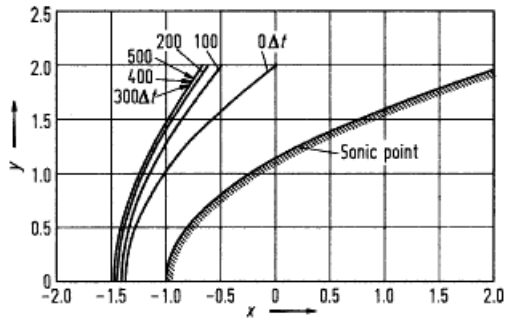


Fig. 7.8 Time variation of wave velocity; parabolic cylinder,  $M_\infty = 4$

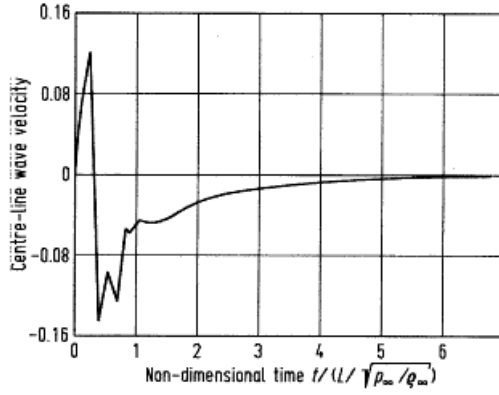
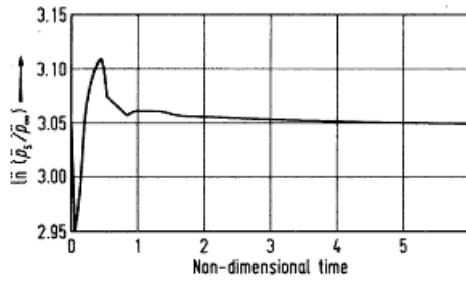


Fig. 7.9 Time variation of stagnation point pressure; parabolic cylinder,  $M_\infty = 4$





### 7.5.3 Internal Combustion Engine Flows

النظر في التدفق داخل محرك الاحتراق الداخلي والتي على غرار هندسة مكبس الأسطوانة piston cylinder المبين في الشكل 7.10. المكبس يتحرك صعودا وهبوطا داخل الاسطوانة، والتدفق يدخل من خلال صمام السحب والمخارج من خلال صمام أمان exhaust valve. مجال التدفق في هذه المشكلة هو متقلب حقا، والهدف من ذلك حساب هذا التدفق غير المستقر من خلال هذه التقنية المعتمدة على الزمن. هنا، لا يتم الحصول على أي وقت مضى أي حالة مقارنة ثابتة، بل يتم احتساب تدفق دوري تكرر المجال على مدى دورة مدتها أربع أشواط كاملة من الضغط، الطاقة، و العادم. سننظر تدفق غير لزج inviscid، وبالتالي هي التي تحكم المعادلات المعادلة (2.65) و  $G, F, U$ ،  $H$  ناقلات العمود من الطائفة 2،9، ويستخدم لحدود المجهزة لسريان غير لزج. نظام الإحداثيات، حيث تحول هو

$$\xi = x/H(t); \eta = y, \tau = t$$

الشكل 7،10 هندسة IC اسطوانة مكبس ثنائي الأبعاد نموذج متحرك يظهر ترتيب الشبكة (أ) المكبس وضعه على TDC،  $10 \times 17$  نقاط الشبكة متباعدة بشكل موحد؛ (ب) وضعه على المكبس TDC،  $10 \times 17$  نقاط الشبكة متباعدة بنسب مختلفة (فقط في اتجاه  $-Y$ )، (ج) وضع المكبس في BDC،  $10 \times 17$  نقاط الشبكة متباعدة بشكل موحد

وحيث  $H(t)$  هي مسافة زمنية تتراوح بين الجزء العلوي من الاسطوانة والجزء العلوي من المكبس. نلاحظ في الشكل 7،10 تظهر أن احداثيات  $x$  على طول المحور العمودي

طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض

التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللالزج

للاسطوانة، والإحداثيات  $\gamma$  هي في الاتجاه شعاعي عبر الاسطوانة لهذا التدفق في الشكل. 7،11، 7،12، 7،13، و 7،14، مأخوذة من المرجع. [11]. ويتم الحل باستخدام تقنية ماكورماك MacCormack's technique على النحو المبين في الفرع 7.3. أرقام 7،11، 7،12، 7،13، و 7،14 وإظهار حقل التدفق المرتبط بمركز امتصاص الحركة المتكررة، ثلاثة مواقع للمكبس خلال تكرار ضغط، بالقرب من مركز الطاقة، والموقع الوسيط من خروج الضربة، على التوالي. لاحظ أن يتم إنشاء دورة التدفق أثناء تناول امتصاص الضربة، وأن دورة هذا التدفق استمرت طوال دورة.

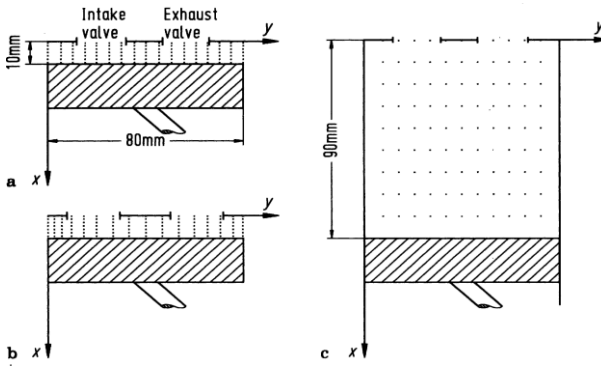


Fig. 7.10

#### 7.5.4 Supersonic Viscous Flow over a Rearward-Facing Step With Hydrogen Injection

النظر في تدفق لزج ثنائي الأبعاد الأسرع من الصوت على مدى المؤخرة التي تواجه الخطوة، حيث يتم حقن  $H_2$  في تدفق المصب أن الخطوة رسمت في الشكل. 7،15. على عكس الأمثلة المذكورة أعلاه، تتناول هذه القضية في حل المعادلات نافير ستوكس Navier-Stokes كاملة، التي قدمتها المعادلة. (2.65) مع  $U$ ،  $F$  و  $G$  ناقلات العمود الواردة في جوهر الفرع. 2،9 لتدفق لزج. يتم تعديل هذا النظام قليلا لوجود نشر شامل، الذي يضيف مصطلح نشرها في معادلة الطاقة، ويضيف معادلة أخرى، وهما معادلة الاستمرارية مع الأنواع النشر. (انظر الحكام. [12، 13] لمزيد من التفاصيل.) هذه التقنية تستخدم العددية هنا طريقة ماكورماك MacCormack's method المناقشة في الطائفة. 7.3 الحسابات الحالية الموجودة على الشبكة الموحدة في جميع أنحاء الحيز الفيزيائي. في تركيبية مع هندسة مستطيلة الموجودة بالفعل في الحيز الفيزيائي (كما يمكن أن يرى من خلال دراسة الشكل 7.15)، وهذا يعني أن لا حاجة لتحويل الشبكة.

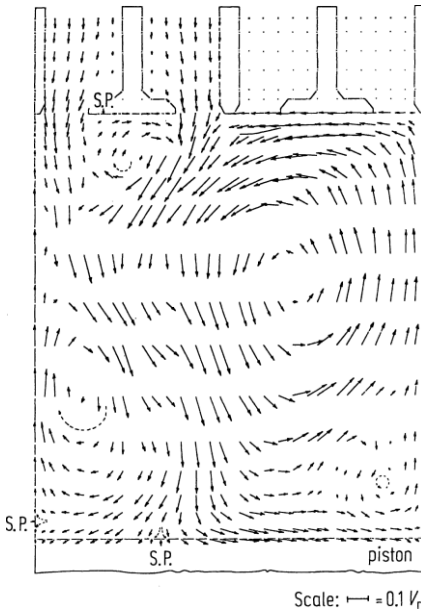
نتائج نموذجية تم الحصول عليها من الحكام. [12، 13] وترد في الشكل. 7،16، 7،17، 7،18 و 7.19. في الشكل. 7،16، يظهر رسم تخطيطي لناقل السرعة في حال عدم حقن  $H_2$ . عدد ماخ Mach number الخارجي 2.19، وعدد رينولدز Reynolds number على أساس ارتفاع الخطوة 70,000. وتشمل هذه الحسابات أيضا نمودجا الاضطراب على غرار تلك ل بالدوين ووماكس Baldwin and Lomax [14]. لاحظ

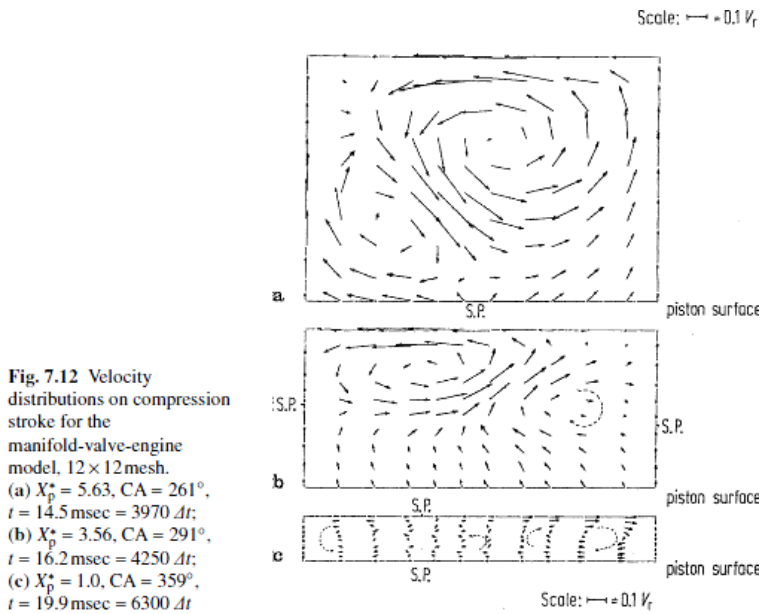
طرق الفروق المحدودة الواضحة (Explicit Finite Difference Methods): بعض

التطبيقات المحددة للسريان اللزج واللالزج

إعادة تدوير التدفق المفصول فقط لمصب الخطوة. الشكل 7.17 هو مخطط ناقل السرعة مع حقن H2.

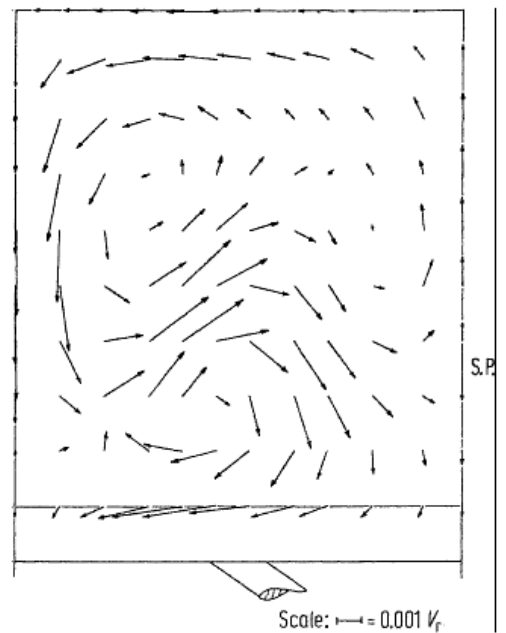
وينظر الآن إعادة تدوير التدفقات المفصولة بين الخطوة وتدفق H2، بالإضافة كما المصب من التدفق. الشكل 7،18 يظهر عدد ماخ Mach number لحدود التدفق (خطوط رقم ماخ الثابتة constant Mach number). الرقم 7.19 يوضح معالم ثابتة جزء H2 الشامل، وهذا الرقم يعمل على تحديد مدى وشكل تدفق طائرة.





**Fig. 7.12** Velocity distributions on compression stroke for the manifold-valve-engine model,  $12 \times 12$  mesh.  
 (a)  $X_p^* = 5.63$ ,  $CA = 261^\circ$ ,  
 $t = 14.5 \text{ msec} = 3970 \Delta t$ ;  
 (b)  $X_p^* = 3.56$ ,  $CA = 291^\circ$ ,  
 $t = 16.2 \text{ msec} = 4250 \Delta t$ ;  
 (c)  $X_p^* = 1.0$ ,  $CA = 359^\circ$ ,  
 $t = 19.9 \text{ msec} = 6300 \Delta t$

**Fig. 7.13** Velocity pattern near end of power stroke;  
 $X_p^* = 8.99$ ,  $CA = 539^\circ$ ,  
 $t = 29.9 \text{ msec} = 9950 \Delta t$



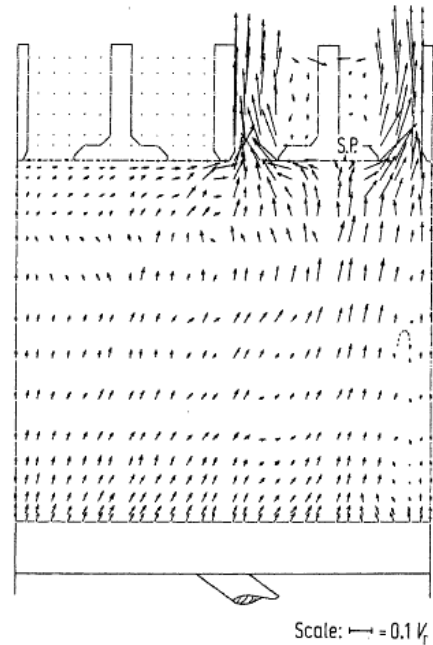
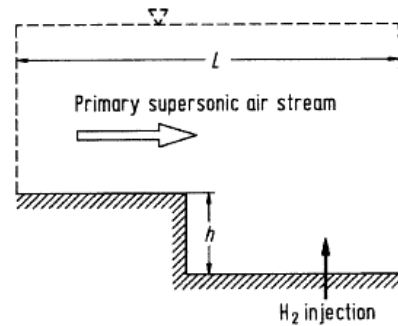


Fig. 7.14 Velocity distribution on exhaust stroke;  $X_p^* = 6.99$ ,  $CA = 600^\circ$ ,  $t = 33.3 \text{ msec} = 11560 \Delta t$ ,  $30 \times 22 \text{ mesh}$

Fig. 7.15 Rearward facing step geometry



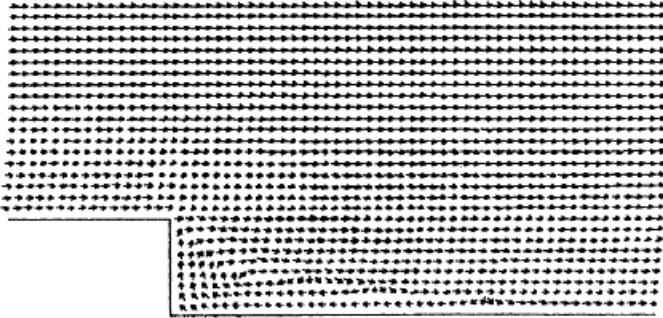


Fig. 7.16 Velocity vectors with no  $H_2$  injection

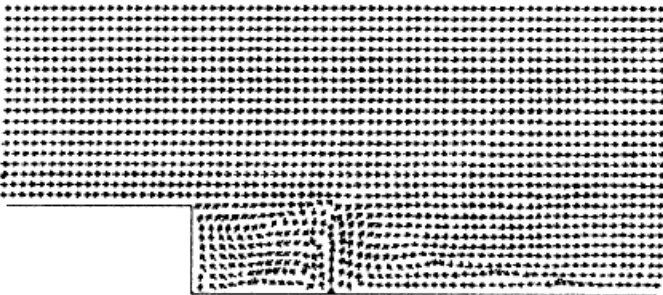


Fig. 7.17 Velocity vectors with  $H_2$  injection

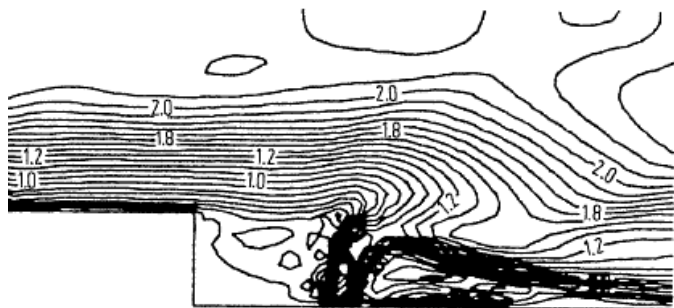


Fig. 7.18 Lines of constant Mach number with  $H_2$  injection



Fig. 7.19 Lines of constant  $H_2$  mass fraction



### 7.5.5 Supersonic Viscous Flow over a Base

بطريقة ذات صلة إلى حد ما، والنظر في تدفق الصوت لزج لأكثر من قاعدة، كما هو موضح في الشكل. 7،20. هنا، يتم استخدام نفس معادلات التدفق اللزج كما نوقش في الفرع. 7.5.4 أعلاه. ومع ذلك، لهذا الحساب يستخدم شبكة تمتد، على النحو الوارد بالتفصيل في الفرع. 6.4، وكما هو مبين في الشكل. 6.4. مرة أخرى، تقنية ماكورماك MacCormack's technique هي المستخدمة. بعض نتائج العينة من الحكام [15،16]. وترد في الشكل. 7،21 7،22 والتي لا تتعامل مع أي حقن ثانوي في القاعدة. الشكل 7.21 يوضح الرسم التخطيطي لناقل السرعة لحالة مع عدد ماخ Mach number الخارجي من 2.25 وعدد رينولدز Reynolds number من 477 000 استنادا إلى ارتفاع القاعدة. لاحظ إعادة تدوير المصب تدفق فصل من القاعدة. الشكل 7.22 يوضح معالم الضغط المستمر في التدفق، و تعتبر موجة التوسع قاب قوسين أو أدنى مع إعادة الضغط على وينظر بشكل واضح المصب صدمة للقاعدة المصب من قاعدة بوضوح. الأشكال 7،23 و 7.24 تظهر نفس النوع من النتائج، باستثناء الآن لحالة حقن الهواء من وسط القاعدة. نلاحظ أن يغير الحقن كثيرا في حقل التدفق، كما يمكن أن يرى في المقارنة مع الشكل. 7، 21 و 7،22.

Fig. 7.20 Base flow with mass injection

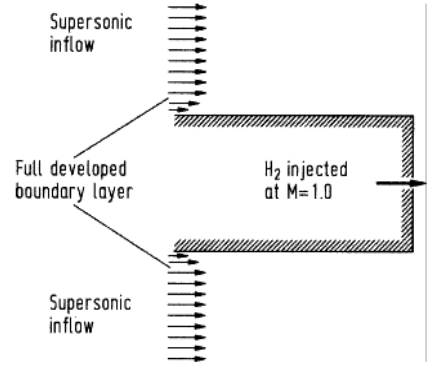


Fig. 7.21 Velocity vectors with no base injection

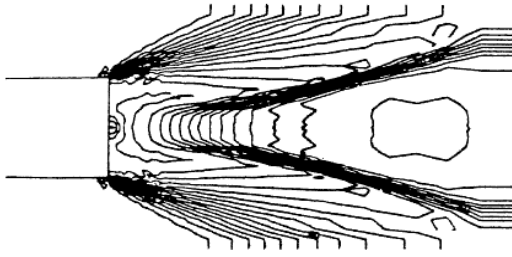
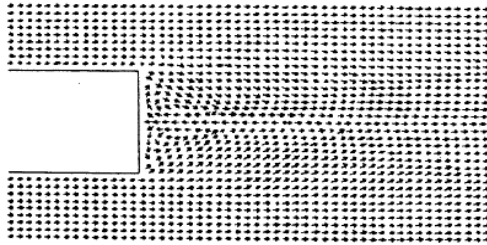
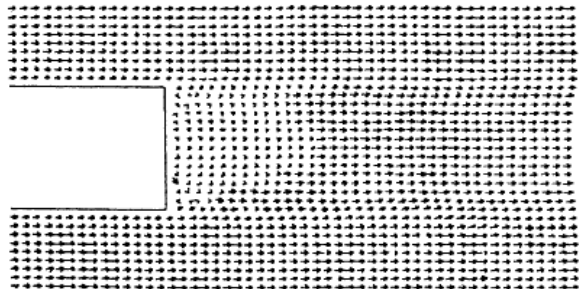


Fig. 7.22 Lines of constant pressure with no base injection

Fig. 7.23 Velocity vectors with injection from the center of the base



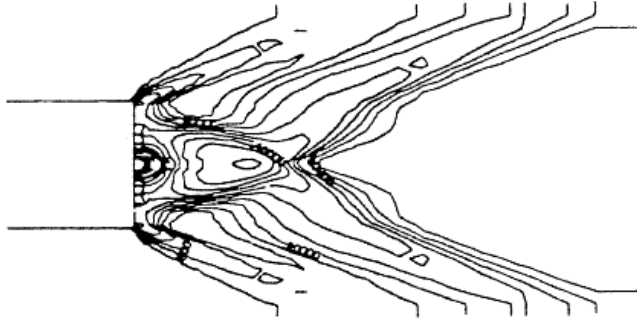


Fig. 7.24 Lines of constant pressure with injection from the center of the base

في السنوات الأخيرة، وقد تم نشر بعض النصوص الحديثة على CFD (المراجع [19]-  
[23])؛ ينصح بهذه النصوص للدراسات المتقدمة في هذا الموضوع. على وجه  
الخصوص، مجلدي فليتشر Fletcher (المراجع. [19، 20]) تحتوي على مناقشة  
جيدة نظرية للموضوع. من ملاحظة خاصة هي مجلدين من قبل هيرش Hirsch  
(المراجع [21، 22].)، وهذه الكميات تمثل عرضا رسميا لأساسيات الرياضية  
والعددية لل CFD، والتقنيات الحديثة المستخدمة في CFD، وكيفية استخدام هذه  
التقنيات في مختلف التطبيقات العملية. إشارة [23]، من خلال هوفمان  
Hoffmann، هو عرض هش من CFD للاستخدام من قبل المهندسين. ويوصى جميع  
هذه الكتب لمزيد من الدراسة المتقدمة لديناميكيات السوائل الحسابية. أيضا، لعرض  
موسع للابتدائية والأفكار التمهيديّة الواردة في هذا الكتاب، فضلا عن مناقشة مطولة  
للفلسفة العامة لل CFD ودورها في مجال الهندسة الحديثة، راجع كتاب من قبل المؤلف  
الحالي (المراجع [24])؛ هذا هو مكتوب لدورة الجامعيين على مستوى رفيع في  
CFD، ويفترض على الإطلاق أي معرفة مسبقة للموضوع. يتمنى لك هذا الكاتب  
قراءة سعيدة، والحوسبة سعيدة في مزيد من البعثات الخاصة بك في عالم ديناميات  
الموائع الحسابية.

### 7.5.6 References

1. Anderson, John D., Jr., *Fundamentals of Aerodynamics*, 2nd Edition McGraw-Hill, New York, 1991.
2. Anderson, John D., Jr., 'Computational Fluid Dynamics—An Engineering Tool?' in A.A. Poiring (ed.), *Numerical Laboratory Computer Methods in Fluid Dynamics*, ASME, New York, 1976, pp. 1–12.
3. Anderson, J.D., Jr., *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*, 2nd Edition McGraw-Hill, New York, 1990.
4. Ames Research Staff, 'Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow,' NACA Report 1135, 1953.
5. Anderson, J.D. Jr., 'A Time-Dependent Analysis for Quasi-One-Dimensional Nozzle Flows with Vibrational and Chemical Nonequilibrium,' NOLTR 69-52, Naval Ordnance Laboratory, White Oak, MD, 1969.
6. Anderson, J.D., Jr., 'A Time-Dependent Analysis for Vibrational and Chemical Nonequilibrium Nozzle Flows,' *AIAA Journal*, Vol. 8, No. 3, March 1970, pp. 545–550.
7. MacCormack, R.W., 'The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering,' *AIAA Paper No. 69-354*, 1969.
8. Anderson, J.D., Jr., 'Time-Dependent Solutions of Nonequilibrium Nozzle Flow—A Sequel,' *AIAA Journal*, Vol. 5, No. 12, Dec. 1970. pp. 2280–2282.
9. Hall, J.G. and Russo, A.L., 'Studies of Chemical Nonequilibrium in Hypersonic Nozzle Flows,' AFOSR TN 59-1090, Cornell Aeronautical Laboratory Report AD-1118-A-6, November 1969.

10. Anderson, J.D., Jr., 'On Hypersonic Blunt Body Flow Fields Obtained with a Time-Dependent Technique,' NOLTR 68-129, Naval Ordnance Laboratory, White Oak, MD, August 1968.
11. Dallospedale, C.L., 'A Numerical Solution for the Two-Dimensional Flowfield in an Internal Combustion Engine with Realistic Valve-Geometry,' M.S. Thesis, Department of Aerospace Engineering, University of Maryland, College Park, MD, 1978.

## 8 الأحجام المحدودة (Finite volumes)

### 8.1 نظرة عامة

وتعتمد طرائق الحجم المحدودة على تجزئ المعادلات إلى معادلات تكاملية

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho \phi dV + \underbrace{\int_{CS} \rho \phi (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA}_{\text{Advective (convective) fluxes}} = \underbrace{-\int_{CS} \vec{q}_\phi \cdot \vec{n} dA}_{\text{Other transports (diffusion, etc)}} + \underbrace{\sum \int_{CV} s_\phi dV}_{\text{Sum of sources and sinks terms (reactions, etc)}}$$

في أمثلتنا اللاحقة سوف نستخدم هذه المعادلة:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \phi dV + \int_{S(t)} \rho \phi (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = -\int_{S(t)} \vec{q}_\phi \cdot \vec{n} dA + \int_{V(t)} s_\phi dV$$

حيث  $V(t)$  هو أي حجم منفصل، و الآن سوف نفترض أن الحجم لا يتغير مع الوقت إذا:

$$V(t) = V$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \int_S \rho \phi (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = -\int_S \vec{q}_\phi \cdot \vec{n} dA + \int_V s_\phi dV \quad \text{وتصبح المعادلة كالتالي:}$$

"طريقة الوقت السائر" يحتاج إلى استخدامها لدمج

A "time-marching method" needs to be used to integrate

$\Phi = \int_V \rho \phi dV$  to the next time step(s)

$$\Phi = \int_V \rho \phi dV$$

إلى الخطوة القادمة (أو الخطوات)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV = \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV = \frac{d\Phi}{dt}$$

إجمالي تقديرات التدفق  $F_\phi$  المطلوبة في حدود كل CV

Total flux estimate  $F_\phi$  required at the boundary of each CV

$$\int_S \vec{F}_\phi \cdot \vec{n} dA = \int_S \rho \phi (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \int_S \vec{q}_\phi \cdot \vec{n} dA$$

e.g.  $F_\phi =$  advection + diffusion fluxes

يجب أن تكون متكاملة الكلي على المدى المصدر (مجموع

Total source term (sum of sources) must be integrated over each CV

$$S_\phi = \int_V s_\phi dV$$

المصادر) على كل CV

$$S_\phi = \int_V s_\phi dV$$

$$\frac{d\Phi}{dt} + \int_S \vec{F}_\phi \cdot \vec{n} dA = S_\phi$$

وبالتالي سلبية. و. يصبح:

Hence cons. eqn. becomes:

هذه الاحتياجات تؤدي إلى العناصر الأساسية لمخطط FV،

$$\frac{d\Phi}{dt} + \int_S \vec{F}_\phi \cdot \vec{n} dA = S_\phi$$

ولكن نحن بحاجة إلى ربط  $\Phi$  و  $\theta$ .

"طريقة الوقت-السائر" لمعادلة CV:

These needs lead to basic



elements of a FV scheme, but we need to relate  $\phi$  and  $\Phi$ .

$$\frac{d\Phi}{dt} + \int_S \vec{F}_\phi \cdot \vec{n} dA = S_\phi$$

“Time-marching method” for CV equation:

نظرة عامة  
متوسط  $\phi$  فوق خلية CV

$$\frac{d\Phi}{dt} + \int_S \vec{F}_\phi \cdot \vec{n} dA = S_\phi$$

$$V \frac{d\bar{\Phi}}{dt} + \int_S \vec{F}_\phi \cdot \vec{n} dA = S_\phi$$

The average of  $\phi$  over a CV cell

$$V \frac{d\bar{\Phi}}{dt} + \int_S \vec{F}_\phi \cdot \vec{n} dA = S_\phi$$

إجمالي / صافي تدفق من خلال السيرة الذاتية الحدود هو مجموع التكاملات:

Total/Net flux through CV boundary is sum of integrals:

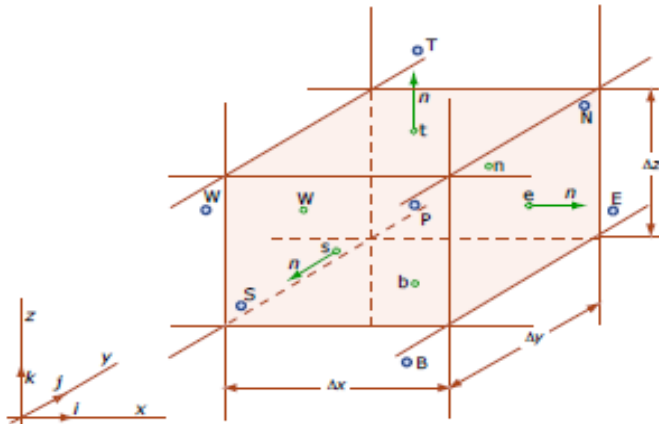
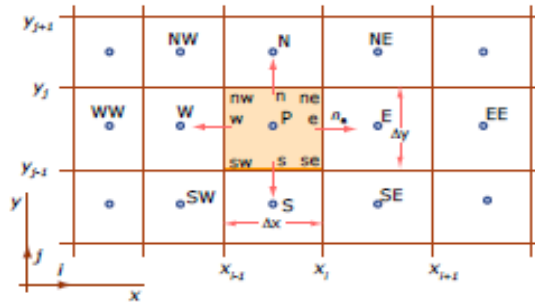
$$\int_S \vec{F}_\phi \cdot \vec{n} dA = \sum_k \int_{S_k} f_\phi dA$$

$$\int_S \vec{F}_\phi \cdot \vec{n} dA = \sum_k \int_{S_k} f_\phi dA$$

لحساب السطح المتكامل، وهناك حاجة  $\phi$  في كل مكان على السطح، ولكن  $\bar{\Phi}$  لا يعرفها إلا في العقدي (مركز

To compute surface integral,  $\phi$  is needed everywhere on surface, but  $\bar{\Phi}$  on nodal (CV center) v

القيم (CV)



$$F_e = \int_{S_e} f_\phi dA$$

• الهدف: تقدير

1D surfaces (2D CV)

• أبسط تقرب:

• Goal: estimate

$$F_e = \int_{S_e} f_\phi dA$$

قاعدة نقطة المنتصف (ثاني أمر)

• Simplest approximation:

- ويقترب  $F_e$  كمنتج من الكمية المتكاملة في مركز الخلية

midpoint rule (2nd order)

-  $F_e$  is approx  $F_e = \int_{S_e} f_\phi dA = \bar{f}_e S_e = f_e S_e + O(\Delta y^2) \approx \underline{f_e S_e}$  وجه (نفسه تقرب قيد

product of the integrand at cell-

الوجه

face center (itself approximation

of mean value over surface) and

the cell-face area

- منذ  $f_e$  غير متوفرة، فإنه لا بد من الحصول عليها عن طريق

الاستيفاء

آخر أجل تقرب 2: حكم شبه منحرف

- Since  $f_e$  is not available, it has

to be obtained by interpolation

- ويقترب  $F_e$  على النحو التالي:

Another 2<sup>nd</sup> order approximation: Trapezoid rule

- في هذه الحالة، فمن تدفقات في زوايا  $f_{se}$  و  $f_{ne}$  التي

-  $F_e$  is approximated as:

تحتاج إلى الحصول عليها عن طريق الاستيفاء

$$F_e = \int_{S_e} f_\phi dA \approx S_e \frac{(f_{ne} + f_{se})}{2} + O(\Delta y^2)$$

العليا تقرب التكاملات سطح

locations 2

- In this case, it is the fluxes at

the corners  $f_{ne}$  and  $f_{se}$  that need

- حكم سمبسون (أجل التقرب الرابع):

to be obtained by interpolation

Higher-order

approximation of surface

integrals require more than

القيم اللازمة في 3 مواقع

2 locations

- للحفاظ على دقة جزءا لا يتجزأ: على سبيل المثال  
 - Simpson's rule (4<sup>th</sup> order approximation): استخدام متعدد الحدود مكعب لتقدير هذه القيم

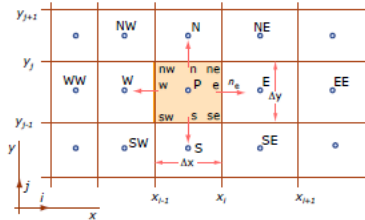
$$F_e = \int_{S_e} f_\phi dA \approx S_e \frac{(f_{nw} + 4f_e + f_{se})}{6} + O(\Delta y^4)$$

من قريب

Values needed at 3 locations

- To keep accuracy of interpolation  
 e.g. use cubic polynomial to estimate these values

$\bar{\Phi}_P$ 's nearby



الهدف: تقدير  $F_e = \int_{S_e} f_\phi dA$  ل 3 D CV

• أبسط تقريب: لا تزال قاعدة نقطة المنتصف (2nd order)

- ويقترب الحديد على النحو التالي:

$$F_e = \int_{S_e} f_\phi dA$$

Goal: estimate for 3 D CV.

• Simplest approximation: still the midpoint rule (2nd order)

النظام العاليي تقريب ممكن ولكن أكثر تعقيدا لتنفيذ ل 3D

-  $F_e$  is approximated as:

CV

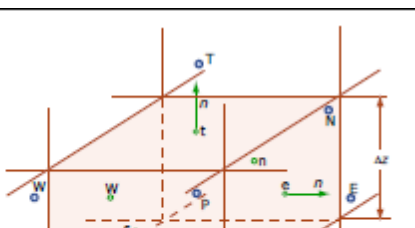
• التكامل السهل إذا يفترض الاختلاف  $F_e = \int_{S_e} f_\phi dA \approx S_e f_e + O(\Delta y^2, \Delta z^2)$

2D أن يكون شكل معين سهل لدمج، على سبيل المثال

• Higher-order approximation possible but more complicated to implement for 3D CV

2D الاستيفاء متعدد الحدود، ثم التكامل

• Integration easy if variation of  $f_e$  over 2D surface is assumed to have specific easy shape to integrate, e.g. 2D polynomial interpolation, then integration



• الهدف: تقدير  $S_\phi = \int_V s_\phi dV$

$$\text{(Fin)} \quad \bar{\Phi} = \frac{1}{V} \int_V \rho \phi dV \quad \text{الأحجام}$$

• أبسط تقريب: المنتج من حجم CV مع القيمة المتوسطة

من الكمية المتكاملة (يقترَب من القيمة في مركز العقدة P)

- يقترَب  $S_p$  على النحو التالي:

• Goal: estimate

$$S_\phi = \int_V s_\phi dV$$

$$S_p = \int_V s_\phi dV = \bar{s}_p V \approx s_p V$$

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{V} \int_V \rho \phi dV$$

• إذا تطابق  $S_p$  هو ثابت أو الخطية داخل CV

• Simplest approximation: product of CV volume with the mean value of the integrand (approximated by the value at the center of the node P)

• الترتيب الثاني على خلاف ذلك

• تتطلب العالي أجل تقريب أكثر من المواقع من مجرد مركز

• ارتفاع تقريبية من أجل:

-  $S_p$  approximated as:

$$S_p = \int_V s_\phi dV = \bar{s}_p V \approx s_p V$$

- يتطلب  $\bar{\Phi}$  القيم في مواقع أخرى من P

- حصل إما عن طريق التحريف القيم العقدية أو باستخدام

• Exact if  $S_p$  is constant or linear within CV

وظائف شكل / متعددة الحدود

• 2nd order accurate otherwise

• النظر في القضية 2D (حجم لا يتجزأ من سطح يتجزأ)

• Higher order approximation require more locations than just the center

باستخدام وظائف الشكل

• Higher order approximations:

- ثنائي التربيعية وظيفة الشكل يؤدي إلى أجل التقريب

- Requires  $\bar{\Phi}$  values at other locations than P

الرابع (9 معاملات)

- Obtained either by interpolating nodal values or by using shape functions/ polynomials

- 9 معاملات التي تم الحصول عليها بواسطة  $s(x,y)$

المناسب إلى 9 مواقع عقدة (مركز، زوايا، المتوسط)،

- للشبكة الديكارتية Cartesian grid ، وهذا يعطي :

- Consider 2D case (volume integral is a surface integral) using shape functions

نظرة عامة

- Bi-quadratic shape function leads to a 4<sup>th</sup> order approximation (9 coefficients)

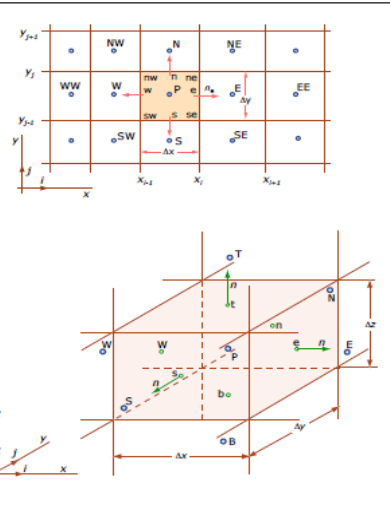
سوى أربعة معاملات (الإعتماد الخطية إلغاء)، لكنها لا تزال تعتمد على القيم العقدية 9

$$s(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8x^2y^2$$

- 9 coefficients obtained by fitting  $s(x,y)$  to 9 node locations (center, corners, middles)
- For Cartesian grid, this gives:

$$S_p = \int_V s_\phi dV = \Delta x \Delta y \left[ a_0 + \frac{a_3}{12} \Delta x \right]$$

Only four coefficients (linear dependences cancel), but they still depend on the 9 nodal values



• 2D سبيل المثال الحالة، تابع

- للشبكة الديكارتية Cartesian grid موحدة، واحد يحصل على 2D لا يتجزأ بوصفها وظيفة من القيم العقدية 9:

- 2D case example:
- For a uniform Cartesian grid,

one obtains the 2D integral as a function of the 9 nodal values: منذ القيمة الوحيدة في العقدة P متاحة، يجب على المرء أن

$$S_P = \int_V s_\phi dV = \frac{\Delta x \Delta y}{36} [16s_P + 4s_s + 4s_n + 4s_w + 4s_e + s_{se} + s_{sw} + s_{ne} + s_{nw}]$$

أقحم الحصول يجب أن يكون على الأقل من أجل الاستيفاء دقيق

Since only value at node P is available, one must interpolate to obtain values at surface locations

للاحتفاظ أجل التقريب المتكامل

Has to be at least 4<sup>th</sup> order accurate interpolation to retain order of integral approximation

- تقنيات مشابهة لحالة 2D: أكثر من أجل التقريب الرابع بمد مباشرة

• 3D case:

- للطلب العالي

- Techniques are similar to 2D case: above 4<sup>th</sup> order approx directly extended

• الصيغ تقريب متكاملة هي أكثر تعقيدا

- For Higher Order

• الاستيفاء من القيم العقدة هي أكثر تعقيدا

- Integral approximation formulas are more complex
- Interpolation of node values are more complex



## Approx. of Surface/Volume Integrals: Classic symbolic formulas

- Surface Integrals  $F_e = \int_{S_e} f_\phi dA$ 
  - 2D problems (1D surface integrals)
    - Midpoint rule (2<sup>nd</sup> order):  $F_e = \int_{S_e} f_\phi dA = \bar{f}_e S_e = f_e S_e + O(\Delta y^2) \approx f_e S_e$
    - Trapezoid rule (2<sup>nd</sup> order):  $F_e = \int_{S_e} f_\phi dA \approx S_e \frac{(f_{ne} + f_{se})}{2} + O(\Delta y^2)$
    - Simpson's rule (4<sup>th</sup> order):  $F_e = \int_{S_e} f_\phi dA \approx S_e \frac{(f_{ne} + 4f_e + f_{se})}{6} + O(\Delta y^4)$
  - 3D problems (2D surface integrals)
    - Midpoint rule (2<sup>nd</sup> order):  $F_e = \int_{S_e} f_\phi dA \approx S_e f_e + O(\Delta y^2, \Delta z^2)$
    - Higher order more complicated to implement in 3D
- Volume Integrals:  $S_\phi = \int_V s_\phi dV$ ,  $\bar{\Phi} = \frac{1}{V} \int_V \rho \phi dV$ 
  - 2D/3D problems, Midpoint rule (2<sup>nd</sup> order):  $S_p = \int_V s_\phi dV = \bar{s}_p V \approx s_p V$
  - 2D, bi-quadratic (4<sup>th</sup> order, Cartesian):  $S_p = \frac{\Delta x \Delta y}{36} [16s_p + 4s_s + 4s_n + 4s_w + 4s_e + s_{se} + s_{sw} + s_{ne} + s_{nw}]$

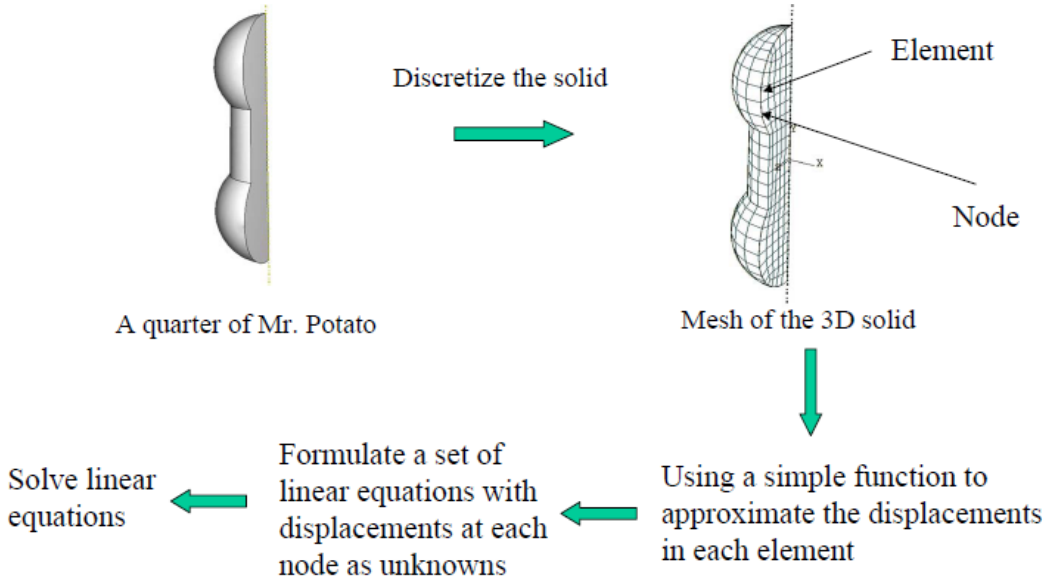




## 9 العناصر المحدودة:

### 9.1 مدخل الى العناصر المحدودة (Finite elements)

علينا أن نحول المعادلة إلى معادلات منفصلة لتطبيق طريقة العناصر المحدودة .



ونحن نعرف المعادلة ولكن لا يمكننا حلها.

Governing Equation:  $L(\phi) + f = 0$

Boundary Conditions:  $B(\phi) + g = 0$

With:



A set of simultaneous algebraic equations

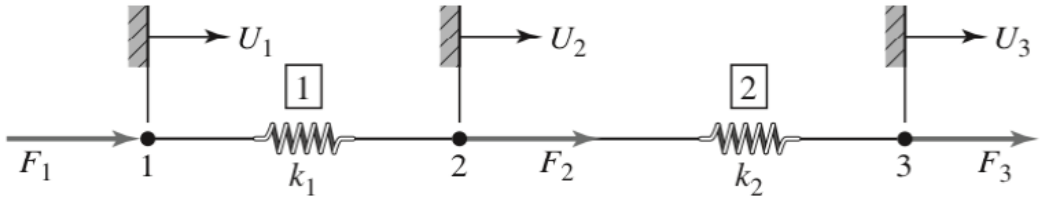
$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\}$$

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \Rightarrow \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{F}\}$$

Property
Behavior
Action

	Property [K]	Behavior {u}	Action {F}
Elastic	stiffness	displacement	force
Thermal	conductivity	temperature	heat source
Fluid	viscosity	velocity	body force
Electrostatic	dielectric permittivity	electric potential	charge

يجب أن نحصل على الشكل التالي:



كتابة المعادلات لكل نابض على شكل مصفوفة:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{للبدأ بجمع معادلات}$$

من نابضين ، تتم كتابة شروط التحرك المتوافق ، التي تبدأ بالتأثر بحركة النابض الواحد وتنتقل لتؤثر على النابض الآخر ، على النحو التالي:

$$u_1^{(1)} = U_1 \quad u_2^{(1)} = U_2 \quad u_1^{(2)} = U_2 \quad u_2^{(2)} = U_3$$

و بالتالي نحصل على الآتي:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

هنا نستخدم تدوين ف<sub>ط</sub> (ي) لتمثيل القوة المبذولة على العنصر ي في عقدة ط.  
توسيع كل المعادلة في شكل مصفوفة:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

هنا نجمع المصفوفات التي يمثل فيها عدد الأسطر، عدد النوابض في كل نسق:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

وبعد ذلك، نشير إلى مخططات الجسم المتحررة من العقد الثلاثة:

$$f_1^{(1)} = F_1 \quad f_2^{(1)} + f_2^{(2)} = F_2 \quad f_3^{(2)} = F_3$$

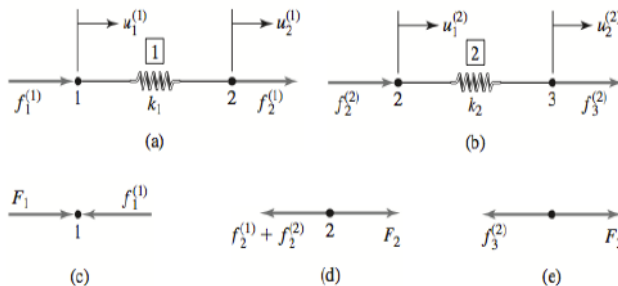
$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

الشكل النهائي:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

حيث مصفوفة ثوابت الجساءة لكل من النابضين هي :

هذا هو الحل لمثال الدعامات



اثنين من العناصر متساوية الطول  $L/2$  مع تحرك عقدة الربط العقدي المرتبطة بها. لعنصر  $A1$

$$A1 = 7A0 / 8$$

أما بالنسبة للعنصر 2، فلدينا:

$$k_1 = \frac{A_1 E}{L_1} = \frac{7A_0 E}{8(L/2)} = \frac{7A_0 E}{4L}$$

بما أن وسط القضيب لا يتعرض لأي نوع من الأحمال ، تصبح معادلات التوازن على العنصرين:

$$A_1 = \frac{5A_0}{8} \quad \text{and} \quad k_2 = \frac{A_2 E}{L_2} = \frac{5A_0 E}{8(L/2)} = \frac{5A_0 E}{4L}$$

تطبيق شرط القيد  $U1 = 0$  النتيجة في:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

## 9.2 مدخل الي طريقة العناصر المنتهية (FEM) في ديناميكيات الموائع الحسائية (CFD)<sup>10</sup>

طريقة العناصر المنتهية (Finite element method) أو يطلق عليها أيضاً تحليل العناصر المنتهية هي طريقة تحليل عددي لإيجاد الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية الجزئية بالإضافة إلى الحلول التكاملية.

أول سمة أساسية هي أن المجال المتواصل ، أو الحقل، يتم تقسيمهم إلى خلايا تسمى العناصر التي تشكل الشبكة. العناصر ( في مساحة ذات بعدين) لديها الثلاثي الشكل و الرباعي الشكل ، ويمكن أن تكون مستقيمة أو منحنية. الشبكة نفسها لا يلزم أن تكون منظمة. مع شبكات غير منتظمة وخلايا منحنية ، يمكن التعامل مع هندسيات معقدة بكل سهولة. والسمة الأساسية الثانية من طريقة العناصر المنتهية هي أن حل مشكلة منفصلة يفترض بدهاءة أن يكون النموذج مُعدًا . الحل يجب أن ينتمي إلى فضاء الوظيفة ، والتي بنيت من خلال تغيير القيم لوظيفة بطريقة معينة، على سبيل المثال خطيا أو تربيعيا بين القيم في نقاط عقدية.

النقاط العقدية ، أو العقد ، هي نقط نموذجية من العناصر مثل القمم ، نقاط جانب المنتصف ، نقاط منتصف العنصر ، وما إلى ذلك ونظرا لهذا الخيار يكون تمثيل الحل مرتبط بشدة مع التمثيل الهندسي داخل المجال. و السمة الأساسية الثالثة هي ان طريقة العناصر المنتهية لا تهتم بالحل في المعادلات التفاضلية الجزئية بحد ذاتها وإنما تهتم بالحل بالاعتماد على المعادلات التكاملية.

<sup>10</sup>[http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%B7%D8%B1%D9%8A%D9%82%D8%A9\\_%D8%A7%D9%84%D8%B9%D9%86%D8%A7%D8%B5%D8%B1\\_%D8%A7%D9%84%D9%85%D9%86%D8%AA%D9%87%D9%8A%D8%A9#.D8.AA.D8.B7.D8.A8.D9.8A.D9.82.D8.A7.D8.AA](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%B7%D8%B1%D9%8A%D9%82%D8%A9_%D8%A7%D9%84%D8%B9%D9%86%D8%A7%D8%B5%D8%B1_%D8%A7%D9%84%D9%85%D9%86%D8%AA%D9%87%D9%8A%D8%A9#.D8.AA.D8.B7.D8.A8.D9.8A.D9.82.D8.A7.D8.AA)

and [Wendt 2009], Ch. 10.

## مدخل الي طريقة العناصر المنتهية (FEM) في ديناميكيات الموائع الحسابية (CFD)

---

السهولة في الحصول على قدر عال من الدقة و السهولة في تنفيذ شروط الحدود تشكل ميزة هامة ثانية لطريقة العناصر المنتهية. و السمة الأساسية الأخيرة لطريقة العناصر المنتهية هي الطريقة النموذجية التي يتم الحصول على التفريد منها. هذه المعادلات المفردة بُنيت من قبل مساهمات على مستوى العنصر والتي يتم تجميعها بعد ذلك.

### 9.3 شرح طريقة العناصر المنتهية

سوف نستخدم مثالين بسيطين لشرح طريقة العناصر المنتهية، والتي من خلالها من الممكن استخلاص الطريقة العامة. في النقاش التالي، يجب على القارئ أن يكون متفهماً لمبادئ علم الحسبان والجبر الخطي.

P1 هي مسألة أحادية البعد، معطاة على الشكل التالي:

$$P1 : \begin{cases} u'' = f \text{ in } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

حيث  $f$  معلوم و  $u$  هو تابع مجهول للمتحول  $x$ ، و  $u''$  هو المشتق الثاني للتابع  $u$  بالنسبة للمتحول  $x$ .

المسألة ثنائية البعد البسيطة هي مسألة ديركلت (Dirichlet) وتعطى على الشكل التالي:

$$P2 : \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

حيث  $\Omega$  هي منطقة مفتوحة متصلة في المستوي الثنائي البعد  $(x, y)$  الذي تكون حدوده  $\partial\Omega$  هي عبارة عن مضلع ذو شكل جميل. و  $u_{xx}$  و  $u_{yy}$  هي المشتقات الثانية للمتحولين  $x$  و  $y$  على الترتيب.

من الممكن حل المسألة أحادية البعد بحساب المشتق العكسي. لكن هذه الطريقة في حل مسألة القيمة الحدية (boundary value problem) تصلح لحل المسائل أحادية البعد ولا يمكن تعميمها إلى مسائل ذات أبعاد أعلى أو مثال لها الشكل  $u + u'' = f$  ولهذا السبب كان من



الضروري تطوير طريقة العناصر المنتهية، بدءاً من البعد الأحادي وتعميمها على الأبعاد الأعلى.

الشرح هنا سوف يتم على مرحلتين والتي تعكس المرحلتين الأساسيتين الواجب تطبيقهما لحل مسألة القيمة الحدية باستخدام طريقة العناصر المنتهية:

الخطوة الأولى: تبسيط مسألة القيمة الحدية (boundary value problem) إلى شكل بسيط تنتفي معه الحاجة إلى استخدام الحاسب للحل، بل يكون من الممكن حلها يدوياً باستخدام الورقة والقلم.

الخطوة الثانية: هي التقطيع، حيث يتم تجزئة الشكل إلى عناصر منتهية وحل كل عنصر على حدة.

بعد هذه الخطوة سيكون لدينا صيغة متكاملة لحل مسائل ذات درجات عالية لكن يجب أن تكون خطية والتي حلولها ستكون حلاً تقريبياً لمسألة القيمة الحدية. ومن ثم يتم برمجة هذه الطريقة على الحاسوب.

## 9.4 الصيغة المتحولية (variational formulation)

Variational formulation = The minimization of an energy integral over the domain.

الصيغة المتحولية هي صيغة طبيعية تكاملية لطريقة العناصر المنتهية (FEM) و لكن في ميدان الميكانيك الموائع - بشكل عام - هو غير ممكن ان توضع الصيغة المتحولية (variational formulation).

الخطوة الأولى هو تحويل P1 و P2 إلى مكافئتها المتحولية. إذا كان  $u$  هو حل لـ P1 ، عندها من أجل أي دالة متصلة  $v$  يحقق شروط الانتقال الحدي، مثلاً  $v = 0$  عند  $x = 0$  و  $x = 1$ ، يكون لدينا

$$(1)$$

وبشكل معاكس، من أجل قيمة معطاة لـ  $u$  فإن (1) تكون محققة من أجل أي دالة متصلة  $v(x)$  وعندها من الممكن أن يبرهن أن  $u$  ستكون حلاً لـ P1 برهان هذا ليس بالأمر السهل وهو يعتمد على فضاء سوبوليف.

وباستخدام التكامل بالأجزاء على يمين المعادلة (1) سنحصل على مايلي:

$$(2)$$

حيث تم افتراض أن  $v(0) = v(1) = 0$ .

### برهان يظهر وجود حل وحيد

بجاء  $(0,1)$  هو عبارة عن تابع مستمر مطلق للثنائية  $H_0^1(0,1)$  من الممكن اعتبار أن مثل هذه التوابع تكون ضعيفة (قابلة). (فضاء سوبوليف انظر)  $x = 0$  و  $x = 1$  عند  $0$  أن جداء ومن ثم تعرف  $\phi$  للاشتقاق مرة واحدة) وتكشف عن الخريطة الخطية الثنائية المتناظرة ومن ناحية أخرى، فإن الطرف فضاء هلبرت إلى  $H_0^1(0,1)$  الذي يحول داخلي

الفضاء، ولكن هذه المرة على جداء داخلي هو أيضاً  $\int_0^1 f(x)v(x)dx$  الأيسر

على فضاءات هلبرت يظهر أنه يوجد حل لمبرهنة تمثيل رايسز وتطبيق  $L^2(0, 1)$  على  $L^p$  P1. وبالتالي يحل المسألة  $u$  وحيد

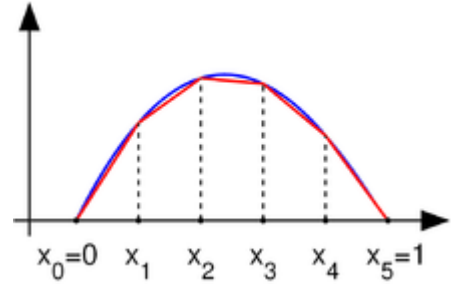
### الصيغة المتحولة لP2

إذا تم التكامل بالأجزاء باستخدام مبرهنة غرين حيث نجد أنه إذا كان  $u$  هو حل لP2 ، فإنه من أجل أي  $v$  يكون

$$\int_{\Omega} f v ds = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v ds = -\phi(u, v),$$

حيث  $\nabla$  تحقق التدرج وترمز إلى الجداء الداخلي في المستوي ثنائي البعد.

### 9.5 التقطيع (Discretization)



التابع  $H^1_0$  مع القيم الصفرية عند نقاط النهاية (زرقاء)، والتقريب الخطي الجزئي للمنحني (حمراء).

الفكرة الأساسية في طريقة العناصر المنتهية هو استبدال المسألة الخطية ذات الأبعاد اللانهائية:

أوجد قيمة  $u \in H^1_0$  بحيث أن

$$\forall v \in H_0^1, -\phi(u, v) = \int f v$$

بصيغة بعدية منتهية:

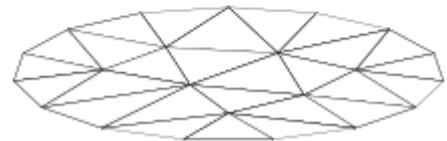
such that  $u \in V$  وجد (3)

$$\forall v \in V, -\phi(u, v) = \int f v$$

حيث  $V$  هو فضاء جزئي خطي ذو عدد أبعاد منته من  $H_0^1$ . هناك العديد من الخيارات لـ  $V$ . لكن في طريقة العناصر المنتهية نعتبر  $V$  على أنها فضاء للأجزاء الخطية للتابع.

في المسألة P1، نأخذ المقطع  $(0,1)$  باختيار  $n$  قيم من  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$  ونعرف  $V$  على الشكل:

$$V = \{v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ is continuous, } v|_{[x_k, x_{k+1}]} \text{ is linear for } k = 0, \dots, n, \text{ and } v(0) = v(1) = 0\}$$



حيث نعرف  $x_0 = 0$  و  $x_{n+1} = 1$  لاحظ أن التتابع في  $V$  هي توابع غير قابلة للاشتقاق بالاعتماد على التعريف المبدئي للحسابان. إذا كان  $v \in V$  فإن المشتق يكون عادة غير معرف عند أي  $x = x_k, k = 1, \dots, n$ . لكن يوجد مشتق عند كل قيمة للمتحول  $x$  ومن الممكن استخدام هذا المشتق لغرض التكامل بالأجزاء.

تابع خطي مقطع في المستوي ثنائي الأبعاد.

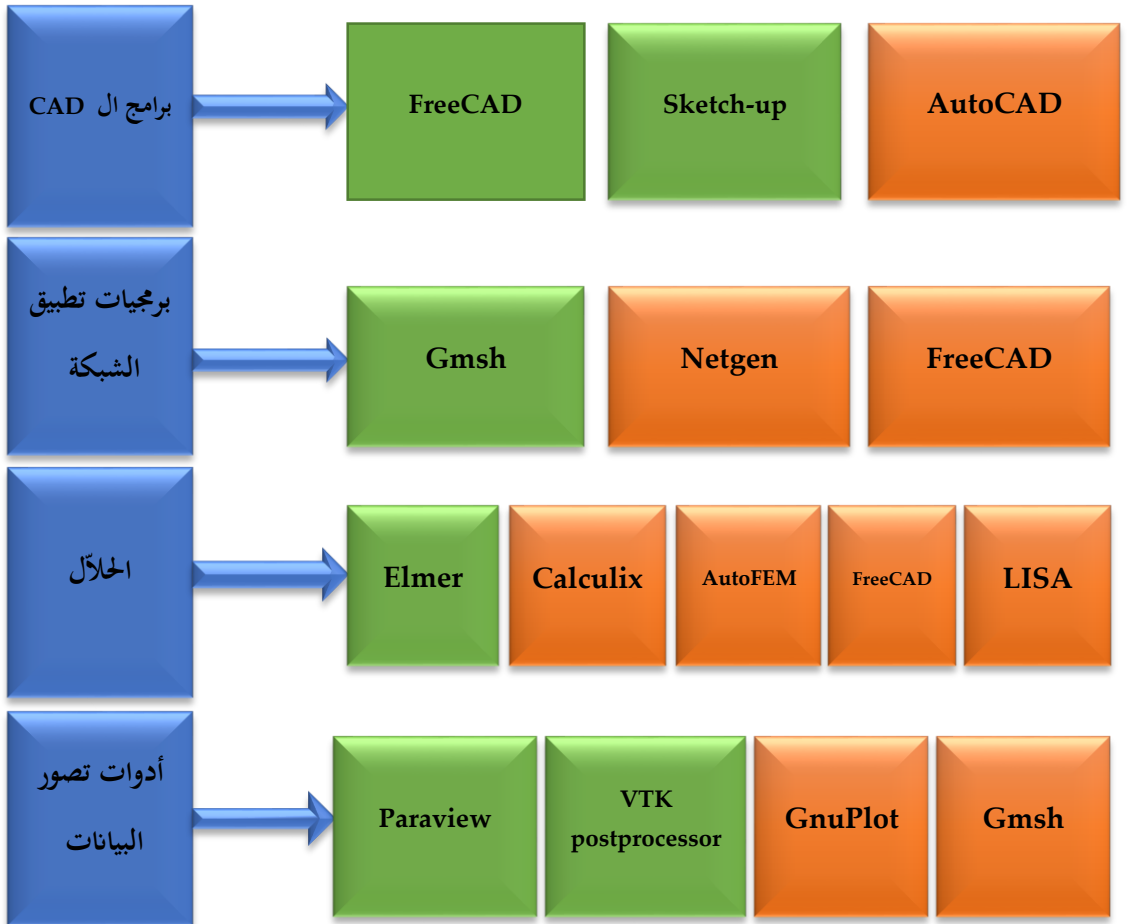
من أجل المسألة P2 نحتاج أن تكون  $V$  عبارة عن مجموعة من التتابع من  $\Omega$  في الشكل الموضح على اليسار، يظهر تثليث مضلعي لمنطقة مضلعية من 15 ضلع  $\Omega$  في المستوي (في الأسفل)، والتابع الخطي الجزأ (ملوناً، في الأعلى) لهذا المضلع الذي يكون خطياً على كل مثلث من التثليث. حيث أن الفضاء  $V$  سيحتوي على توابع تكون خطية على كل مثلث من التثليث المختار.

تظهر  $V$  مكتوبة على الشكل  $V_h$  في بعض المراجع، وذلك بسبب أنه يوجد هدف في الحصول على حلول أدق وأدق للمسألة المتقطعة (3) الذي سيكون إلى حد ما سيؤدي إلى حد المسألة الأصلية في إيجاد القيم الحدية للمسألة P2. يتم عنونة التثليث باستخدام معامل ذو قيمة حقيقية  $h > 0$  والذي يكون ذو قيمة صغيرة. سوف يتم ربط هذا المعامل بحجم أكبر مثلث وسطي الحجم في التثليث. وعندما نزيد تجزئة التثليث فإن فضاء التقطيع الخطي  $V$  يجب أن يتغير مع  $h$  كما يوضح الترميز  $V_h$ .



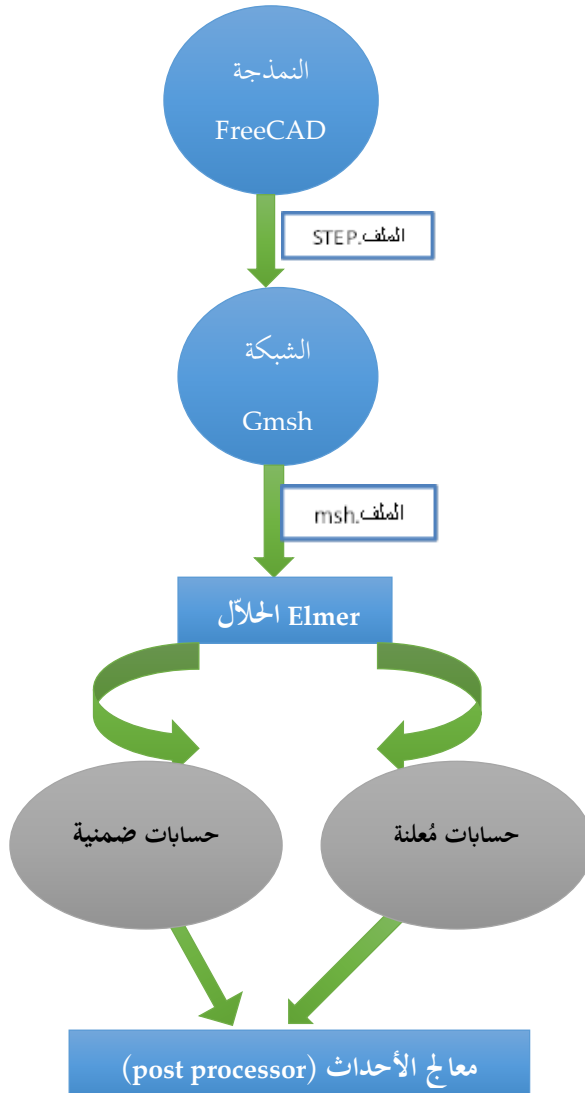
## 10 البرمجيات المستخدمة في النمذجة والمحاكاة

استخدمنا العديد من البرامج في هذه الدراسة ، و اعتمدنا استراتيجيات مختلفة لتحقيق هذا العمل ( بشأن التصميم، و وضع الشبكة ، و الحل و التصور للنائج ) .  
في التخطيطي المبين أدناه وصف لسلسلة من الأدوات المستخدمة . تم تلوين الأدوات المعتمدة في هذه الأطروحة باللون الأخضر و اللاتي ملونة باللون الأحمر كانت معتمدة لفترة لا بأس بها من أجل التجربة ولكن في النهاية لم يتم اعتمادها إما لأنها ليست مجانية أو لأنها لاتعتبر من المصادر المفتوحة أو لأنها محدودة جدا ولا يمكن أن تدعم قيمة كبيرة من البيانات.



### 10.1 تنسيق الملفات (format of files)

واحدة من الصعوبات التي واجهتنا هي مشكلة الانتقال من برنامج إلى آخر . عادة يحفظ البرنامج تنسيق لا يستجيب له البرنامج الآخر، و هنا تظهر الحاجة لاكتشاف ما هي الصيغة المقبولة من قبل البرنامج كمدخل، و البرامج التعليمية لا تذكر هذه التفاصيل وهنا يبدأ العمل لاكتشاف الشكل المناسب .





## 10.2 القيام بالنموذج

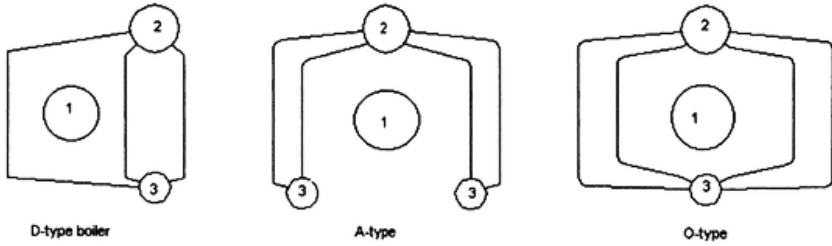
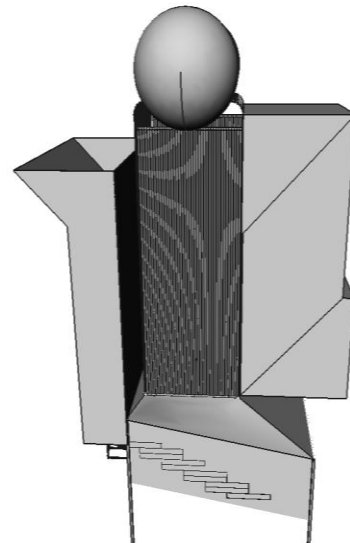
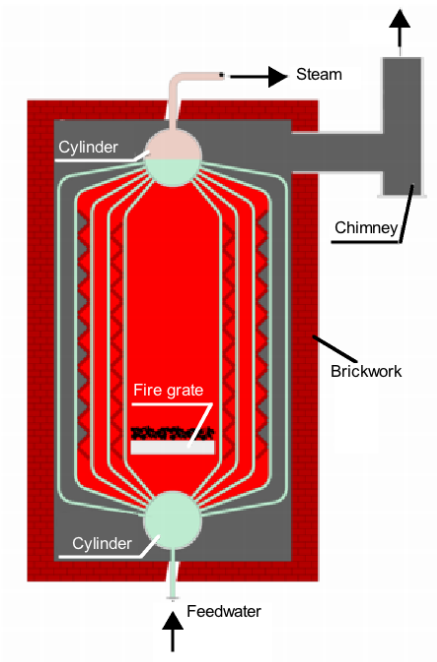


Figure 2.2.1: A-, D- and O-type boiler configurations. 1. Burner; 2. Steam drum; 3. Water drum

عدة نماذج موجودة في الدراسات، وقد اعتمدنا في هذه الدراسة الشكل الأكثر بساطة لتسهيل عملية التصنيع سيما و أن صناعة المحرقة ستكون محلية.



### 10.3 تطبيق الشبكة على النموذج

لوضع الشبكة على نموذج المحرقة المصمم عبر برنامج FreeCAD، اعتمدنا بداية البرنامج عينه أقصد FreeCAD ، ولكن تبين لنا أن هذا البرنامج غير قادر على إنجاز الشبكة على كامل النموذج وإنما على عنصر واحد فقط، هذا البرنامج لازال تحت التطوير و ربما في السنوات المقبلة يصبح قادرا على القيام بمثل هكذا مهمة.

وبدأنا البحث عن برمجيات قادرة على القيام بما عجز عنه برنامج FreeCAD ،وبالفعل وجدنا العديد من البرمجيات منها Netgen و Gmsh . جميعها مجانية وتدرج تحت المصادر المفتوحة.

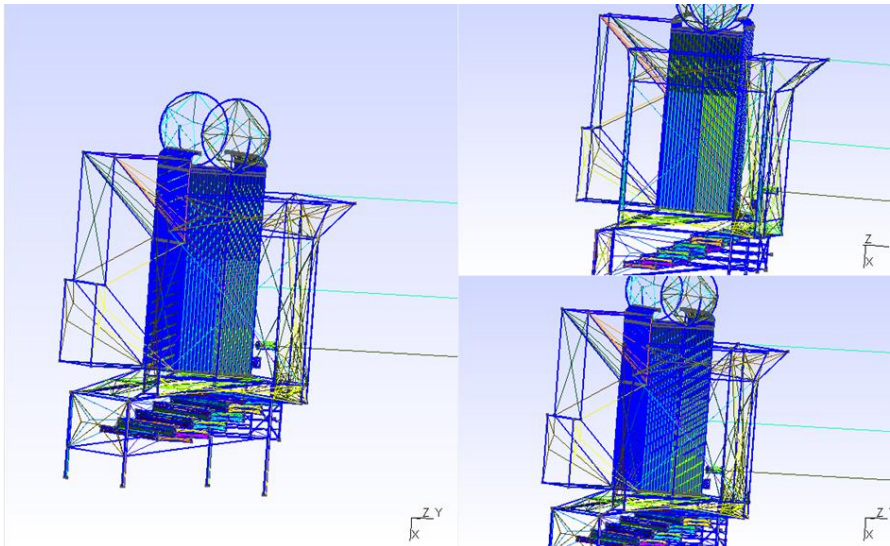
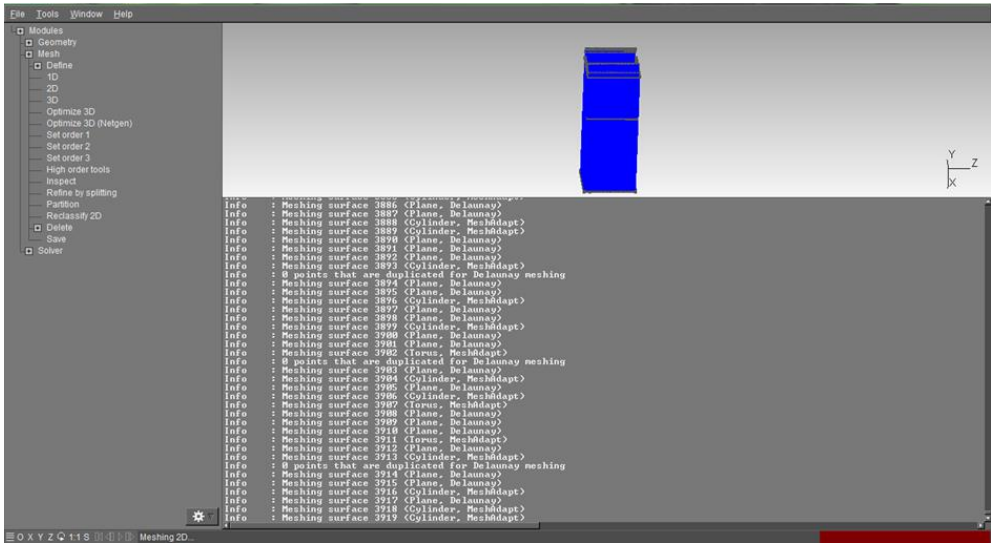
حاولنا كل هذه البرامج و وجدنا أن الأفضل هو Gmsh من وجهة نظر السرعة و إمكانية تحديد نوع الشكل في FEM وقدرته على وضع الشبكة على نموذج معقد في وقت قصير نسبيا مقارنة مع البرمجيات الأخرى .

بُني Gmsh حول أربع وحدات: الهندسة ، التشبيك، الحلّالا ومعالج الأحداث . يمكن السيطرة على كل وحدة إما بشكل تفاعلي باستخدام واجهة المستخدم الرسومية أو باستخدام لغة البرمجة .

تصميم جميع الوحدات الأربع يعتمد على فلسفة بسيطة تكون سريعة وخفيفة و سهلة الاستعمال .

- السرعة : على جهاز كمبيوتر شخصي قياسي في أي لحظة معينة من الزمن ينبغي إطلاق Gmsh على الفور ، وتكون قادرة على وضع الشبكة بسرعة تصل إلى وضع مليون رباعي الأسطح في دقيقة واحدة .

- الذاكرة: يجب أن يكون أثر الذاكرة من تطبيق الحد الأدنى و يجب أن يكون رمز مصدر صغير بما فيه الكفاية بحيث مطور واحد يمكن أن يفهم ذلك. تثبيت أو تشغيل البرنامج يجب أن لا يعتمد على أي حزمة برامج طرف ثالث غير متوفرة على نطاق واسع .
- سهولة الاستعمال : تصميم واجهة المستخدم الرسومية تسمح للمستخدم الجديد بإنشاء شبكات بسيطة في غضون دقائق .



**Elmer 10.4 الحلّال**

Elmer هو مزيج من برامج مختلفة تهدف إلى محاكاة مشاكل فيزيائية باستخدام طريقته العناصر المحددة ( FEM ) . ثلاثة من هذه البرامج هي : ElmerGUI ، ElmerSolver ، ElmerPost . المر هو برنامج مفتوح المصدر ، الذي صدر تحت رخصة جنو العمومية ( GPL ) .

Elmer يمكن استخدامه بطريقتين مختلفتين :

- باستخدام واجهة المستخدم الرسومية ( GUI ) . ( يمكن إنشاء ملف نص الأمر بعد جلسة GUI ) .
- باستخدام ملف نص الأمر

Elmer لا يملك القدرة لتوليد الهندسة و التشبيك . ولذلك، كإجراء عام، يجب أن يتم استيراد الهندسة و الشبكة إلى Elmer .

Elmer يقبل الهندسة وشبكات مختلفة الأشكال . من بينها، فإنه يقبل شكل شبكة GMSH .

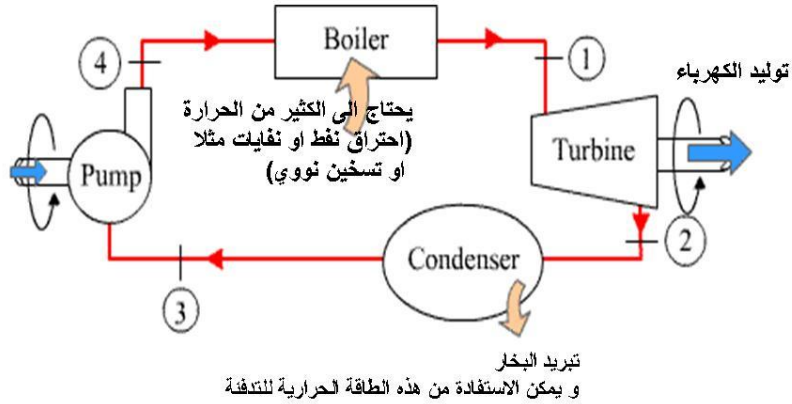
في أطروحة الماجستير هذه واحدة من المهام الأكثر أهمية هو تحديد موقع المنطقة التي تتعرض لضغوط عالية .

## 11 استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة في ميدان ديناميكيات الموائع الحسابية

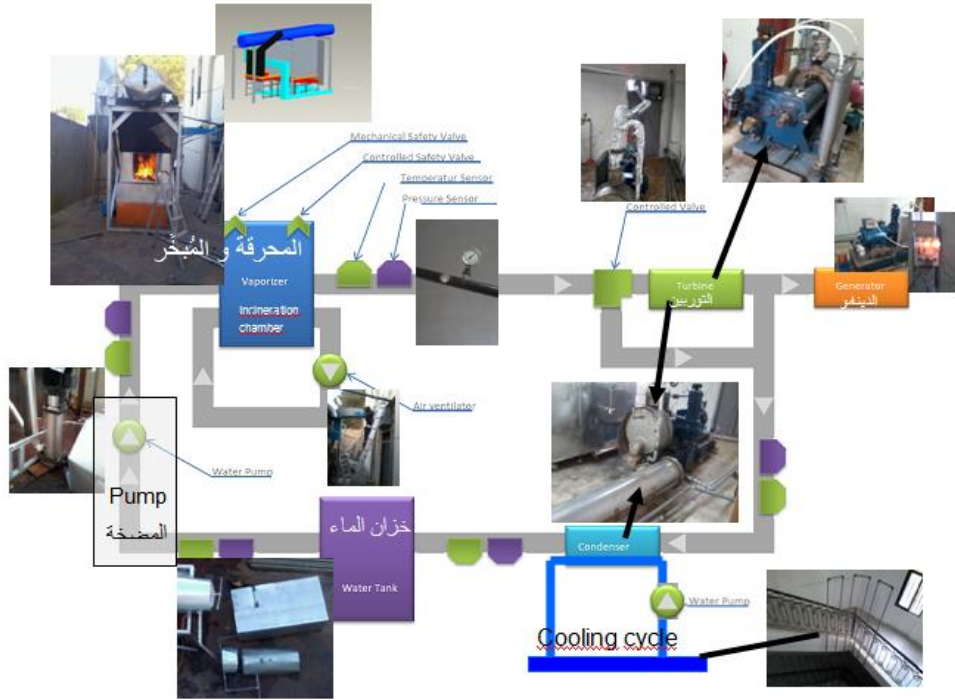
### 11.1 تحسب سريان الماء داخل محطة طاقة تعمل على البخار ببرامج جاهزة

#### محطة طاقة مع توربين تعمل على البخار بشكل عام

- دورة الماء مُغلقة و تتغير حالة الماء ما بين سائل و بخار .
- وظيفة المحطة هي نقل الطاقة الحرارية الى طاقة كهربائية.

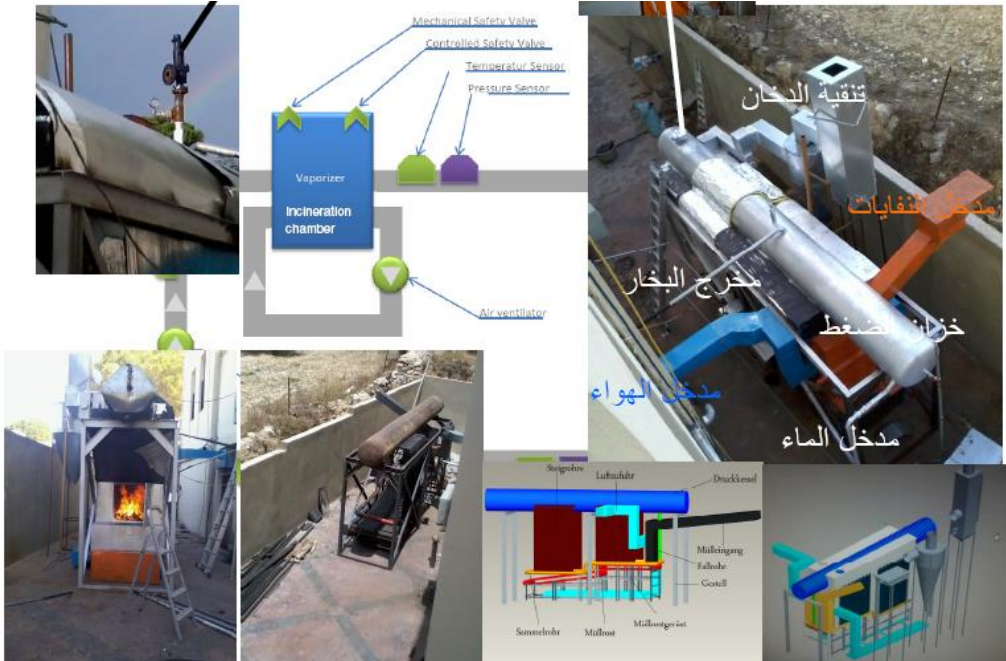


## 11.1.1 محطة طاقة عن طريق حرق النفايات لتبخير الماء قرب طرابلس الشام



تدخل النفايات الى المحرقة عن طريق المدخل المخصص لها. تحرق النفايات فيتسخن الماء الموجود في الخزان فوق المحرقة حتى يصل الماء الى درجة التبخر. عندما يصل ضغط البخار الى 14 بار تُفتح الصمامة والبخار يجري الى التوربين ويولد الكهرباء. يخرج البخار من التوربين الى المكثف حيث يرجع ماءً. هذه الماء تعود الى الخزان البارد و منه عن طريق المضخة مرة اخرى الى خزان المبخر.

## استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة في ميدان ديناميكيات الموائع الحسابية



محطة الطاقة التجارية في راسنحاش - البترون قرب طرابلس في شمال لبنان تولد كهرباء عن طريق حرق الخشب او النفايات

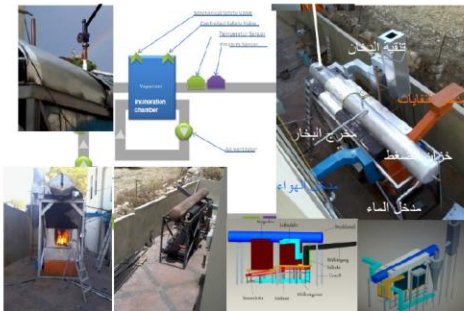


## 11.1.2 مسألة تكبير حجم حتى تستخدم للتخلص من نفايات احدى المدن الكبرى وتغزيتها بالكهرباء



Ras Nhache/Batroun - Tripoli, 11<sup>th</sup> Jan 2015

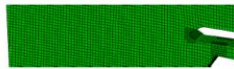
### TEMO-IPP Incineration Demonstration Plant Ras Nhache/Batroun, Lebanon



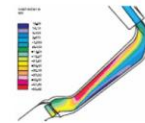
Upscaled vaporizer train element (TEMO-IPP has to be upscaled in such a way) (picture is from Dr.-Ing. M. Franz, "Dampferzeuger", www.axpoholz.ch/Dampferzeuger.pdf)

Vaporizer of TEMO-IPP incineration demonstration plant at Ras Nhache/Batroun

CFD Analysis step 1: Upscaling CAD Model of vaporizer (to be done by student working on Master Thesis *Mechanical Analysis of an upscaled version of the Vaporizer (pressure vessel and circulation tubes) of the incineration pilot power plant TEMO-IPP*)



CFD Analysis step 2: Grid generation



CFD Analysis step 3: Calculated water/steam flow

#### Master Thesis

### Computational Fluid Dynamics (CFD) Analysis for Water/Steam flow in an upscaled version of the vaporizer of incineration power plant TEMO-IPP

To be able to upscale the TEMO-IPP incineration plant to a commercial incineration plant (about 40 MW) in Tripoli or elsewhere in North Lebanon critical components shall be verified by Computational Fluid Dynamics with the tool Abaqus. The main critical component is the pressure vessel with about 100 bar pressure difference. Working packages:

1. CAD Modeling	2. Mesh Generation	3. Solver	4. Visualization	5. Documentation
Upscaling CAD Model with ProE (to be done by other student – see above)	A mesh generation C++ code shall be taken from the open source code OpenFoam and migrated to TEMO_IPP-CFD tool.	A finite difference and a finite volume C++ code shall be taken from the open source code OpenFoam and migrated to TEMO_IPP-CFD tool.	Shall be done with the tool Paraview	
	4 weeks	6 weeks	4 weeks	3 weeks

Keywords: Alternative Energy, Steam Generation in power plant, Computational Fluid Dynamics (CFD), OpenFoam, C++

Contact: Samir Mourad, Email: [samir.mourad@aecenar.com](mailto:samir.mourad@aecenar.com)

### 11.1.3 حل المسألة

العمل على برمجيات FreeCAD, Gmsh, Elmer, لدراسة السلوك الميكانيكي و حركة البخار على حد سواء في المبخر.

دراستنا هي جريان الماء داخل انابيب محرقة لمحطة طاقة تعمل على حرق النفايات، لذلك يجب علينا ادخال تصميم جزء من هذه المحطة. هذا التصميم هو تصميم انشئ ببرنامج FreeCAD ولذلك علينا ان ننقل تصميم FreeCAD إلى OpenFOAM قبل التشغيل البرنامج.

#### OpenFOAM للحل:

مشكلتنا الآن هو كيف يمكننا أن نفعل هذا النقل:

أولاً؛ نفتح تصميم freeCAD على OpenFOAM ونحاول استخدام file.VTK لكننا لا نحصل على نتيجة.

ثانياً؛ نحاول نقل الملف على paraview ثم على OpenFOAM، لكننا لا نحصل على نتيجة أيضاً.

ثالثاً؛ نحن نبحث على الانترنت عن بعض الرموز، ونحن نحاول التحقق من ذلك، ولكن لا نتيجة.

رابعاً؛ نحاول إنشاء مجلد جديد نسميه اسطوانة للقيام ببعض التجارب، و نقدم الشروط بالاحرف الاولى (U-p)، وحالة النظام (fvSolutions- fvSchemes-

controlDict)، ولكن في polyMesh في مجلد الثوابت ندرج الإحداثيات الجديدة ل الملف freeCAD غير المقروء من قبل OpenFOAM.

وجدنا رمز stl. لكن نستنتج أن هذا الرمز هو رمز عكسي يمكننا من النقل من OpenFOAM إلى freeCAD.

نحن نحاول نقل احداثيات freeCAD ل OpenFAOM مباشرة ولكن البرنامج لا يقرأها.

حولنا ملف البرنامج FOAM ل vtkp . (foamToVTKP) والبرنامج لا يزال غير مقروء.

نحن نبحث كيف يمكننا قراءة رموز freeCAD باستخدام Visual C++ ولكن Visual C++ لا يمكن فتح رموز freeCAD.

نستخدم (.ast) رمز للملف لكنها ليست مقروءة من OpenFOAM.

ندرج ماكرو macro في FreeCAD لعرض إحداثيات محطة الحرق للطاقة في OpenFAOM ولكن لا يمكن قراءة الإحداثيات.

باستخدام Gmsh in OpenFOAM محلا:

وجدنا أن Gmsh يجتمع مع OpenFOAM بالتالي فإننا نثبت Gmsh في Linux.

تركيب Gmsh:

الطريقة الأولى لحل:

1. فتح محطة (استخدام سطر الأوامر) في إطار Linux

2. تصور الدليل README.text

3. تشغيل برنامج

• إنشاء دليل البناء (build): MKDIR بناء.

• cmake تشغيل من ضمن الدليل بناء: cd build

.. cmake

4. بناء Gmsh باستخدام واجهة المستخدم الرسومية ل CMake.

• CMake ملء -----في.

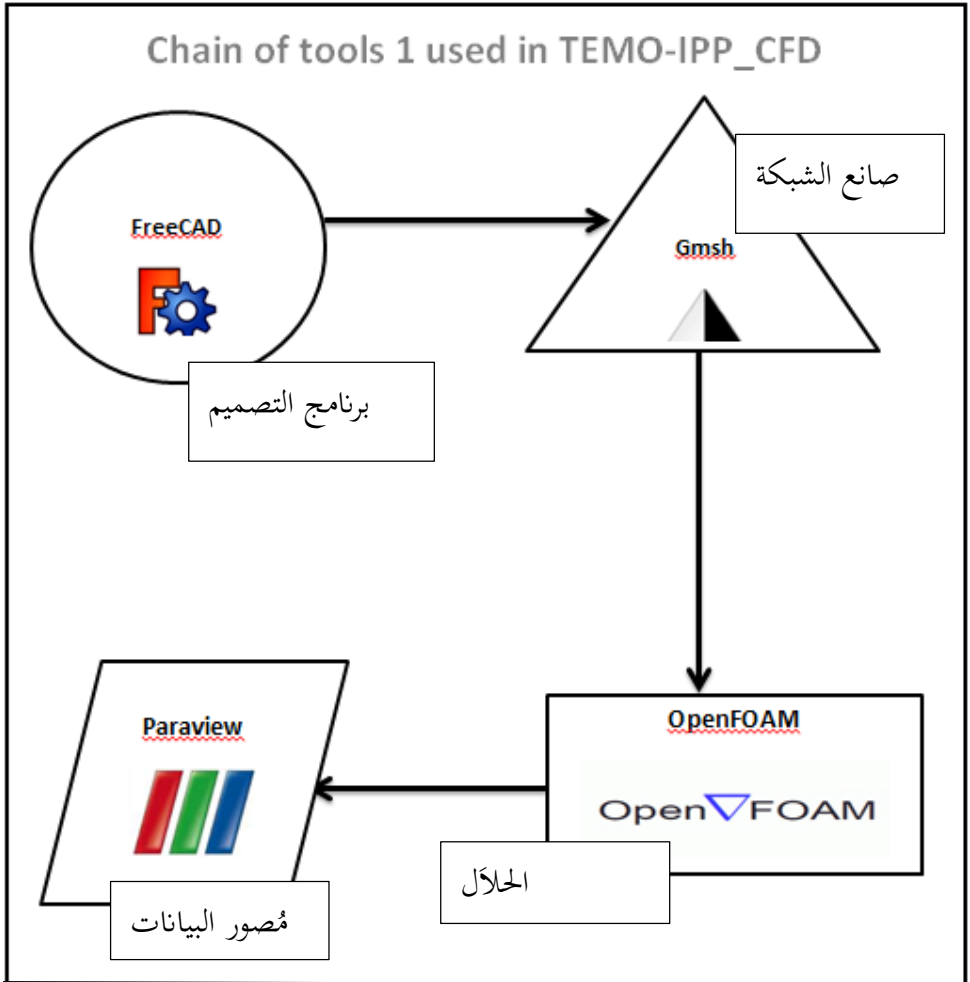
• إضافة الدخول ("CMake\_PREFIX\_PATH"PATH).

• "تكوين" من اختيار المترجم.

• لدينا لإعادة تشغيل "تكوين" في كل مرة نغير بعض الخيارات.

• "إنشاء".

- بناء Gmsh باستخدام مترجم المختار.



Chain 1: OpenFOAM باستخدام 1 سلسلة الأدوات

نقوم بتحميل نسخة Gmsh الجديد (gmsh-2.6.1-source.tgz)

تشغيل gmsh:

استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة في ميدان ديناميكيات الموائع الحاسوبية

---

الملف المحتمل-zxv vf gmsH-2.6.1-source.tgz

ثم يتم بناؤه في دليل البناء (build) منفصل وتحويلنا مع:

```
MKDIR build-gmsH
```

```
Cd build-gmsH
```

تم تكوين GMSH مع:

```
ccmake -i ../gmsH-2.6.1-source
```

ثم 'c' لتكوين، 'c' مرة أخرى لتكوين، 'g' لتوليد. إذا واجهت 'مساعدة' الشاشات،

اضغط على 'e' للخروج منها.

ثم يتم ترجمة GMSH وتثبيتها مع:

```
make
```

```
sudo make install
```

```

Make Error at /home/meae/OpenFOAM/ThirdParty-1.6/cmake-2.6.4/platforms/linux/share/cmake-2.6/Modules/CMakeDetermineSystem.cmake:138 (FILE):
file Internal CMake error when trying to open file:
/home/meae/gmsh-2.6.1-source/CMakeFiles/CMakeOutput.log for writing.
Call Stack (most recent call first):
  CMakeLists.txt:17 (project)

Make Error: Could not open file for write in copy operation /home/meae/gmsh-2.6.1-source/CMakeFiles/CMakeSystem.cmake.tmp

Make Error: : System Error: No such file or directory

Make Error at /home/meae/OpenFOAM/ThirdParty-1.6/cmake-2.6.4/platforms/linux/share/cmake-2.6/Modules/CMakeDetermineSystem.cmake:150 (CONFIGURE_FILE):
configure_file Problem configuring file
Call Stack (most recent call first):
  CMakeLists.txt:17 (project)

Make Error at /home/meae/OpenFOAM/ThirdParty-1.6/cmake-2.6.4/platforms/linux/share/cmake-2.6/Modules/CMakeDetermineCompilerId.cmake:63 (FILE):
file problem creating directory:
/home/meae/gmsh-2.6.1-source/CMakeFiles/CompilerIdCXX
Call Stack (most recent call first):
  /home/meae/OpenFOAM/ThirdParty-1.6/cmake-2.6.4/platforms/linux/share/cmake-2.6/Modules/CMakeDetermineCompilerId.cmake:25 (CMAKE_DETERMINE_COMPILER_ID_BUILD)
  /home/meae/OpenFOAM/ThirdParty-1.6/cmake-2.6.4/platforms/linux/share/cmake-2.6/Modules/CMakeDetermineCXXCompiler.cmake:128 (CMAKE_DETERMINE_COMPILER_ID)
  CMakeLists.txt:17 (project)

Make Error at /home/meae/OpenFOAM/ThirdParty-1.6/cmake-2.6.4/platforms/linux/share/cmake-2.6/Modules/CMakeDetermineCompilerId.cmake:63 (FILE):
file problem creating directory:
/home/meae/gmsh-2.6.1-source/CMakeFiles/CompilerIdCXX
Call Stack (most recent call first):
  /home/meae/OpenFOAM/ThirdParty-1.6/cmake-2.6.4/platforms/linux/share/cmake-2.6/Modules/CMakeDetermineCompilerId.cmake:25 (CMAKE_DETERMINE_COMPILER_ID_BUILD)
  /home/meae/OpenFOAM/ThirdParty-1.6/cmake-2.6.4/platforms/linux/share/cmake-2.6/Modules/CMakeDetermineCXXCompiler.cmake:128 (CMAKE_DETERMINE_COMPILER_ID)
  CMakeLists.txt:17 (project)

Errors occurred during the last pass
CMake Version 2.6 - patch 4
Press [e] to exit help

```

Figure 11.1.3-1: تثبيت gmsh على نظام التشغيل Linux- Red Hat

وجدنا بعض المشاكل التي تواجهنا لتثبيت gmsh على Redhat التي لا تحتوي على "تكوين" وعلينا تثبيت cmake التي لا تتطابق مع نسختنا Redhat.

نقوم بتحميل Linux-gmsh-2.9.3 ، في نسخة Ubuntu، ثم نجد ملفين (ben و share) إدخال ملف ben وجدنا (gmsh\*) نكتب (./gmsh) و gmsh تثبت.

## استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة في ميدان ديناميكيات الموائع الحاسوبية

```

-rw-rw-r-- 1 lap lap 100505 May 6 09:56 Re_El_Heoun_04052015.pdf
-rw-rw-r-- 1 lap lap 0 Mar 27 2014 touch6517
lap@lap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads$ cd CMakeFiles/
lap@lap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads/CMakeFiles$ ll
total 12
drwxrwxr-x 2 lap lap 4096 May 25 11:06 ./
drwxr-xr-x 6 lap lap 4096 May 25 11:09 ../
-rw-rw-r-- 1 lap lap 85 May 25 11:09 cmake.check_cache
lap@lap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads/CMakeFiles$ cd ..
lap@lap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads$ cmake -i gms
gms-2.8.5-dfsg-1.ubuntu1.dsc gms-2.9.3-Linux64.tgz
gms-2.8.5-dfsg.orig.tar.xz gms-build/
gms-2.9.3-Linux/
lap@lap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads$ cmake -i gms
gms-2.8.5-dfsg-1.ubuntu1.dsc gms-2.9.3-Linux64.tgz
gms-2.8.5-dfsg.orig.tar.xz gms-build/
gms-2.9.3-Linux/
lap@lap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads$ cmake -i gms-
gms-2.9.3-Linux/ gms-2.9.3-Linux64.tgz gms-build/
lap@lap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads$ cmake -i gms-2.9.3-Linux
Would you like to see advanced options? [No]:
Please wait while cmake processes CMakeLists.txt files....

CMake Error: The source directory "/home/lap/Downloads/gms-2.9.3-Linux" does no
t appear to contain CMakeLists.txt.
Specify --help for usage, or press the help button on the CMake GUI.

lap@lap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads$ cd gms-2.9.3-Linux/
lap@lap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads/gms-2.9.3-Linux$ ll
total 16
drwxrwxr-x 4 lap lap 4096 May 25 11:08 ./
drwxr-xr-x 6 lap lap 4096 May 25 12:42 ../
drwxrwxr-x 2 lap lap 4096 May 25 10:39 bin/
drwxrwxr-x 4 lap lap 4096 May 25 10:39 share/
lap@lap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads/gms-2.9.3-Linux$ cd bin/
lap@lap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads/gms-2.9.3-Linux/bin$ ll
total 66408
drwxrwxr-x 2 lap lap 4096 May 25 10:39 ./
drwxrwxr-x 4 lap lap 4096 May 25 11:08 ../
-rwxr-xr-x 1 lap lap 67972608 Apr 18 10:45 gms*
-rw-r--r-- 1 lap lap 19059 Mar 17 18:03 onelab.py
lap@lap-HP-G62-Notebook-PC:~/Downloads/gms-2.9.3-Linux/bin$ ./gms

```

Figure 11.1.3-2: تحميل Gms على نظام التشغيل Linux- Ubuntu 14.04

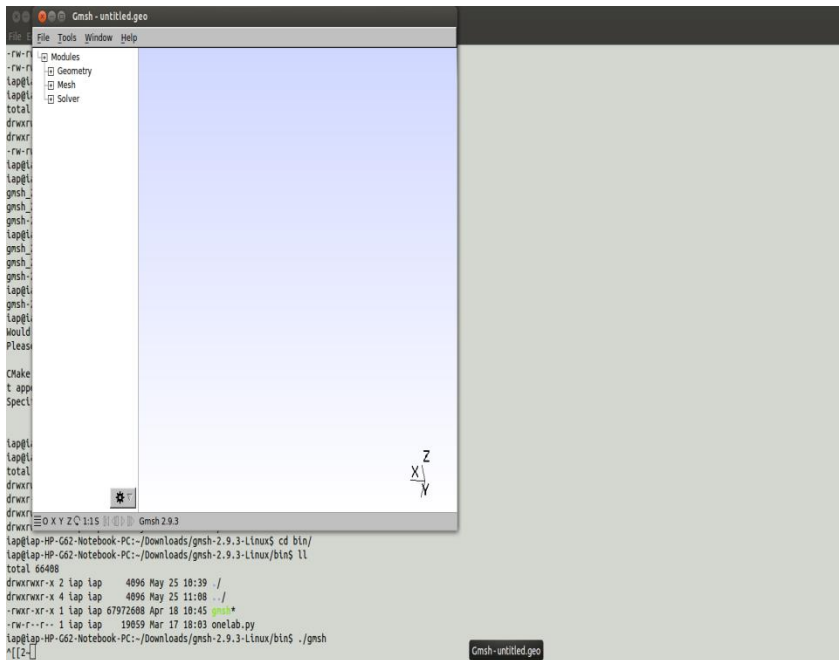
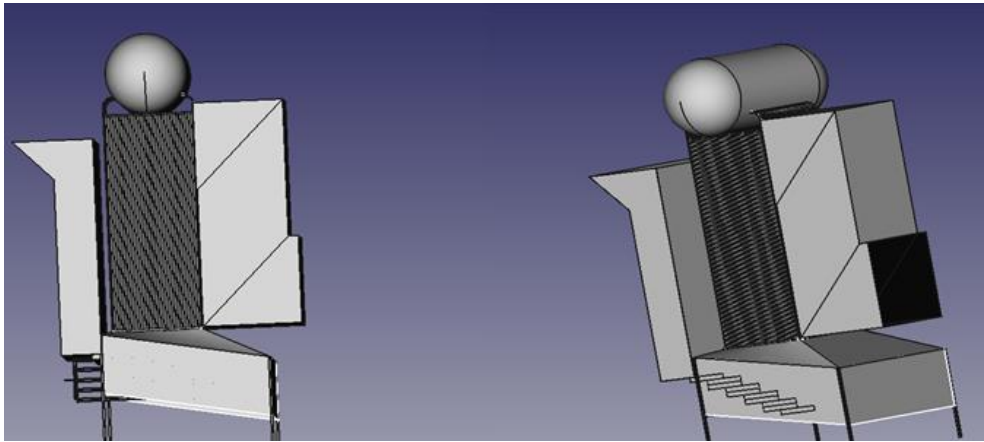


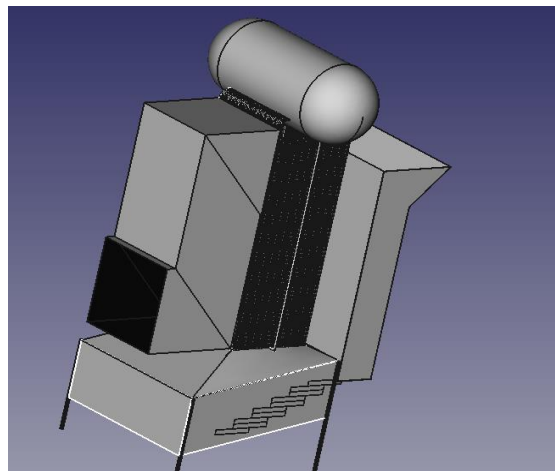
Figure 11.1.3-3: واجهة برمجة Gms على نظام التشغيل Linux\_Ubuntu 14.04



تصميم محطة للطاقة الحرق في برنامج FreeCAD:



التصميم FreeCAD: Figure 11.1.3-4



التصميم FreeCAD: Figure 11.1.3-5

نحصل على شبكة باستخدام Gmsh:

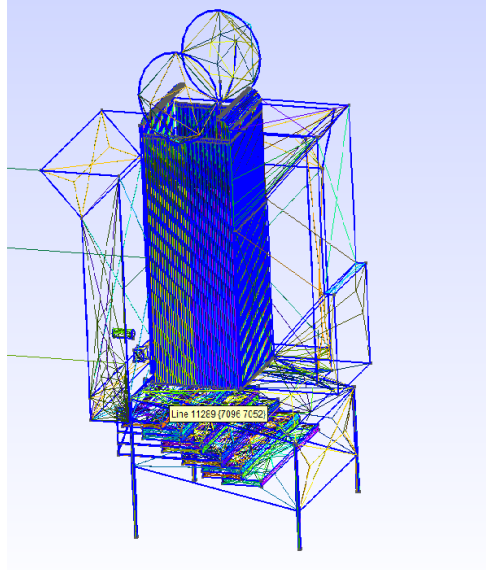


Figure 11.1.3-6: Gmsh التشبيك للتصميم عبر

A. الآن نحاول نقل شبكة ل OpenFOAM:

1. gmshToFoam: لا يستجيب.

2. Cp -r

\$FOAM\_TUTORIALS/incompressible/icoFoam/cavity

{files.msh name} ./:/\* لا يستجيب.

B. لقراءة gmsh ملف msh التي كتبها OpenFOAM نتبع الأوامر:

1. Gmsh main.geo -3 0 file.msh

2. case-vaporisor gmshToFoam file.msh

3. blockMesh

4. icoFoam

5. paraFoam

ولكنه لا يؤثر.

C. تغيير file.msh إلى file.STL لحلها باستخدام snappyMesh ولكنه لا

يؤثر.

D. نتبع طريقة أخرى:

1. جعل مجلد جديد في icoFoam

2. نسخ الظروف الأولية في هذا المجلد من آخر وجود البرنامج التعليمي

3. نسخ file.msh في هذا المجلد

4. كتابة fluentMeshToFoam file.msh

5. icoFoam

6. paraFoam

ولكننا نرى أن علينا جعل الشروط الحدية التصميم (حدود، نقط، وجوه...).

## استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة في ميدان ديناميكيات الموائع الحاسوبية

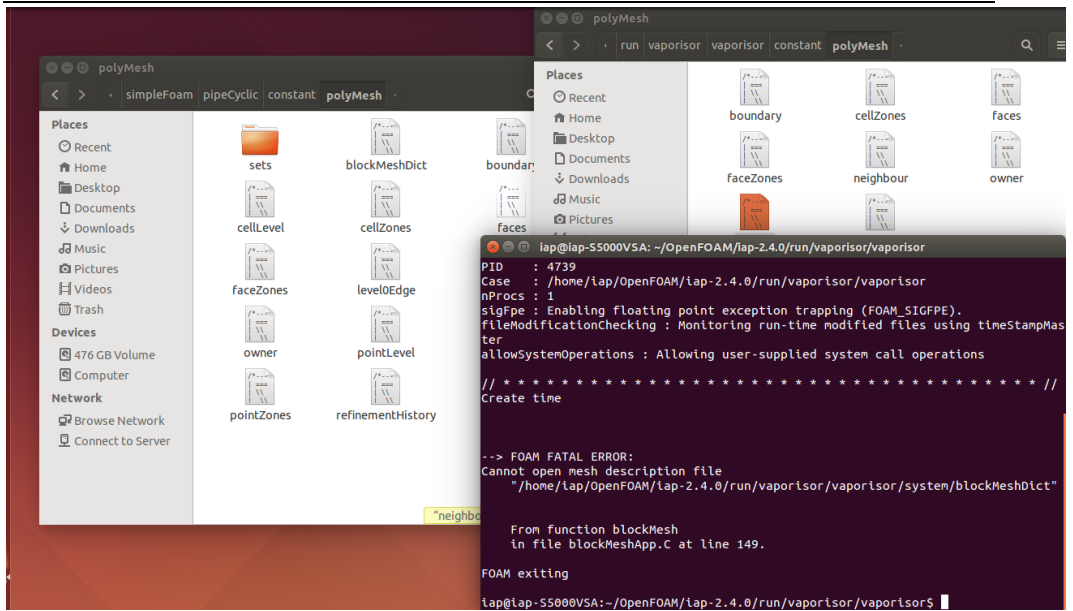


Figure 11.1.3-7: واجهة Linux-Ubuntu

:

ونحن نحاول العثور على هذه الحدود من `file.geo` المُنْتِجَة في `Gmsh` أو الشبكة `file.msh` صنع في `Gmsh` أيضا.

ونحن نحاول الآن نسخة جديدة من `Gmsh (Gmsh 2.3)` ونبدأ مع أنبوب كمثال:

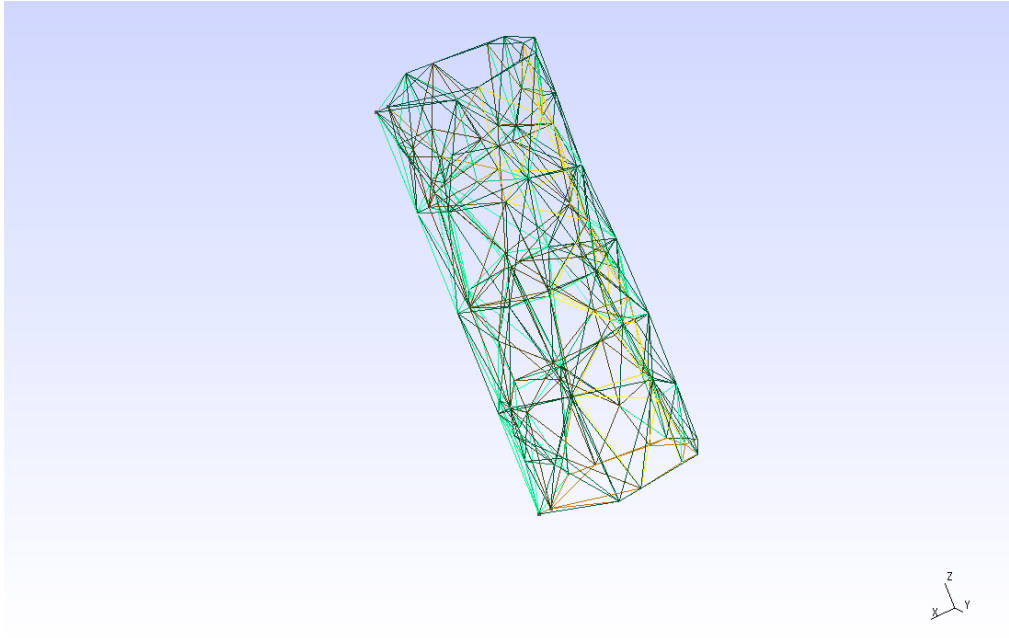


Figure 11.1.3-8: المثال لتشبكيك الأنبوب في Gmsh

اتبعنا gmshToFoam من ملف اسمه test.mesh نحصل على ملفات الثوابت التي تتضمن الشروط الأولية للتصميم بعد إنشاء ملف 0 والنظام التي تتضمن بعض الشروط أيضا نحصل على 5 المعالجات بعد تشغيل النظام:

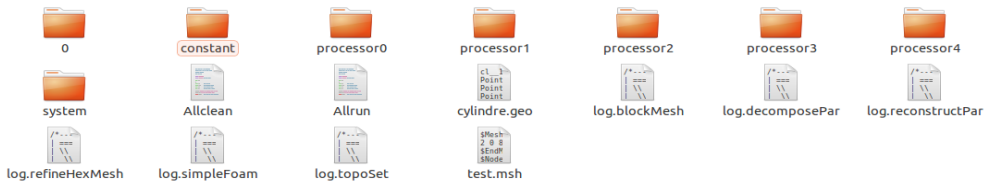


Figure 11.1.3-9: الملفات التي حصلنا عليها بعد تشغيل gmshToFoam

نطبق gmshToFoam ل test.msh ونحصل على النتيجة في Figure 11.1.3-9

```
0 Allclean Allrun system test.msh test.stp
lap@lap-55000VSA:~/OpenFOAM/lap-2.4.0/run/vaporisor/cylindre$ gmshToFoam test.msh
-----
Field Operation And Manipulation
OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
Version: 2.4.0
Web: www.OpenFOAM.org
-----
Build : 2.4.0-f0842aea0e77
Exec : gmshToFoam test.msh
Date : Jul 13 2015
Time : 12:30:51
Host : "lap-55000VSA"
PID : 3535
Case : /home/lap/OpenFOAM/lap-2.4.0/run/vaporisor/cylindre
nProcs : 1
sigFpe : Enabling floating point exception trapping (FOAM_SIGFPE).
fileModificationChecking : Monitoring run-time modified files using timeStampMaster
allowSystemOperations : Allowing user-supplied system call operations

// ***** //
Create time

Starting to read mesh format at line 2
Read format version 2 ascii 0

Starting to read points at line 5
Vertices to be read:122
Vertices read:122

Starting to read cells at line 130
Cells to be read:631

Unhandled element 15 at line 132
Unhandled element 15 at line 133
Unhandled element 15 at line 134
Unhandled element 15 at line 135
Unhandled element 1 at line 136
```

النتيجة 1 تطبيق gmshToFOAM

```

Unhandled element 1 at line 156
Unhandled element 1 at line 157
Unhandled element 1 at line 158
Unhandled element 1 at line 159
Unhandled element 1 at line 160
Unhandled element 1 at line 161
Unhandled element 1 at line 162
Unhandled element 1 at line 163
Unhandled element 1 at line 164
Unhandled element 1 at line 165
Unhandled element 1 at line 166
Unhandled element 1 at line 167
Mapping region 0 to Foam patch 0
Mapping region 0 to Foam cellZone 0
Cells:
  total:365
  hex :0
  prism:0
  pyr :0
  tet :365

CellZones:
Zone  Size
0     365

Skipping tag at line 764
Patch 0 gets name patch0

--> FOAM Warning :
    From function polyMesh::polyMesh(...) construct from shapes...
    in file meshes/polyMesh/polyMeshFromShapeMesh.C at line 627
    Found 230 undefined faces in mesh; adding to default patch.
Finding faces of patch 0

FaceZones:
Zone  Size

Writing zone 0 to cellZone cellZone_0 and cellSet
End
lap@lap-S5000VSA:~/OpenFOAM/lap-2.4.0/run/vaporisor/cylindre$ icoFoam

```

Figure 11.1.3-11: النتيجة 2 لتطبيق gmshToFOAM

لكننا لا نحصل على المعلومات خلال الوقت عندما نطبق icoFoam:

```

=====
| Field      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| Operation  | Version: 2.4.0                         |
| And        | Web: www.OpenFOAM.org                 |
| Manipulation |                                         |
=====
Build : 2.4.0-f0842aea0e77
Exec   : icoFoam
Date   : Jul 08 2015
Time   : 10:22:34
Host   : "lap-S5000VSA"
PID    : 4476
Case   : /home/lap/OpenFOAM/lap-2.4.0/run/vaporisor/test
nProcs : 1
sigFpe : Enabling floating point exception trapping (FOAM_SIGFPE).
fileModificationChecking : Monitoring run-time modified files using timeStampMaster
allowSystemOperations : Allowing user-supplied system call operations

// ***** //
Create time

Create mesh for time = 0

Reading transportProperties

Reading field p

--> FOAM FATAL IO ERROR:
Cannot find patchField entry for patch0

file: /home/lap/OpenFOAM/lap-2.4.0/run/vaporisor/test/0/p.boundaryField from line 11 to line 39.

From function GeometricField<Type, PatchField, GeoMesh>::GeometricBoundaryField::readField(const DImensionedField<Type, GeoMesh>&, const dictionary&)
in file /home/openfoam/OpenFOAM/OpenFOAM-2.4.0/src/OpenFOAM/lnInclude/GeometricBoundaryField.C at line 209.

FOAM exiting
lap@lap-S5000VSA:~/OpenFOAM/lap-2.4.0/run/vaporisor/test$ █

```

Figure 11.1.3-12: النتيجة 3 لتطبيق gmshToFOAM

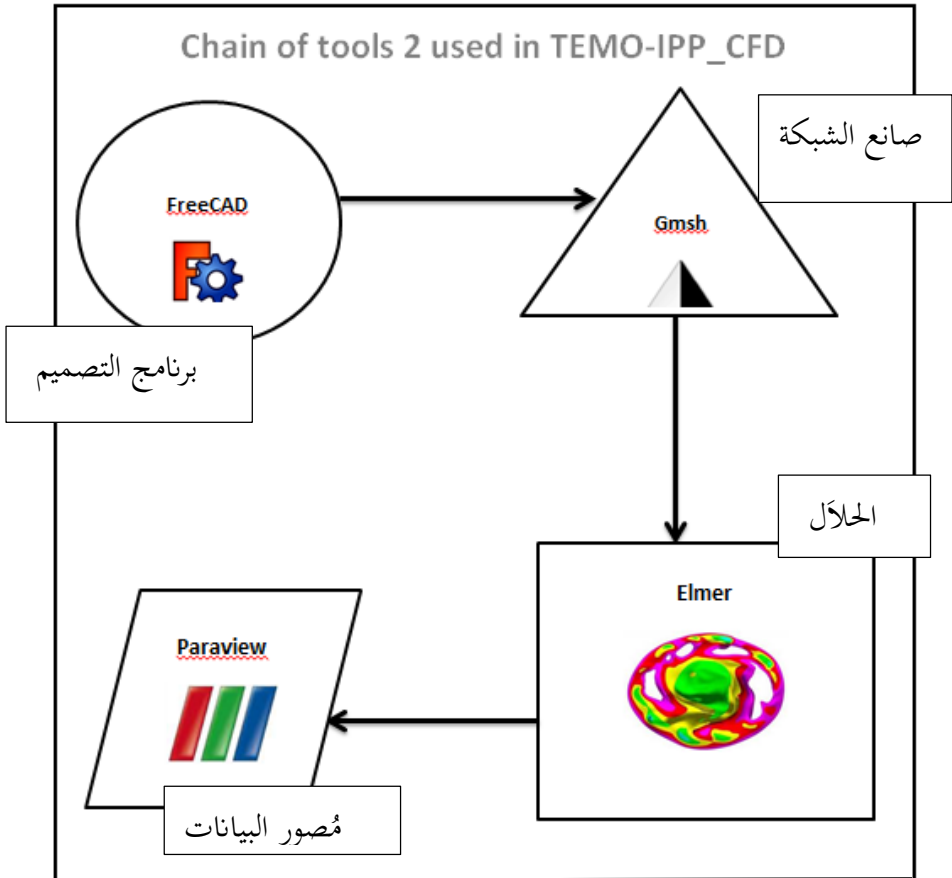
وOpenFOAM لا يستجيب، ونحن لا يمكننا قراءة تصميم gmsh للشبكة في OpenFOAM. قد يكون ذلك للأسباب التالية:

- النسخة OpenFOAM ليست كاملة ولكن هذا ليس منطقيا لأنه يستخدم في البرامج التعليمية على شبكة الانترنت.
- لا يعمل الأمر command بعد الآن، والتي هي أكثر منطقية لأننا حاولنا العديد من وسائل لتطبيق الأمر ولا شيء يحدث.
- نسخة Gmsh لا تعمل ولكن هذا ليس من المنطقي جدا لأننا نستخدم نُسخ كثيرة من Gmsh.



استخدام برنامج Elmer

11.1.3.2



Chain 2: Elmer باستخدام 2 سلسلة الأدوات

هنا نجرب برمجيات أخرى حيث أن Elmer يستطيع قراءة بيانات التصميم للأنبوب:

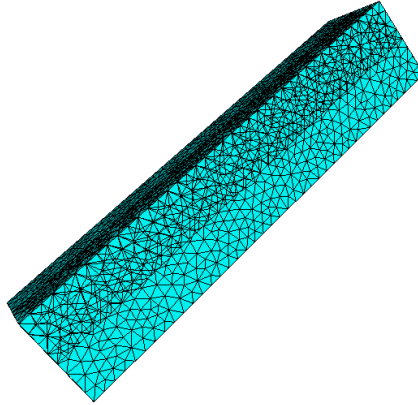


Figure 11.1.3-13: Elmer الأنبوب في

• تصميم الأنابيب مع الشبكة على gmsh وتوفير مثل شكل file.msh

• الشروط الأولية

• اختيار معادلة نافير ستوكس Navier-Stokes

• تحديد استخدام المواد (الماء درجة حرارة الغرفة) للواجهة الداخلية للأنبوب، والستانيلس ستيل للواجهة

الخارجية (...)

• تحديد الحدود في التصميم قبل إدخال حالة كل الحدود

• تشغيل بدء المحلل

• ثم حدد بداية ElmerPost أو ElmerVTK.

قبل أن ننتقل إلى النتائج، علينا أن نعرف كيف نحصل على الشروط الأولية:

نحن في حاجة إلى توربينة تعمل على البخار لتولد 30.2 ميغا واط.

مواصفات البخار المحي الذي يدخل إلى التوربينة: ضغطه 120 بار، حرارته 520 درجة مئوية، مع معدل تدفق للبخار يساوي 58 كغ في الثانية.

نحن نستخدم الماء، فالكثافة تساوي 1000 كغ / في المتر المكعب. يمكننا أن نستنتج أن حجم التدفق س يساوي 0.058 متر مكعب / ثانية.

$$Q = \frac{\text{الحجم}}{\text{الوقت}} = \frac{\text{المساحة} * \text{الارتفاع}}{\text{الوقت}} = \text{المساحة} * \text{سرعة} \quad \text{و} \quad \text{المساحة} = \frac{\pi * 2^2}{4}$$

= 0.03 متر مربع

إذا السرعة تساوي 19.44 م / ث.

نحصل على قيم السرعة للبخار عبر (start solver) والتصوير عبر (ElmerPost):

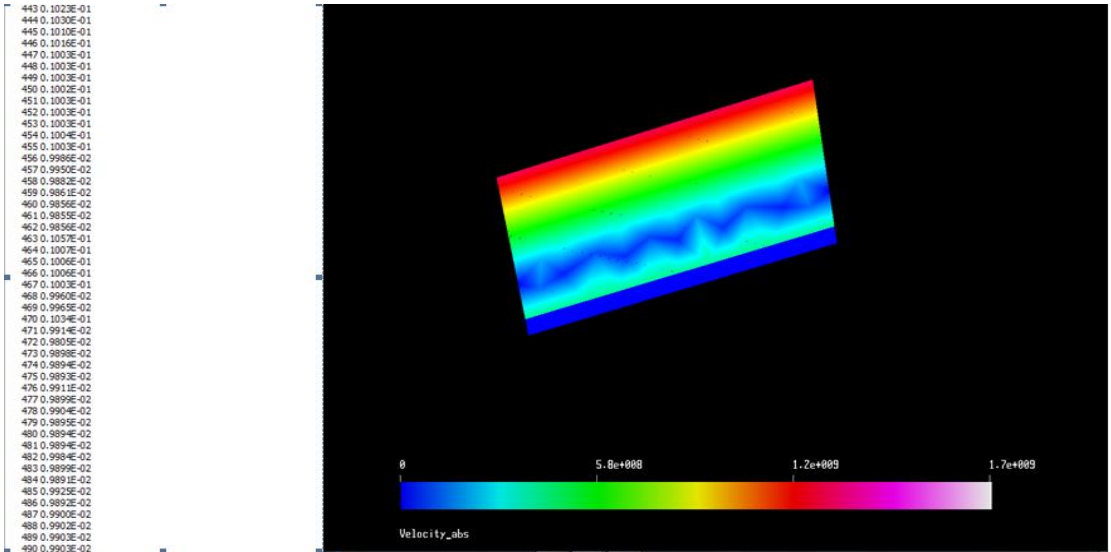


Figure 11.1.3-14: قيم السرعة

تتغير السرعة حسب النموذج التالي:

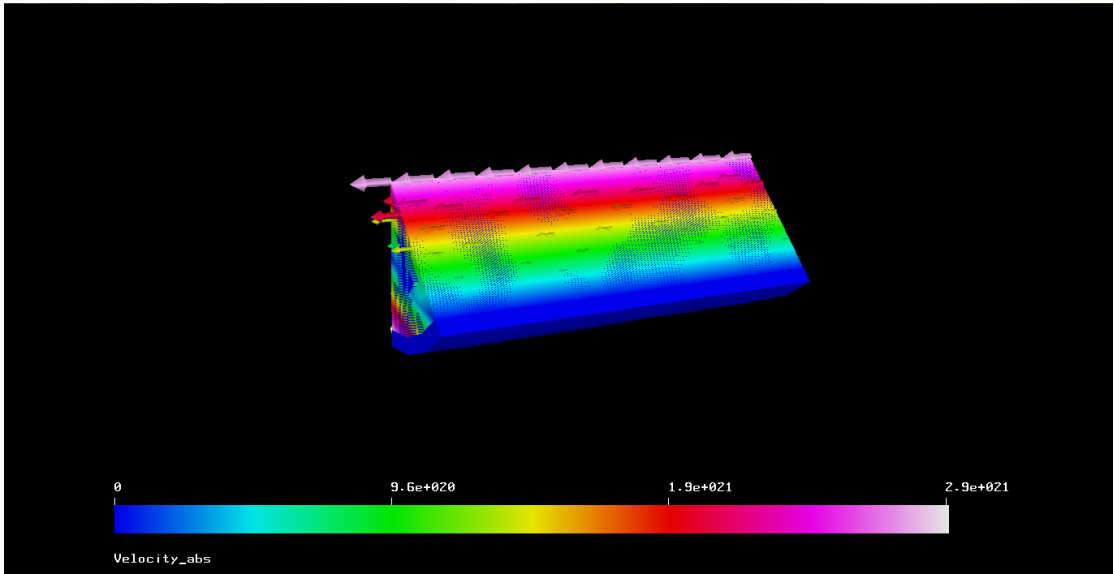


Figure 11.1.3-15: قيم السرعة مرموزة بموجه

الحد الأقصى في المنتصف يقل مع السير نحو حدود الأنابيب والسبب هو احتكاك البخار مع المادة المصنوع منها الأنبوب مما يخفف السرعة عند الأطراف

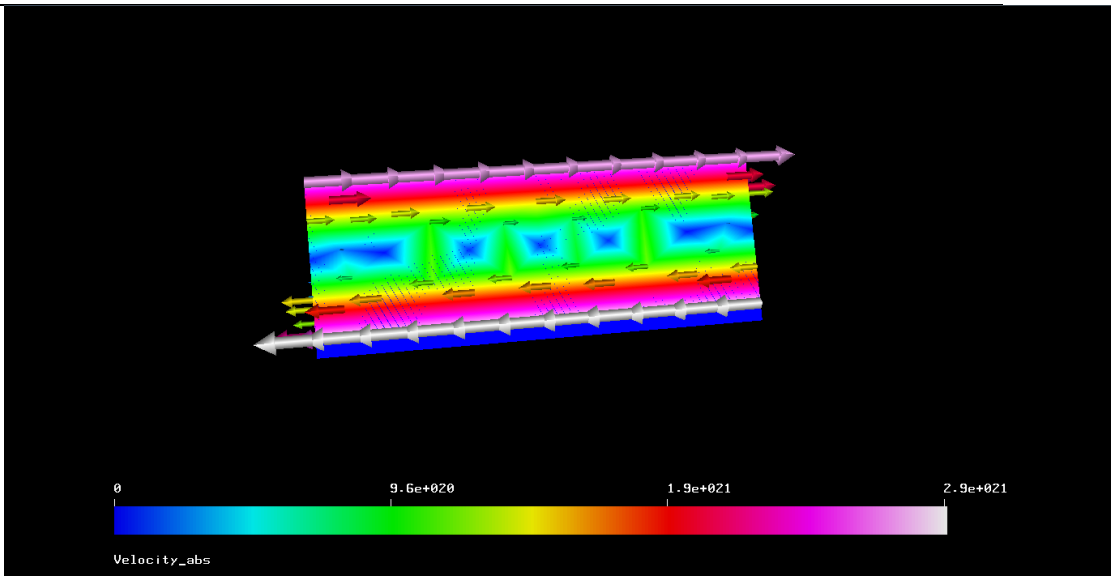


Figure 11.1.3-16: نتائج الاحتكاك

تحسين سريان الماء داخل محطة طاقة تعمل على البخار ببرامج جاهزة

الآن نُدخل تصميم محطة الطاقة لبرنامج Elmer ولكن من الصعب حاليا أن ننقل تصميم كامل لذا نُدخل مسار الماء فقط الموضح في الشكل التالي:

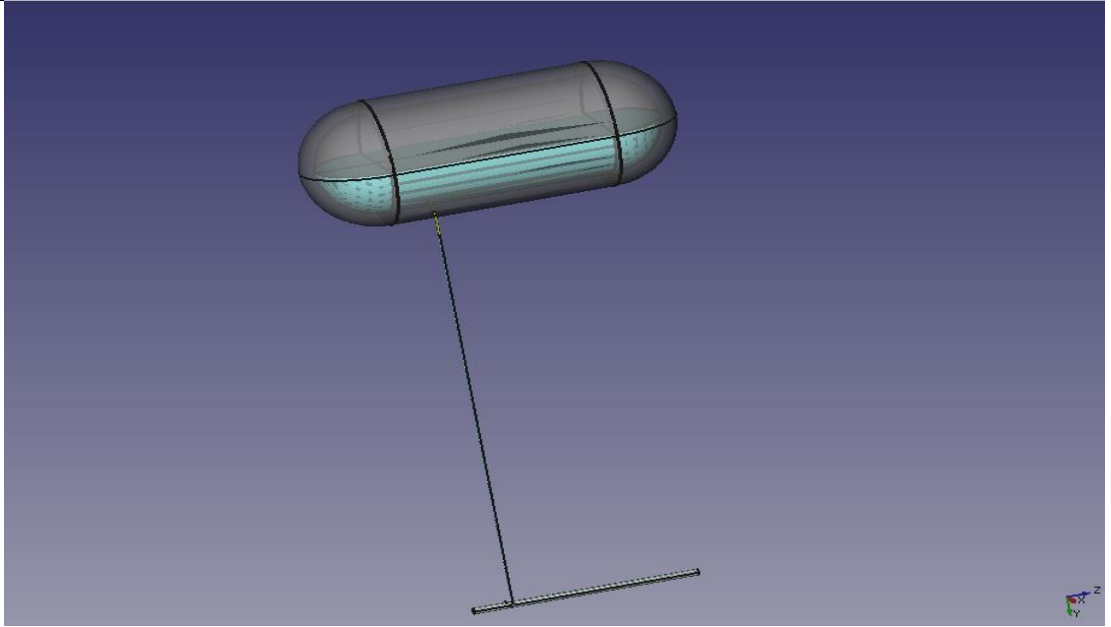


Figure 11.1.3-17: The studied design

علينا أن نعرف بعض الملاحظات:

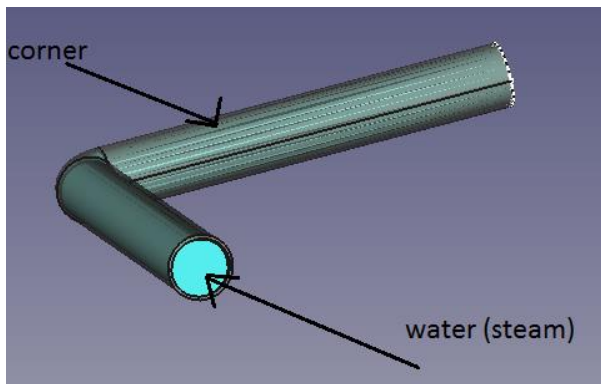


Figure 11.1.3-18: أنبوب مع كوع

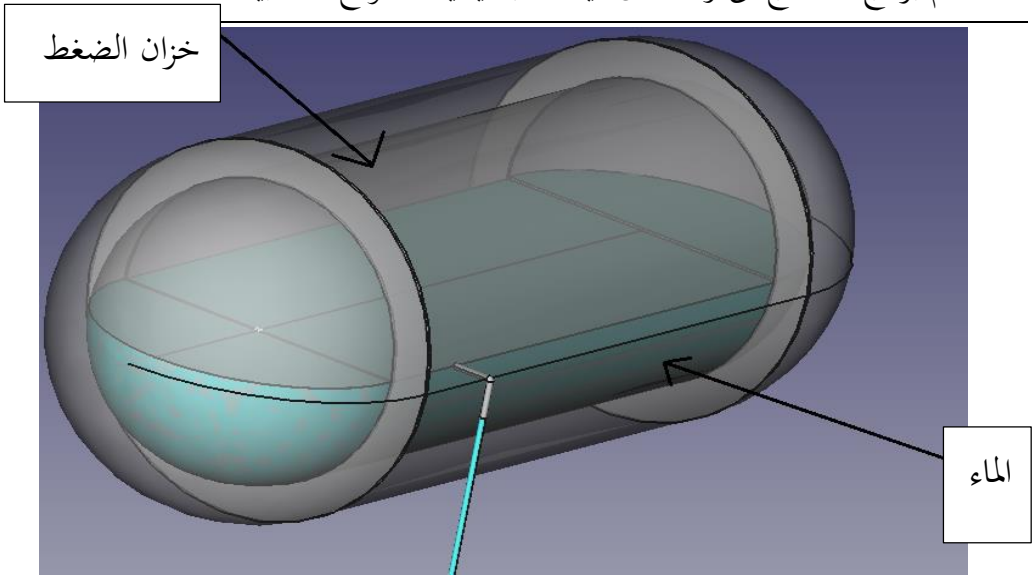


Figure 11.1.3-19: Noted drump

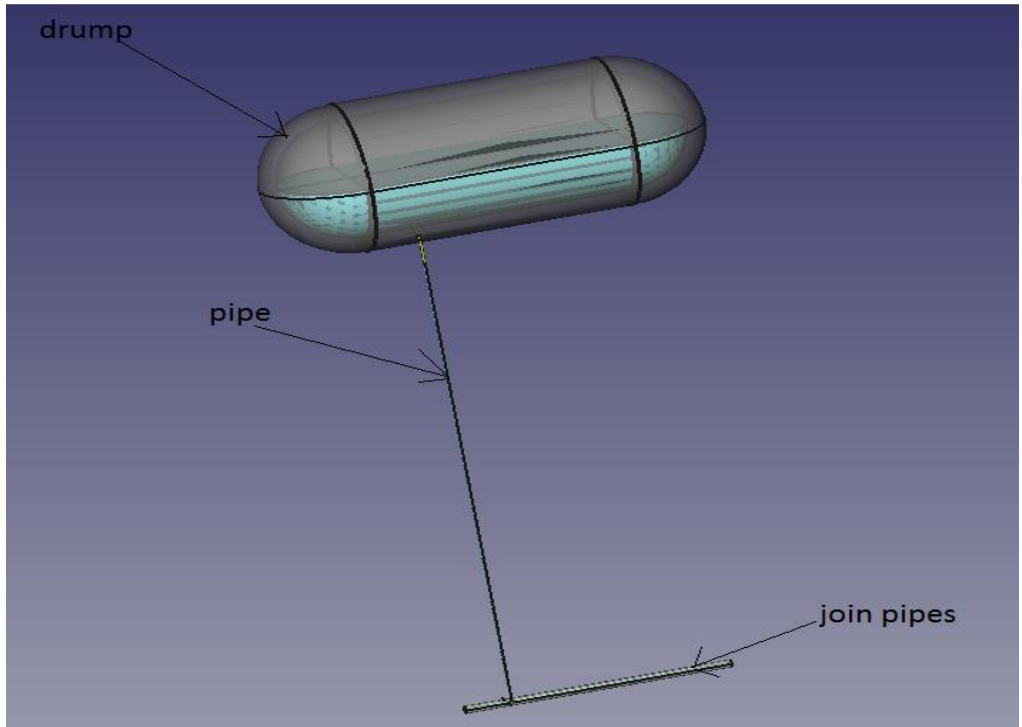
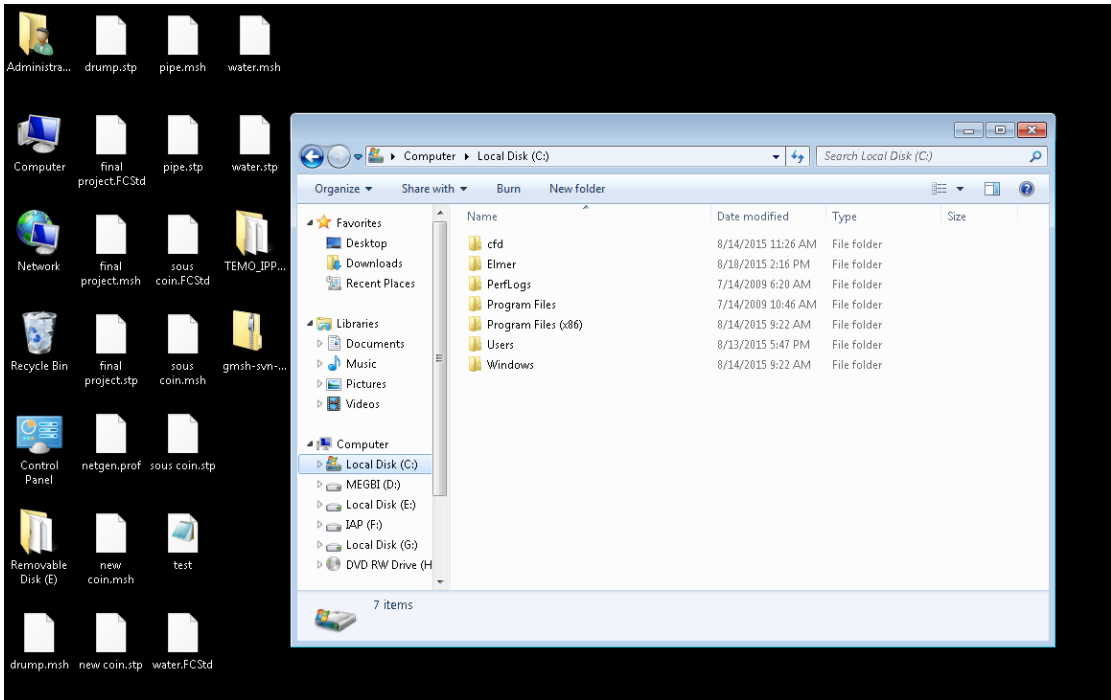


Figure 11.1.3-20: Noted design

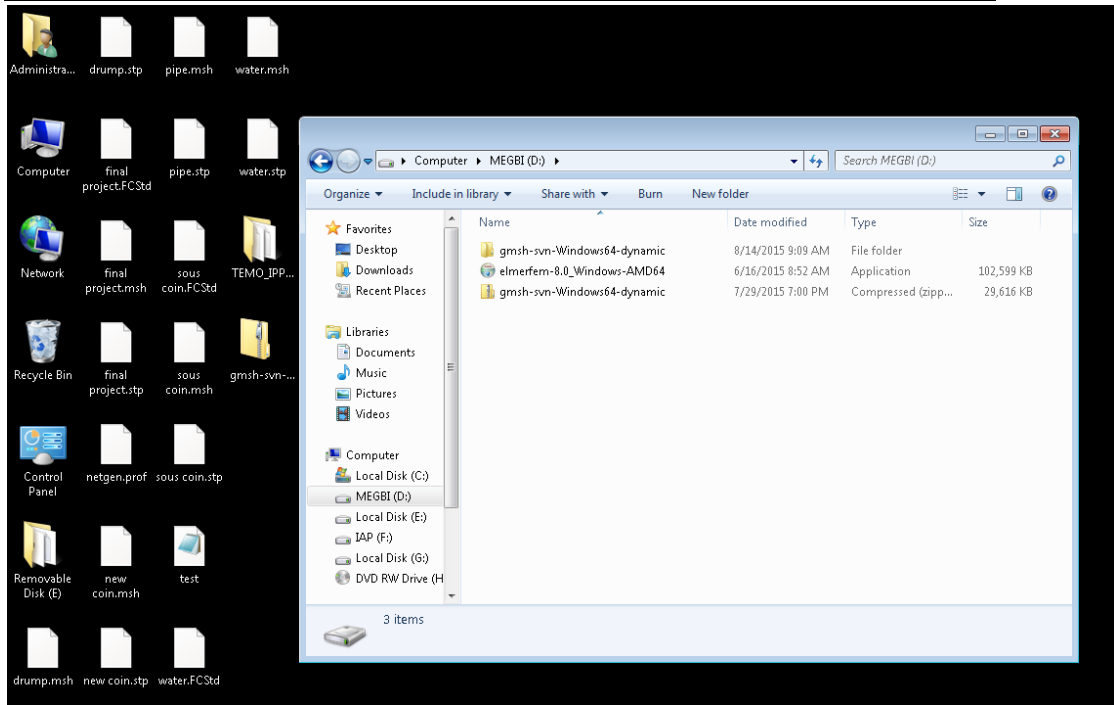
دراستنا صعبة في جهاز كمبيوتر شخصي. لذلك نحن نقوم بالدراسات في خادم quadriquad مربوط في أجهزتنا الشخصية. لذلك نجعل الدراسة في الخادم ونقل النتيجة (الملفات والأرقام) لأجهزة الكمبيوتر الشخصية.  
عرض ملفات Elmer المعروضة في القرص المحلي (C):



واجهة الخادم 1: واجهة الخادم 1

ندخول إلى القرص المحلي (C) ثم إلى المجلد Elmer ثم نختار اسم الملف الذي نحتاج إليه.  
ومكان Gmsh و Elmer كان في (D) MEGBI:

## استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة في ميدان ديناميكيات الموائع الحاسوبية



واجهة الخادم 2: واجهة الخادم 2

كما نرى ملفات FreeCAD و Gmsh تقع في سطح المكتب ولكن يمكننا نقلها إلى مجلد خاص لنتمكن من تسمية FreeCAD أو Gmsh. يمكننا إنشاء مجلد لكل نوع من الملفات.

من المهم أن نقول أنه علينا رسم الماء مثل المواد، لأننا نضع الشروط على الماء (أو البخار وفقاً لدرجة الحرارة) في برنامج Elmer. لذلك التصميم سيكون:



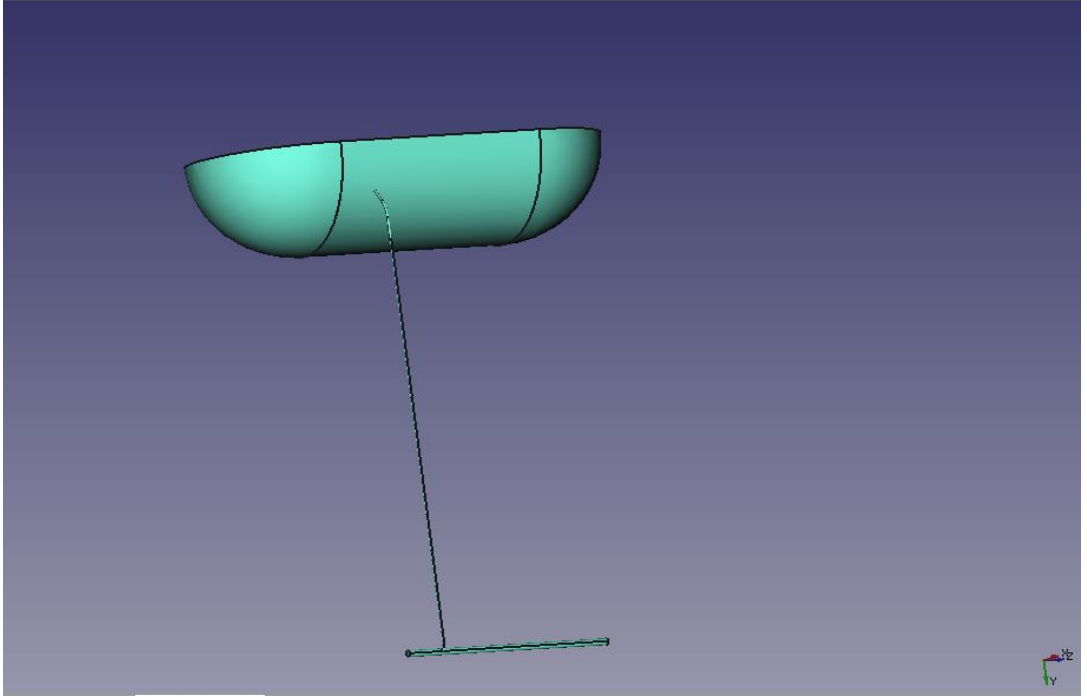


Figure 11.1.3-23: مسار البخار

الآن علينا أن نجزئ التصميم باستخدام gmsh أو Elmer، ولكن Elmer غير قادر على تجزئة تصميم كبير لذلك نستخدم gmsh:

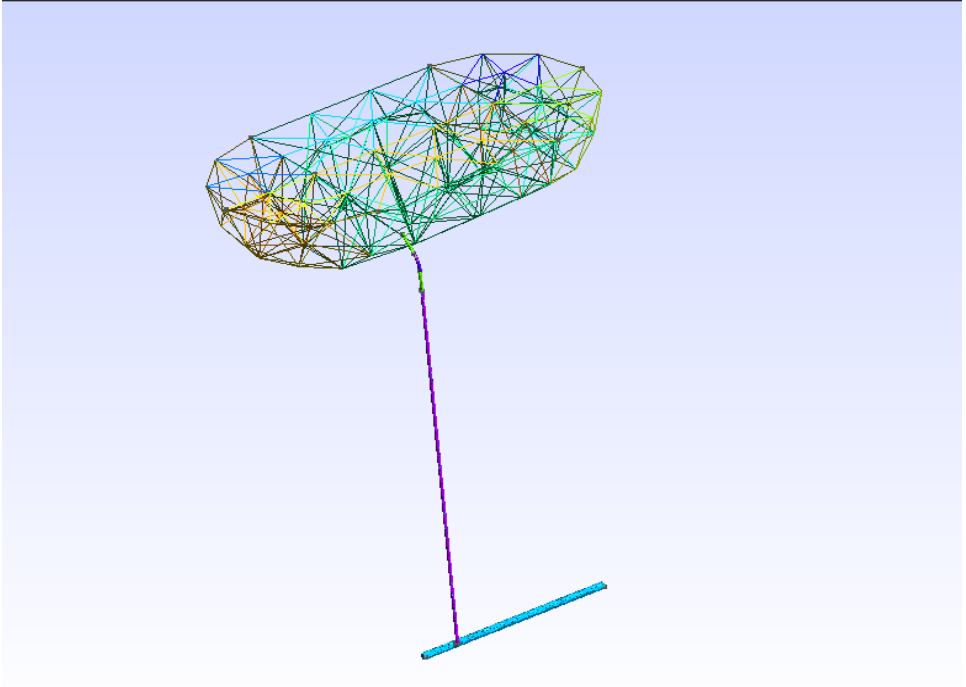


Figure 11.1.3-24: تشبيك مسار البخار في

ندخل التصميم إلى برنامج Elmer مع الشروط الأولية، ومعادلات السرعة، وشروط الحدود التي نحددها في نموذج Elmer:

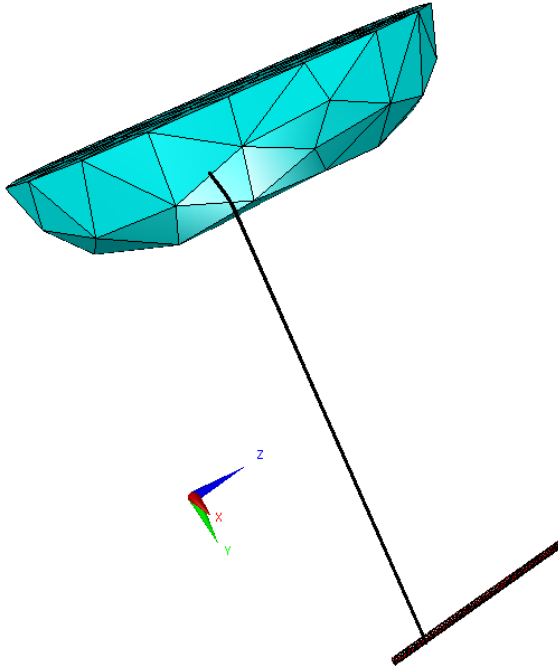


Figure 11.1.3-25: Elmer بخار الماء في

بعد تشغيل البرنامج وفقا لطريقة العناصر المحدودة، نحصل على الملفات انظر Figure

:11.1.1.3-26

## استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة في ميدان ديناميكيات الموائع الحسابية

Name	Date modified	Type	Size
case.ep	18/8/2015 11:46 AM	EP File	1,564 KB
case.sif	20/8/2015 11:51 PM	SIF File	3 KB
egproject	17/8/2015 11:02 AM	XML File	96 KB
ELMERSOLVER_STARTINFO	20/8/2015 11:51 PM	File	1 KB
mesh.boundary	18/8/2015 11:44 AM	BOUNDARY File	322 KB
mesh.elements	18/8/2015 11:44 AM	ELEMENTS File	431 KB
mesh.header	18/8/2015 11:44 AM	HEADER File	1 KB
mesh.nodes	18/8/2015 11:44 AM	NODES File	161 KB
netgen.prof	20/8/2015 11:57 PM	PROF File	1 KB
water.FCStd	17/8/2015 11:02 AM	FCSTD File	11 KB
water.msh	17/8/2015 11:02 AM	MSH File	1,028 KB
water.stp	17/8/2015 11:02 AM	STP File	76 KB

Figure 11.1.3-26: Elmer الملفات التي نحصل عليها من برنامج

Case.ep هو الملف الذي يحتوي على قيم السرعة والضغط.

Case.sif هو الملف الذي يحتوي على الشروط التي قمنا بتحديددها في البرنامج.

Mesh.boundary هو الملف الذي يحتوي على عدد من العناصر الحدودية، وعدد من العناصر التي تنتمي إلى الحدود، والعناصر المحيطة للحدود، نوع من رموز العناصر، والعقد من العناصر.

Mesh.elements هو الملف الذي يحوي نوع المواد المستخدمة في الدراسة مثلا هنا الستاينلس ستيل و الماء .

Mesh.header هو الملف الذي يحتوي على عدد العقد، عدد من العناصر، وعدد من عناصر الحدود.

Mesh.node هو الملف الذي يحتوي على عدد العقد، مؤشر العقد المتوازي، ويحوي تنسيق العقد.

Water.FCStd هو ملف تصميم FreeCAD.

Water.stp هو ملف تصميم gms.

و water.msh هو ملف تشبيك Elmer.

تغيير الألوان يعبر عن تغيير قيم الضغط و الحرارة :

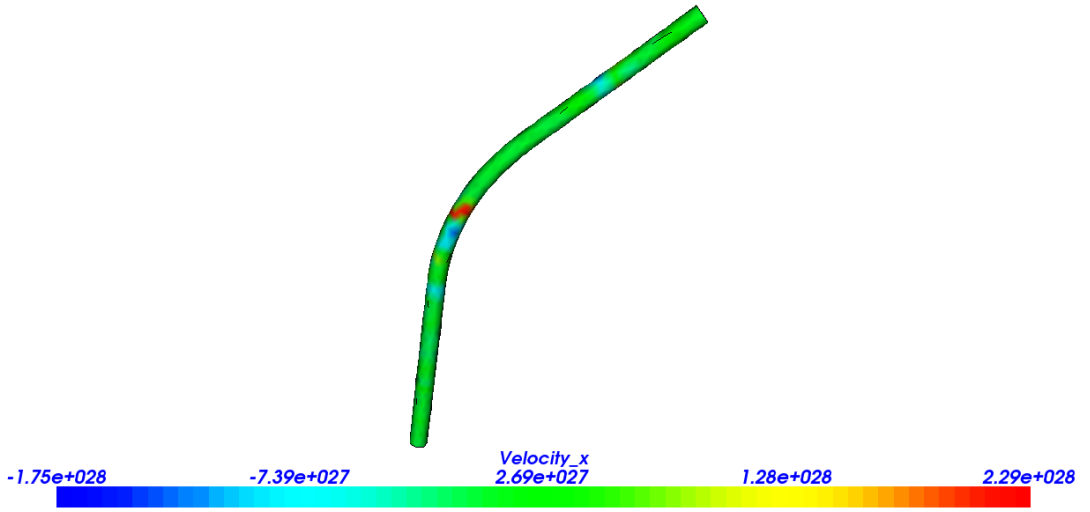


Figure 11.1.3-27: قيم تغيير السرعة

هذا الشكل من قيم السرعة يدل على أن اللون الأزرق يحدد قيمة الحد الأدنى من سرعة. ثم تزيد القيمة لتصل إلى الحد الأقصى في اللون الأحمر.

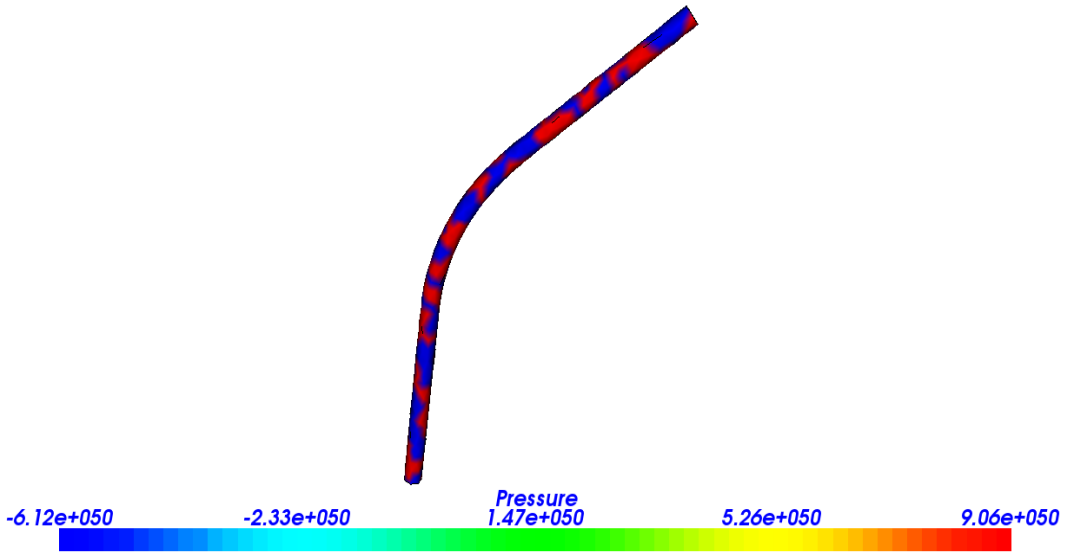


Figure 11.1.3-28: قيم تغير الضغط

هذا الشكل من قيم الضغط يدل على أن الضغط هو الحد الأدنى في اللون الأزرق أيضا، ويزيد حتى يصل إلى القيمة القصوى في اللون الأحمر. لذلك علينا دراسة الأماكن ذات اللون الأخضر الأصفر، والأحمر في السرعة والضغط لمعرفة مكان الضعف في التصميم

على سبيل المثال نرى تغير السرعة في :

الركن:

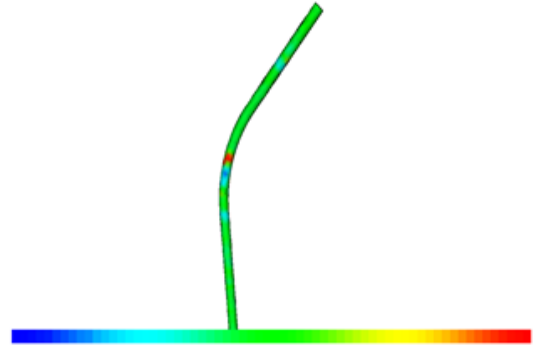


Figure 11.1.3-29: تغير السرعة في الركن

الأنابيب:

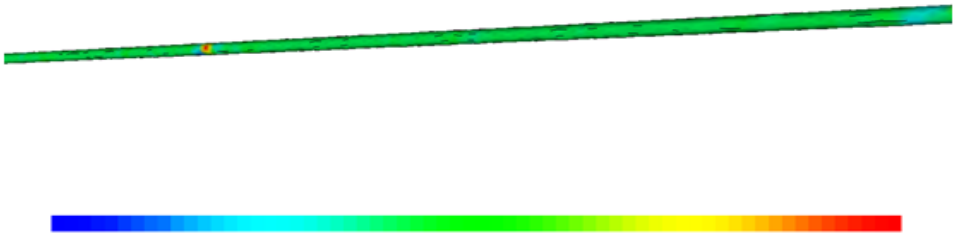
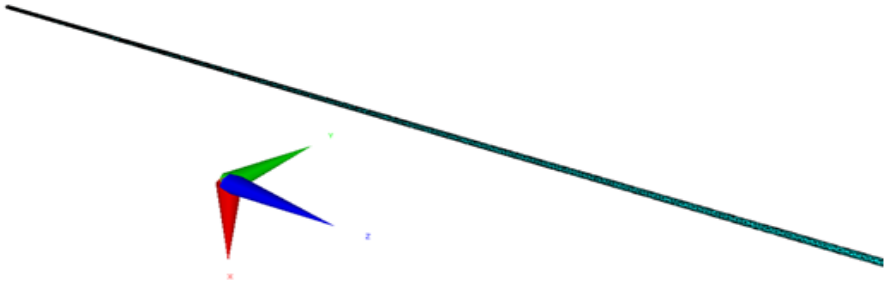


Figure 11.1.3-30: تغير السرعة في الأنابيب

مسار المياه:

المسار الأول عندما تسير المياه من خزان الضغط الى الأنابيب ثم إلى الأنبوب الذي تصب فيه الأنابيب:

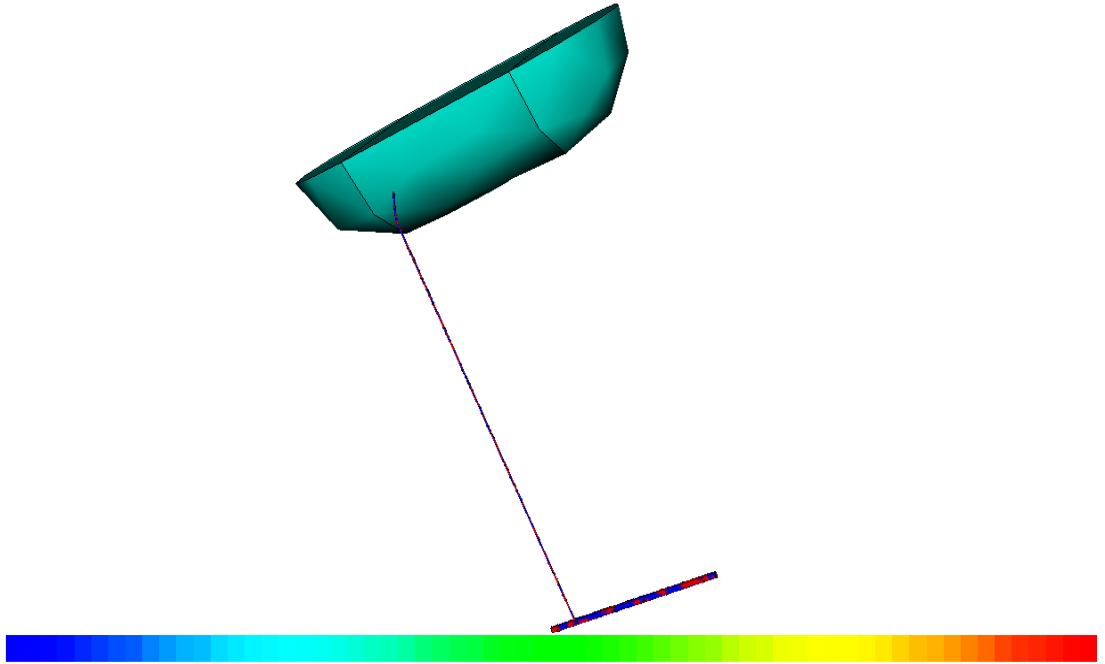


Figure 11.1.3-31: قيم السرعة في المسار الأول:

المسار الثاني هو المسار العكسي أي من المصب إلى خزان الضغط.



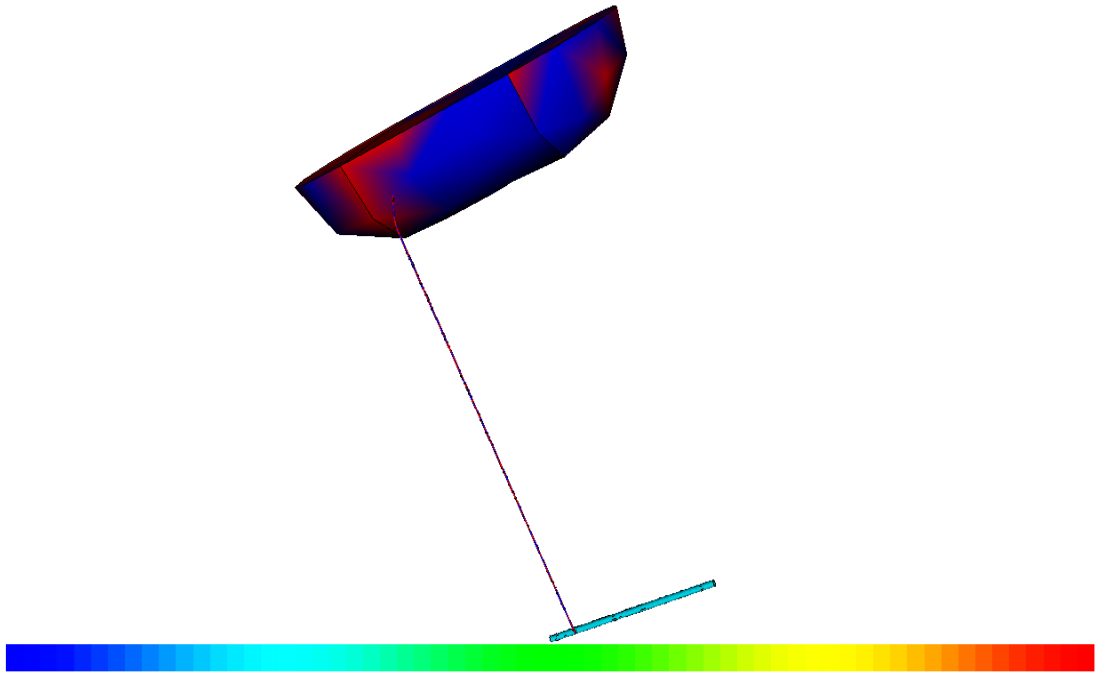


Figure 11.1.3-32: قيم السرعة في المسار الثاني

يمكننا أن نستنتج أن السرعة هي القصوى في الركن، وفي خزان الضغط عند ارتفاع منسوب المياه، وفي المصب . لذلك علينا رعاية المواد عندما نقوم بتصميم محطة توليد الكهرباء. الآن ننتقل إلى قيم الضغط .  
في الركن:

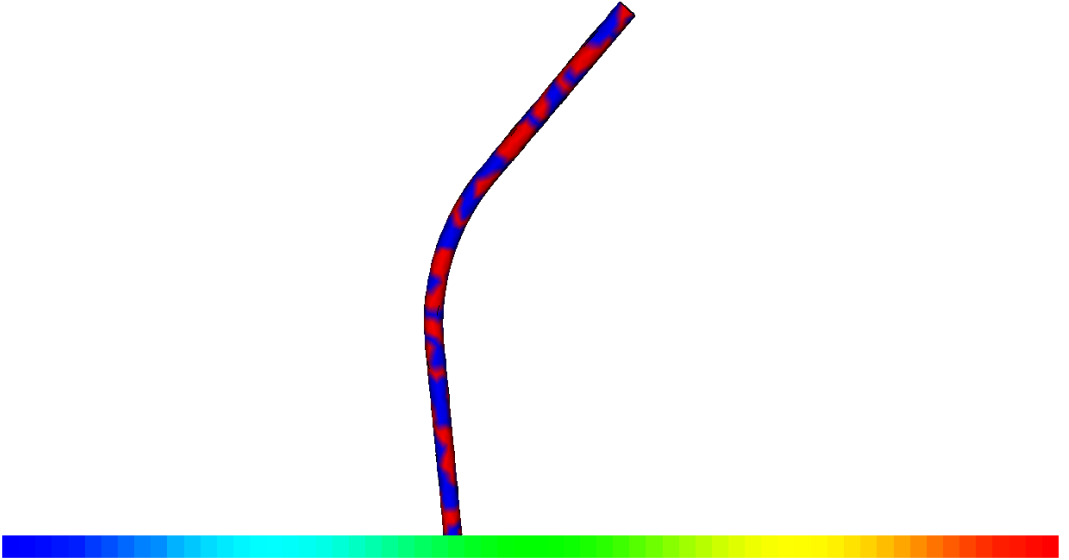


Figure 11.1.3-33: تغير الضغط في الركن

في الأنابيب:

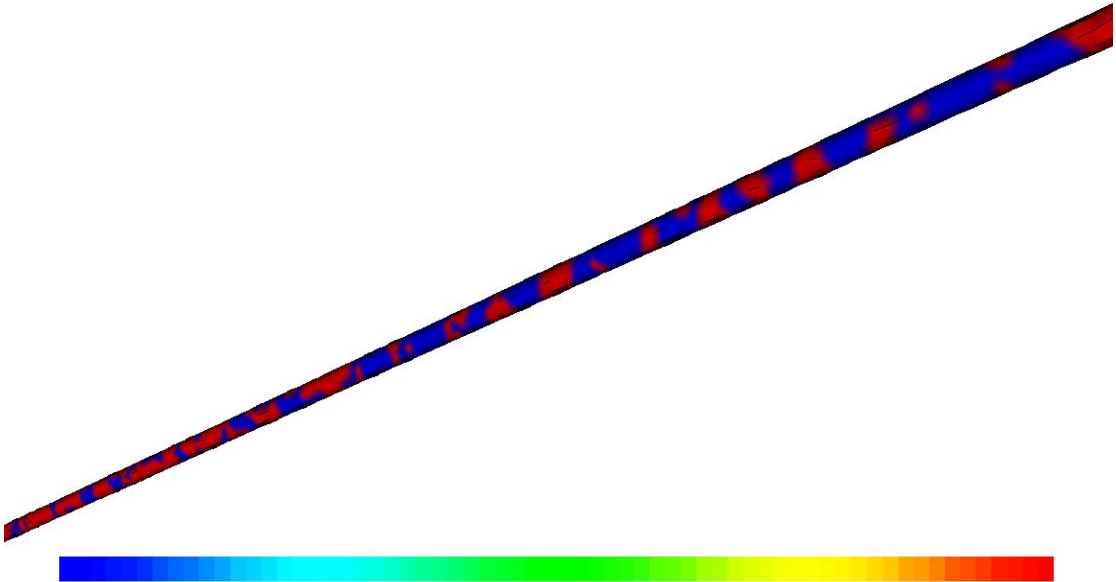


Figure 11.1.3-34: تغير الضغط في المسار الأول:

مسار المياه:

المسار الأول عندما تسير المياه من خزان الضغط في الأنابيب ثم إلى الأنبوب الذي يجمع الأنابيب (المصب):

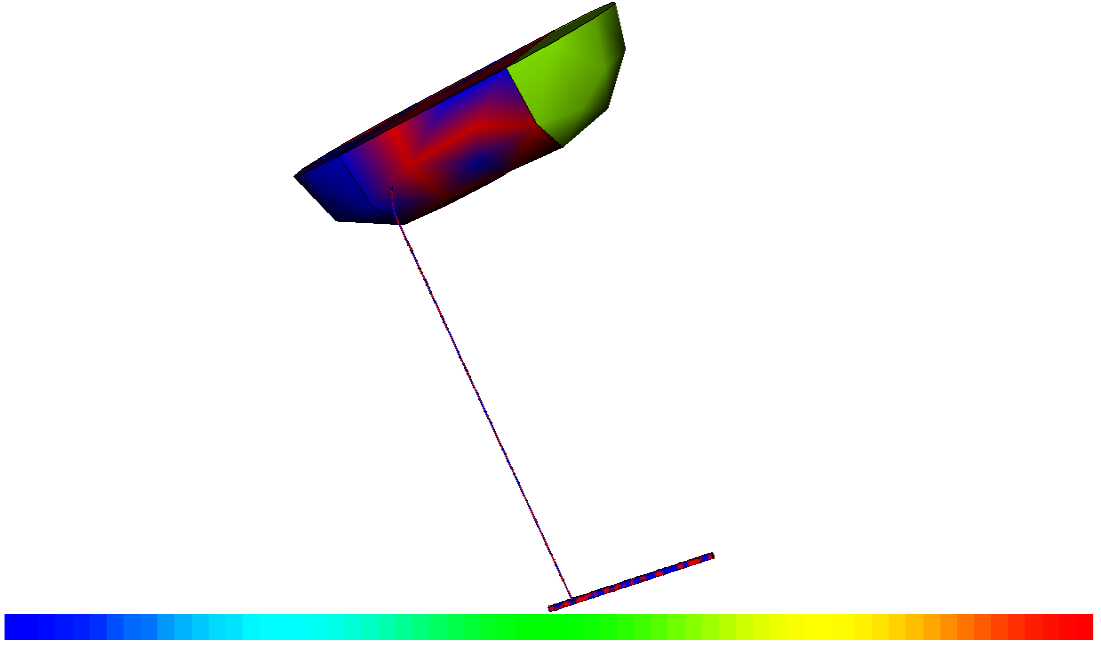


Figure 11.1.3-35: تغير الضغط في المسار الأول

المسار الثاني عندما تسير المياه من المصب إلى الأنبوب ثم إلى خزان الضغط:

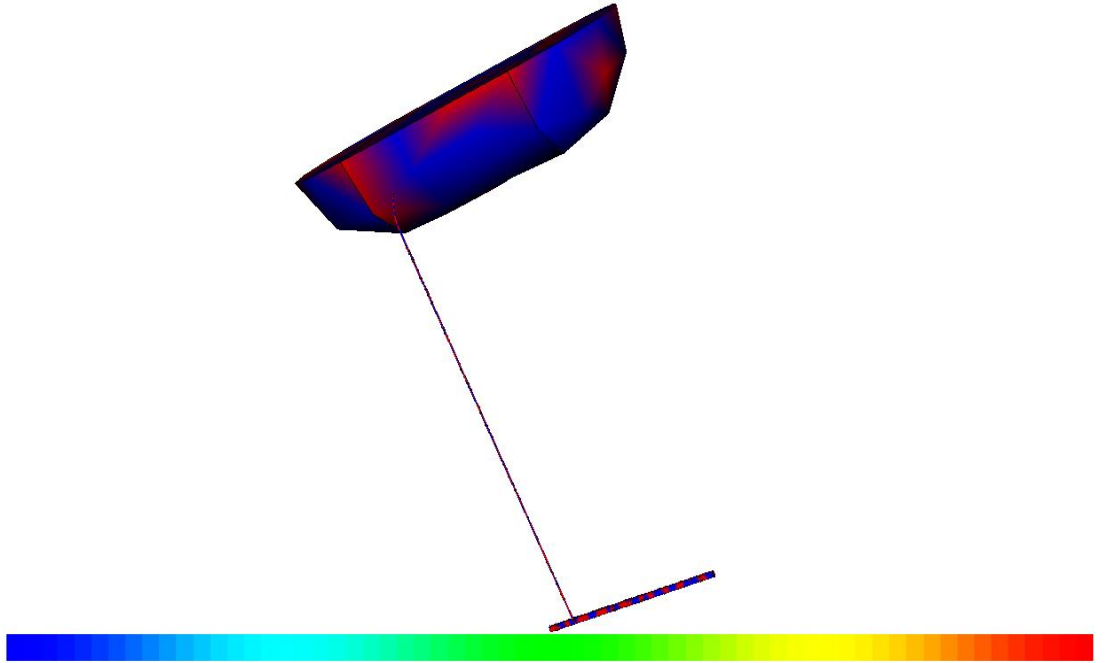


Figure 11.1.3-36: تغير الضغط في المسار الثاني

يمكننا أن نستنتج أن الضغط مرتفع في كل جزء من التصميم؛ لذلك علينا اختيار مواد متينة قادرة على تحمل درجات عالية من الضغط في محطة توليد الكهرباء .  
من المهم أن نقول أن الملفات التي تتضمن معلومات التصميم (سرعة والقيم الضغط) تقع في DVD مرفق مع الكتاب.

#### 11.1.4 خرمراجع

- Introduction to Finite Element Analysis (FEA) or Finite Element Method (FEM)
- **Finite Element Analysis (MCEN 4173/5173)**  
Fall, 2006  
Instructor: Dr. H. "Jerry" Qi

انشاء برنامج لتحليل مسألة ما في ميدان ديناميكيات الموائع الحاسوبية (د.م.ح.)

## 11.2 انشاء برنامج لتحليل مسألة ما في ميدان ديناميكيات الموائع الحاسوبية (د.م.ح.)

Writing down the governing equations onto the paper

developing the appropriate numerical solution of these equations

writing the C++ program (by using already existing libraries as OpenFOAM) and putting it into the computer

going through all the trials and tribulations of making the program work properly

ويمكن استخدام البرنامج المفتوح OpenFoam لهذا الغرض.

### 11.2.1 تحصيب السريان في زاوية باستخدام OpenFOAM

We have to insert program in workbenches list of FreeCAD using OpenFOAM codes. First; we should know OpenFOAM codes in Linux. The principal commands are established in this table:	علينا إدراج البرنامج في قائمة البدلاء من FreeCAD استخدام رموز OpenFOAM. أولاً؛ يجب أن نعلم رموز OpenFOAM في Linux. الاوامر الرئيسية والمقامة في هذا الجدول:
--	--

Command	Description
cd	Changes Directory to dirname
cp	Copy source file into destination
mkdir	Create a new directory dirname
mv	Move (Rename) an oldname to newname.
pwd	Print current working directory.
rm	Remove (Delete) filename

استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة في ميدان ديناميكيات الموائع الحاسوبية

<b>rmdir</b>	<b>Delete an existing directory provided it is empty.</b>
<b>vi</b>	<b>Opens vi text editor</b>

Table 11.2.1-1: Table contain the Linux codes

We write the program on OpenFOAM when we run it and have results:	نكتب البرنامج على OpenFOAM عندما نقوم بتشغيله يكون لها نتائج:
---	---

## انشاء برنامج لتحليل مسألة ما في ميدان ديناميكيات الموائع الحسابية (د.م.ح.)

```

login as: meae
meae@192.168.1.1's password:
Last login: Sat Mar 28 13:38:24 2015 from 192.168.1.2
meae@server ~]$ pwd
/home/meae
meae@server ~]$ cd ..
meae@server home]$ ll
total 36
-rwx----- 2 bkerdi bkerdi 4096 Mar 29 12:45 bkerdi
-rwx----- 14 fchaar fchaar 4096 Mar 29 17:21 fchaar
-rwx----- 2 fhamed fhamed 4096 Apr 14 10:29 fhamed
-rwx----- 32 iap iap 4096 Apr 11 12:20 iap
-rwxr-xr-x 31 meae meae 4096 Apr 14 11:12 meae
-rwx----- 17 megbi megbi 4096 Mar 27 10:02 megbi
meae@server home]$ meae
bash: meae: command not found
meae@server home]$ cd meae
meae@server ~]$ ll
total 75488
-rwxr-xr-x 1 root root 28377109 May 15 2013 150513TEMO_last_-STPP_Report4_en
l_arab.pdf
-rwxr-xr-x 12 meae meae 4096 Dec 31 2013 Central_Library
-rwxr-xr-x 2 megbi megbi 4096 Apr 3 2010 Desktop
-rwxr-xr-x 1 meae meae 57782 Apr 23 2010 IAP-Logo.JPG
-rwxrwxrwx 1 meae meae 64 Aug 1 2014 link to scilab -> /home/meae/sci
oslab-x11-4.3-1.el5.i386.rpm_FILES/usr/bin/scilab
-rwxr-xr-x 1 meae meae 20456732 Feb 21 2010 martin_liu_dissertation_num_bren
kammer.pdf
-rwxr-xr-x 5 meae meae 4096 Jul 14 2010 OpenFOAM
-rwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Jul 18 2011 pluto
-rwxr-xr-x 1 meae meae 386195 May 14 2010 promotion1_fzk
-rwxr-xr-x 1 meae meae 19379104 Jan 25 2014 scicoslab-x11-4.3-1.el5.i386.rpm
-rwxr-xr-x 3 meae meae 4096 Jan 25 2014 scicoslab-x11-4.3-1.el5.i386.rpm
FILES
-rwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Aug 1 2014 spa.environ
-rwxrwxr-x 4 meae meae 4096 Jul 17 2011 tools
-rwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Jun 21 2010 uebung
-rwx----- 5 meae meae 4096 Jan 25 2014 usr
-rwxrwxr-x 15 meae meae 4096 Jul 18 2011 xemacs-21.4.20
-rwxr-xr-x 1 meae meae 8408589 Jul 13 2010 xemacs-21.4.20.tar.tar
meae@server ~]$ cd OpenFOAM/
meae@server OpenFOAM]$ ll
total 366500
-rw----- 1 meae meae 310 Jun 12 2010 Installation Notes

```

Figure 11.2.1-1: OpenFOAM results 1

```
[fhamed@server meae]$ ll
total 75488
-rwxr-xr-x 1 root root 28377109 May 15 2013 150513TEMO_last_-STPP_Report4_en
gl_arab.pdf
drwxr-xr-x 12 meae meae 4096 Dec 31 2013 Central_Library
drwxr-xr-x 2 megbi megbi 4096 Apr 3 2010 Desktop
-rwxr-xr-x 1 meae meae 57782 Apr 23 2010 IAP-Logo.JPG
lrwxrwxrwx 1 meae meae 64 Aug 1 2014 link to scilab -> /home/meae/sci
coslab-x11-4.3-1.el5.i386.rpm FILES/usr/bin/scilab
-rwxr-xr-x 1 meae meae 20456732 Feb 21 2010 martin_liu_dissertation_num_bren
nkammer.pdf
drwxr-xr-x 5 meae meae 4096 Jul 14 2010 OpenFOAM
drwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Jul 18 2011 pluto
-rwxr-xr-x 1 meae meae 386195 May 14 2010 promotion1_fzk
-rwxr-xr-x 1 meae meae 19379104 Jan 25 2014 scicoslab-x11-4.3-1.el5.i386.rpm
drwxr-xr-x 3 meae meae 4096 Jan 25 2014 scicoslab-x11-4.3-1.el5.i386.rpm
_FILES
drwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Aug 1 2014 spa.environ
drwxrwxr-x 4 meae meae 4096 Jul 17 2011 tools
drwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Jun 21 2010 uebung
drwx----- 5 meae meae 4096 Jan 25 2014 usr
drwxrwxr-x 15 meae meae 4096 Jul 18 2011 xemacs-21.4.20
-rwxr-xr-x 1 meae meae 8408589 Jul 13 2010 xemacs-21.4.20.tar.tar
[fhamed@server meae]$ cd OpenFOAM/
[fhamed@server OpenFOAM]$ ll
total 366500
-rw----- 1 meae meae 310 Jun 12 2010 Installation Notes
-rw----- 1 meae meae 0 Jun 12 2010 Installation Notes~
drwxrwxr-x 3 meae meae 4096 Jul 14 2010 meae-1.6
drwxrwxr-x 11 meae meae 4096 Sep 24 2010 OpenFOAM-1.6
-rwxr-xr-x 1 meae meae 241760751 Jun 9 2010 OpenFOAM-1.6.General.gtgz
drwxrwxr-x 15 meae meae 4096 Jun 9 2010 ThirdParty-1.6
-rwxr-xr-x 1 meae meae 133110883 Jun 9 2010 ThirdParty-1.6.General.gtgz
[fhamed@server OpenFOAM]$ cd OpenFOAM-1.6
[fhamed@server OpenFOAM-1.6]$ ll
total 81260
-rwxr-x--- 1 meae meae 366 Jul 24 2009 Allwmake
drwxrwxr-x 6 meae meae 4096 Jun 9 2010 applications
drwxrwxr-x 4 meae meae 4096 Jun 9 2010 bin
-rw-r----- 1 meae meae 17994 May 1 2008 COPYING
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Jun 9 2010 doc
drwxrwxr-x 4 meae meae 4096 Jun 9 2010 etc
drwxrwxr-x 4 meae meae 4096 Jun 9 2010 lib
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Jun 9 2010 OpenFOAM-1.6
```

Figure 11.2.1-2: OpenFOAM results 2



## انشاء برنامج لتحليل مسألة ما في ميدان ديناميكيات الموائع الحسابية (د.م.ح.)

```
total 366500
-rw----- 1 meae meae      310 Jun 12  2010 Installation Notes
-rw----- 1 meae meae        0 Jun 12  2010 Installation Notes-
drwxrwxr-x 3 meae meae    4096 Jul 14  2010 meae-1.6
drwxrwxr-x 11 meae meae    4096 Sep 24  2010 OpenFOAM-1.6
-rwxr-xr-x 1 meae meae   241760751 Jun  9  2010 OpenFOAM-1.6.General.gtgz
drwxrwxr-x 15 meae meae    4096 Jun  9  2010 ThirdParty-1.6
-rwxr-xr-x 1 meae meae   133110883 Jun  9  2010 ThirdParty-1.6.General.gtgz
[fhamed@server OpenFOAM-1.6]$ cd OpenFOAM-1.6
[fhamed@server OpenFOAM-1.6]$ ll
total 81260
-rwxr-x--- 1 meae meae     366 Jul 24  2009 Allwmake
drwxrwxr-x 6 meae meae    4096 Jun  9  2010 applications
drwxrwxr-x 4 meae meae    4096 Jun  9  2010 bin
-rw-r----- 1 meae meae   17994 May  1  2008 COPPING
drwxrwxr-x 5 meae meae    4096 Jun  9  2010 doc
drwxrwxr-x 4 meae meae    4096 Jun  9  2010 etc
drwxrwxr-x 4 meae meae    4096 Jun  9  2010 lib
drwxrwxr-x 5 meae meae    4096 Jun  9  2010 OpenFOAM-1.6
-rwxr-xr-x 1 meae meae   41587474 Jun  8  2010 OpenFOAM-1.6.linuxGccDFOpt.gtgz
-rwxr-xr-x 1 meae meae   41345997 Jun  9  2010 OpenFOAM-1.6.linuxGccSFOpt.gtgz
-rw-r----- 1 meae meae     8943 Jul 27  2009 README
-rw-r----- 1 meae meae   15311 Jul 27  2009 README.html
-rw-r----- 1 meae meae   18461 Jul 27  2009 ReleaseNotes-1.6
-rw-r----- 1 meae meae   32656 Jul 27  2009 ReleaseNotes-1.6.html
drwxrwxr-x 28 meae meae    4096 Jun  9  2010 src
drwxrwxr-x 15 meae meae    4096 Jun  9  2010 tutorials
drwxrwxr-x 6 meae meae    4096 Jun  9  2010 wmake
[fhamed@server OpenFOAM-1.6]$ cd tutorials/
[fhamed@server tutorials]$ ll
total 132
-rwxr-x--- 1 meae meae   1779 May 13  2009 Allclean
-rwxr-x--- 1 meae meae   3011 May 13  2009 Allrun
-rwxr-x--- 1 meae meae   5710 May 13  2009 Alltest
drwxrwxr-x 5 meae meae    4096 Jun  9  2010 basic
drwxrwxr-x 5 meae meae    4096 Jun  9  2010 combustion
drwxrwxr-x 10 meae meae    4096 Jun  9  2010 compressible
drwxrwxr-x 4 meae meae    4096 Jun  9  2010 discreteMethods
drwxrwxr-x 3 meae meae    4096 Jun  9  2010 dns
drwxrwxr-x 4 meae meae    4096 Jun  9  2010 electromagnetic
drwxrwxr-x 3 meae meae    4096 Jun  9  2010 financial
drwxrwxr-x 8 meae meae    4096 Jun  9  2010 heatTransfer
drwxrwxr-x 13 meae meae    4096 Jun  9  2010 incompressible
drwxrwxr-x 6 meae meae    4096 Jun  9  2010 lagrangian
```

Figure 11.2.1-3: OpenFOAM results 3

```
drwxr-xr-x 10 meae meae    4096 Jun  9  2010 allInPhase
drwxr-xr-x 4 meae meae    4096 Jun  9  2010 allInkappaSca
[fhamed@server tutorials]$ cd incompressible/
[fhamed@server incompressible]$ ll
total 88
drwxr-xr-x 4 meae meae    4096 Jun  9  2010 allGeometryFlow
drwxr-xr-x 3 meae meae    4096 Jun  9  2010 allIsoFoam
drwxr-xr-x 6 meae meae    4096 Jun  9  2010 allIsoFoam
drwxr-xr-x 4 meae meae    4096 Jun  9  2010 allM2Turbulence
drwxr-xr-x 3 meae meae    4096 Jun  9  2010 allM2Turbulence
drwxr-xr-x 3 meae meae    4096 Jun  9  2010 allM2TurbFlow
drwxr-xr-x 3 meae meae    4096 Jun  9  2010 allM2TurbFlow
drwxr-xr-x 4 meae meae    4096 Jun  9  2010 allM2TurbFlow
drwxr-xr-x 3 meae meae    4096 Jun  9  2010 allM2TurbFlow
drwxr-xr-x 6 meae meae    4096 Jun  9  2010 allM2TurbFlow
drwxr-xr-x 4 meae meae    4096 Jun  9  2010 allM2TurbFlow
[fhamed@server incompressible]$ cd isoFoam/
[fhamed@server isoFoam]$ ll
total 56
-rwxr-x--- 1 meae meae    361 Feb 17  2009 Allclean
-rwxr-x--- 1 meae meae   2797 Jul  9  2009 Allrun
drwxr-xr-x 5 meae meae    4096 Jun  9  2010 allCavity
drwxr-xr-x 5 meae meae    4096 Jun  9  2010 allCavityClipped
drwxr-xr-x 5 meae meae    4096 Jun  9  2010 allCavityFlow
drwxr-xr-x 5 meae meae    4096 Jun  9  2010 allCavityFlow
-rw-r----- 1 meae meae    160 Jul  9  2009 resetFixedWallsScr
[fhamed@server isoFoam]$ cd cavity
[fhamed@server cavity]$ ll
total 24
drwxr-xr-x 2 meae meae    4096 Jun  9  2010 allCavity
drwxr-xr-x 3 meae meae    4096 Jun  9  2010 allCavity
drwxr-xr-x 2 meae meae    4096 Jun  9  2010 allCavity
[fhamed@server cavity]$ cd constant/
[fhamed@server constant]$ ll
total 16
drwxr-xr-x 2 meae meae    4096 Jun  9  2010 allCavity
-rw-r----- 1 meae meae    217 Jul 20  2009 transportProperties
[fhamed@server constant]$ cd polyMesh/
[fhamed@server polyMesh]$ ll
total 16
-rwxr-x--- 1 meae meae   1346 Jul 24  2009 blockMeshDict
-rw-r----- 1 meae meae   1228 Jul 23  2009 boundary
[fhamed@server polyMesh]$ cd blockMeshDict
-bash: cd: blockMeshDict: Not a directory
```

Figure 11.2.1-4: OpenFOAM results 4

## استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة في ميدان ديناميكيات الموائع الحاسوبية

```

drwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Jun  9 2010 system
[fhamed@server cavity]$ cd constant/
[fhamed@server constant]$ ll
total 16
drwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Jun  9 2010 polyMesh
-rw-r----- 1 meae meae 917 Jul 23 2009 transportProperties
[fhamed@server constant]$ cd polyMesh/
[fhamed@server polyMesh]$ ll
total 16
-rw-r----- 1 meae meae 1346 Jul 24 2009 blockMeshDict
-rw-r----- 1 meae meae 1228 Jul 23 2009 boundary
[fhamed@server polyMesh]$ cd blockMeshDict
-bash: cd: blockMeshDict: Not a directory
[fhamed@server polyMesh]$ chown blockMeshDict
chown: missing operand after 'blockMeshDict'
Try 'chown --help' for more information.
[fhamed@server polyMesh]$ chown --help blockMeshDict
Usage: chown [OPTION]... [OWNER]][:[GROUP]] FILE...
   or:  chown [OPTION]... --reference=RFILE FILE...
Change the owner and/or group of each FILE to OWNER and/or GROUP.
With --reference, change the owner and group of each FILE to those of RFILE.

-c, --changes          like verbose but report only when a change is made
--dereference         affect the referent of each symbolic link, rather
                    than the symbolic link itself (this is the default)
-b, --no-dereference  affect each symbolic link instead of any referenced
                    file (useful only on systems that can change the
                    ownership of a symlink)
--from=CURRENT_OWNER:CURRENT_GROUP
                    change the owner and/or group of each file only if
                    its current owner and/or group match those specified
                    here.  Either may be omitted, in which case a match
                    is not required for the omitted attribute.
--no-preserve-root    do not treat '/' specially (the default)
--preserve-root       fail to operate recursively on '/'
-f, --silent, --quiet suppress most error messages
--reference=RFILE     use RFILE's owner and group rather than
                    the specifying OWNER:GROUP values
-R, --recursive       operate on files and directories recursively
-v, --verbose         output a diagnostic for every file processed

The following options modify how a hierarchy is traversed when the -R
option is also specified.  If more than one is specified, only the final
one takes effect.

```

Figure 11.2.1-5: OpenFOAM results 5

After enter in cavity file we should run program using Allrun we obtain the values of p for example in each point already seen in vertices:

بعد إدخال في ملف تجويف cavity علينا تشغيل البرنامج باستخدام Allrun نحصل على قيم p على سبيل المثال في كل نقطة رأينا بالفعل في القمم:

## انشاء برنامج لتحليل مسألة ما في ميدان ديناميكيات الموائع الحسابية (د.م.ح.)

```
-rw-rw-rw- 1 meae meae 5137 Apr 16 09:31 p
-rw-rw-r-- 1 meae meae 10757 Apr 16 09:10 phi
-rw-rw-r-- 1 meae meae 11110 Apr 16 09:10 U
drwxrwxr-x 2 meae meae 4096 Apr 16 09:10 uniform
[meae@server 0.5]$ vi p
-0.149897
-0.149851
-0.174909
-0.172752
-0.161142
-0.142923
-0.119753
-0.0927715
-0.0625719
-0.0294421
0.00637862
0.0444789
0.0840605
0.123708
0.161142
0.193091
0.215673
0.224082
0.208056
0.160638
-0.188623
-0.232236
-0.243933
-0.233942
-0.213689
-0.187149
-0.156367
-0.122495
-0.0858922
-0.0466664
-0.0040087
0.0415445
0.0898478
0.139835
0.189324
0.234695
0.27108
0.29167
0.281748
0.229701
-0.263966
```

Figure 11.2.1-6: The result value giving by OpenFAOM

## Visualization using Paraview:

Second; we have to visualize the program using paraview.

ثانياً؛ علينا أن نصور البرنامج باستخدام paraview.

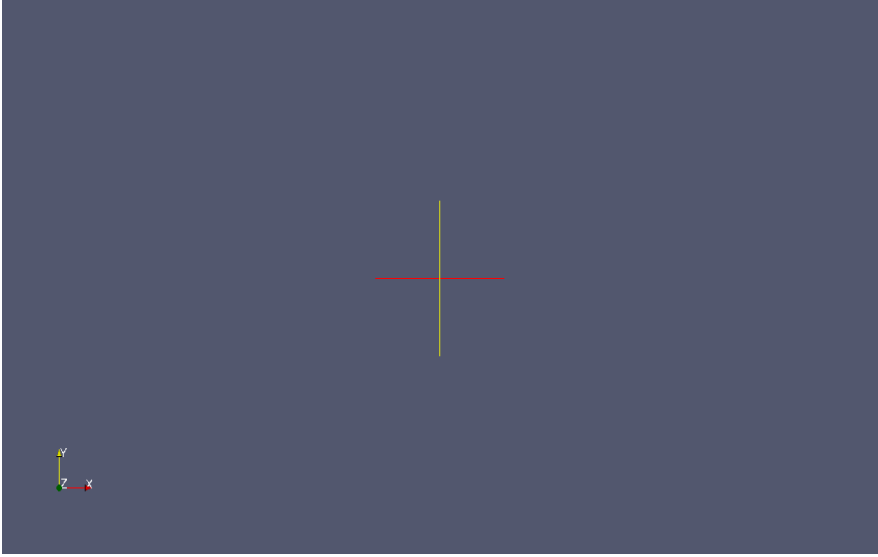


Figure 11.2.1-7: Pravier window

But our problem is to transport data from Linux OpenFOAM to windows paravier; we have to find format to transport data.

1. We show the VTK format to transport:

ولكن مشكلتنا هي نقل البيانات من Linux OpenFOAM إلى windows paravier. علينا أن نجد صيغة لنقل البيانات.

1. نرى صيغة VTK لنقل:

```

-bash: touch.OpenFoam: command not found
[meae@server icoFoam]$ foamToVTK
/*-----*/
| \ \ /   F i e l d   | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
| \ \ /   O p e r a t i o n   | Version: 1.6
| \ \ /   A n d   | Web: www.OpenFOAM.org
| \ \ /   M a n i p u l a t i o n   |
/*-----*/
Build : 1.6-53b7f692aa41
Exec : foamToVTK
Date : Apr 14 2015
Time : 12:39:53
Host : server
PID : 8342
Case : /home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFoam
nProc : 1
SigFpe : Enabling floating point exception trapping (FOAM_SIGFPE).

// * * * * *
Create time

cannot open file

file: /home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFoam/system/controlDict at line 0.

From function regIOobject::readStream()
in file db/regIOobject/regIOobjectRead.C at line 62.

FOAM exiting

[meae@server icoFoam]$ LL
-bash: LL: command not found
[meae@server icoFoam]$ ll
total 56
-rwxr-x-- 1 meae meae 381 Feb 17 2009 Allclean
-rwxr-x-- 1 meae meae 2797 Jul 9 2009 Allrun
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Apr 14 10:50 cavity
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Jun 9 2010 cavityClipped
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Jun 9 2010 cavityGrade
drwxrwxr-x 5 meae meae 4096 Jun 9 2010 elbow

```

Figure 11.2.1-8: VTK results

Then we copy the file and try to open it using paraview but we have not seen the cavity.

We try now to run OpenFOAM on windows to visualize the program from OpenFOAM solver on windows to paraview for visualization.

First; we click on blockMesk in Mesh Utilities to discretize the cavity program.

ثم ننسخ الملف محاولة لفتحه باستخدام paraview لكننا لم نرى تجويف cavity.

نحاول الآن تشغيل OpenFOAM على windows لتصور البرنامج من OpenFOAM على windows paraview للتصور.

أولاً؛ ننقر على blockMesk في شبكة المرافق لتجزئة برنامج تجويف.

Second; we come back to the solver and choose our study conditions (incompressible → icoFoam) to obtain the pressure, velocity and phi values:

ثانياً؛ نعود إلى المحلل واختيار ظروف دراستنا (incompressible → icoFoam) للحصول على ضغط والسرعة وقيم فاي phi:

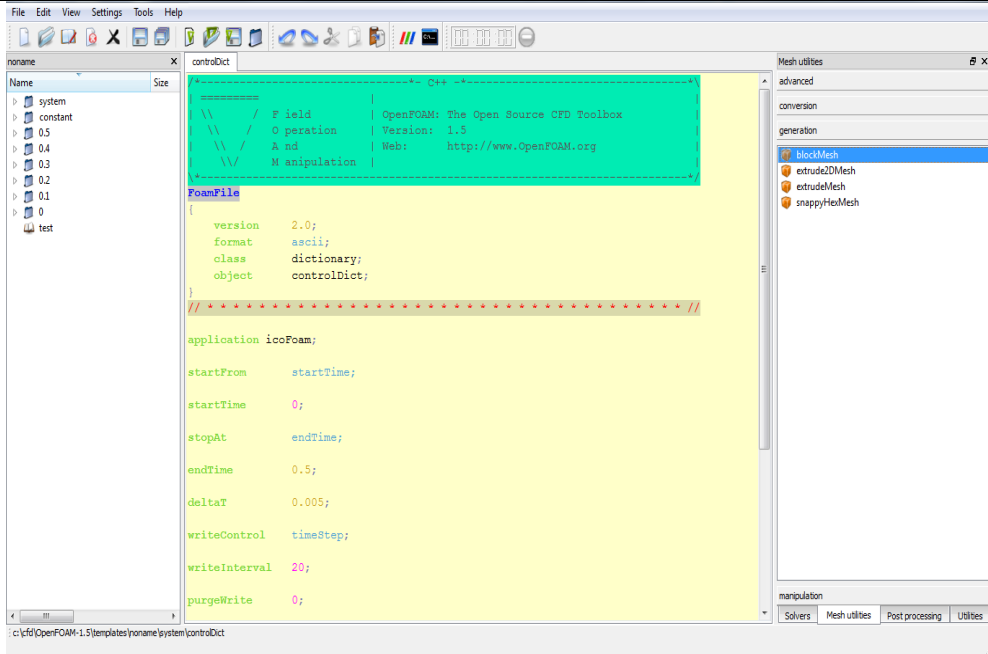


Figure 11.2.1-9: OpenFOAM results 1 in windows



## استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة في ميدان ديناميكيات الموائع الحاسوبية

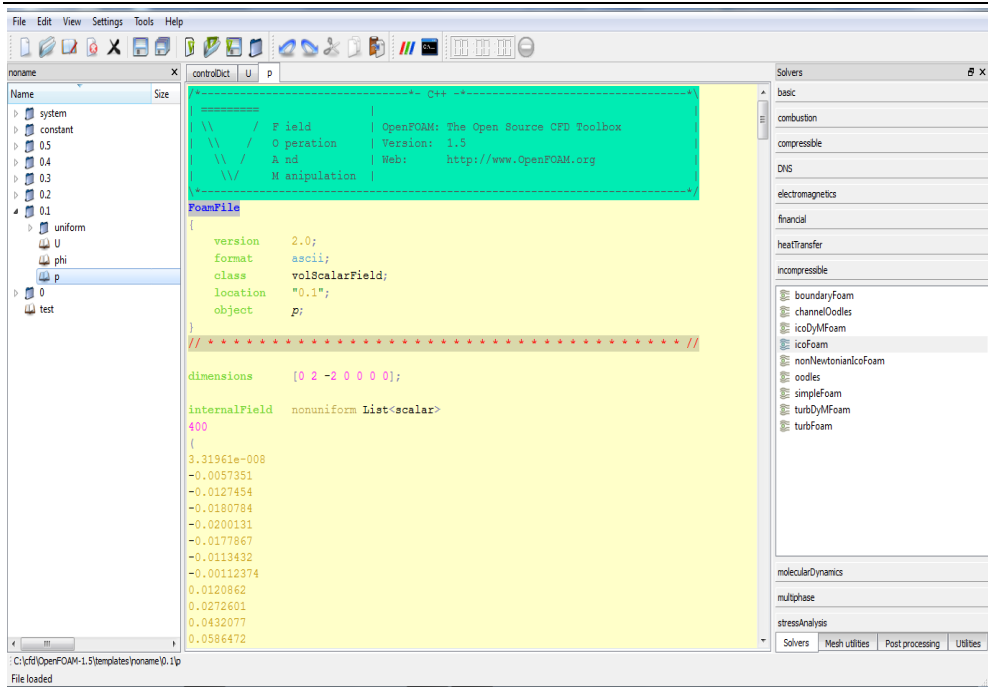


Figure 11.2.1-12: The pressure values giving by OpenFAOM in windows

And we have to save program before each step.

Than we should visualize result using paraview that related on OpenFOAM by paraFoam.

When paraFOAM is not responding we can visualize the program in paraview using `foamToVTK -ascii` (with windows paraview and windows OpenFAOM):

علينا حفظ البرنامج بعد كل خطوة. بعدها يجب أن نصور النتيجة باستخدام paraview التي تتعلق على OpenFOAM التي كتبها paraFoam. عندما لا يستجيب paraFOAM يمكننا تصور البرنامج في paraview باستخدام `foamToVTK -ascii` (مع windows paraview و windows OpenFAOM):



## انشاء برنامج لتحليل مسألة ما في ميدان ديناميكيات الموائع الحاسوبية (د.م.ح.)

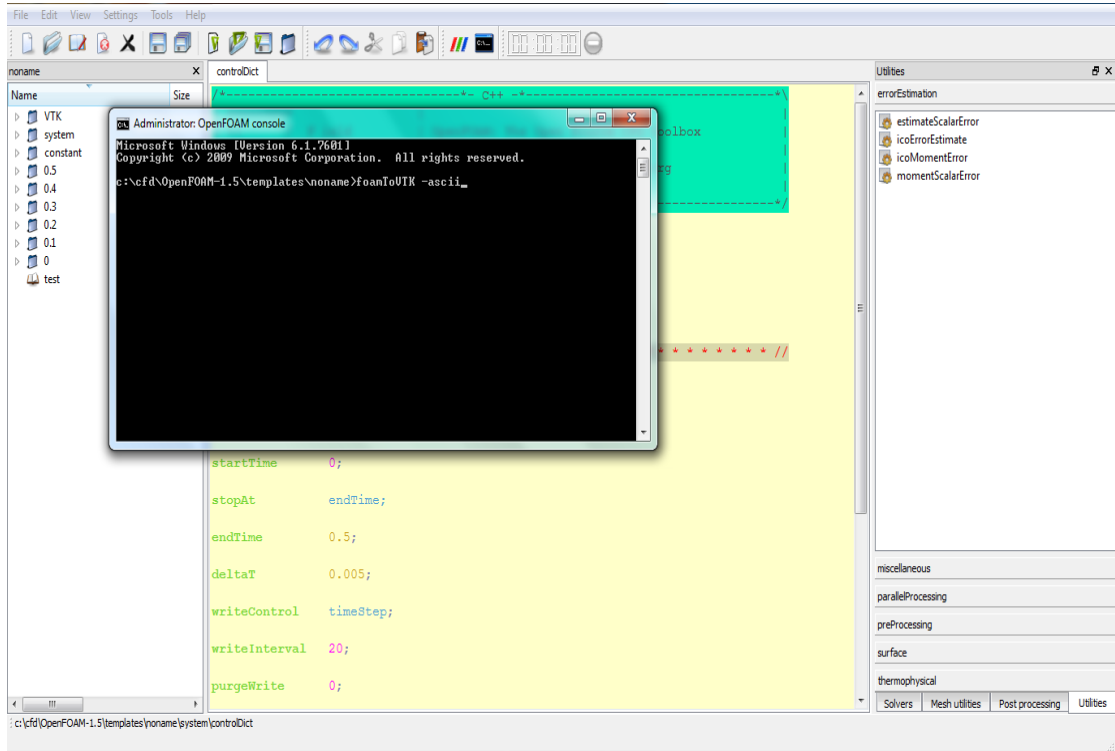


Figure 11.2.1-13: Application of VTK in windows

When we run program we obtain:

عندما نقوم بتشغيل البرنامج نحصل على:



انشاء برنامج لتحليل مسألة ما في ميدان ديناميكيات الموائع الحاسوبية (د.م.ح.)

<p>Now we open the VTK file in paraview to obtain this form:</p> <p>For pressure:</p> <p>P discontinue and continue:</p>	<p>الآن نفتح ملف VTK في paraview للحصول على هذا الشكل: للضغط: P عدم استمرار وتواصل:</p>
--	---

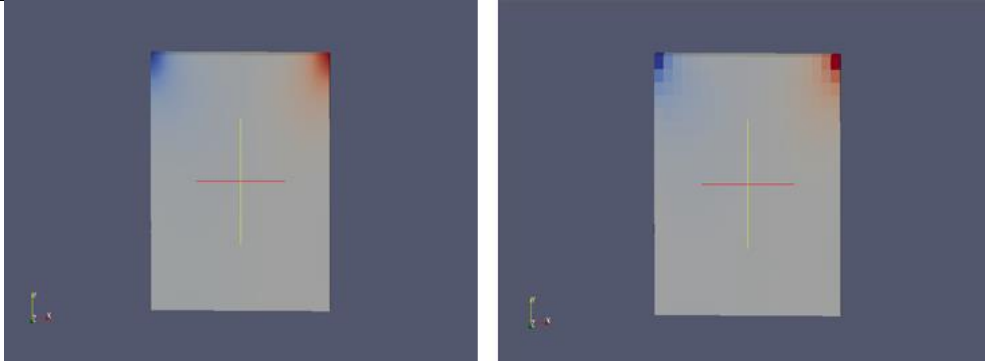


Figure 11.2.1-16: Continue and discontinue form of pressure

<p>For velocity:</p> <p>V discontinue and continue:</p>	<p>للسرعة: V عدم استمرار وتواصل:</p>
---	--

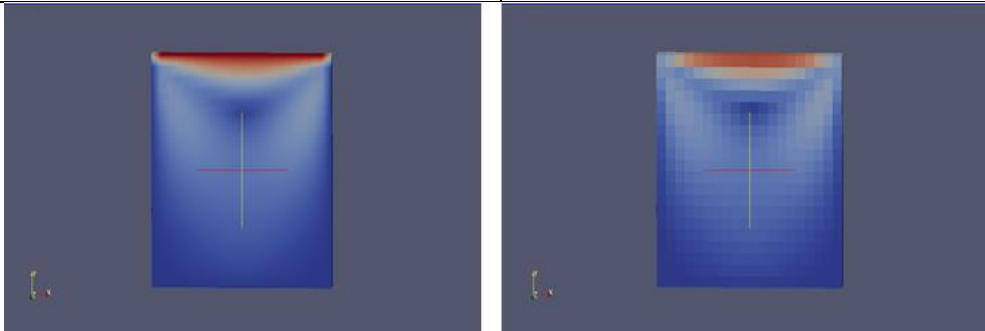


Figure 11.2.1-17: Continue and discontinue form of velocity

<p>And we can also visualize the run-program with Linux OpenFOAM on windows</p>	<p>ويمكننا أيضا تصور البرنامج تشغيل Linux OpenFOAM على windows باستخدام paraview</p>
---	--

paraview using foamToVTK - ascii:	:foamToVTK -ascii
--------------------------------------	-------------------

```
(meae@server cavity)$ foamToVTK -ascii
-----\
|          |          |          |          |
| \ \ / \  | F ield    | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
| \ \ / \  | O peration | Version: 1.6
| \ \ / \  | A nd       | Web: www.OpenFOAM.org
| \ \ / \  | M anipulation |
|          |          |          |          |
|-----/
Build : 1.6-53b7f692aa41
Exec  : foamToVTK -ascii
Date  : Apr 21 2015
Time  : 14:31:38
Host  : server
PID   : 6709
Case  : /home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFoam/cavity
nProcs : 1
SigPpe : Enabling floating point exception trapping (FOAM_SIGFPE).

// * * * * * //
Create time

Create mesh for time = 0

Deleting old VTK files in "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFoam/cavity/VTK"

Time: 0
volScalarFields : p
volVectorFields : U

Internal : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFoam/cavity/VTK/cavity_0.vtk"
Original cells:400 points:882 Additional cells:0 additional points:0

Patch : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFoam/cavity/VTK/movingWall/movingWall_0.vtk"
Patch : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFoam/cavity/VTK/fixeWalls/fixeWalls_0.vtk"
Patch : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFoam/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_0.vtk"
Time: 0.1
volScalarFields : p
volVectorFields : U

Internal : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
```

Figure 11.2.1-18: Application of VTK in Linux 1

```
Time: 0.1
volScalarFields      : p
volVectorFields      : U

Internal : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_20.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_20.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_20.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_20.vtk"
Time: 0.2
volScalarFields      : p
volVectorFields      : U

Internal : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_40.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_40.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_40.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_40.vtk"
Time: 0.3
volScalarFields      : p
volVectorFields      : U

Internal : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_60.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_60.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_60.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_60.vtk"
Time: 0.4
volScalarFields      : p
volVectorFields      : U

Internal : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_80.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_80.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_80.vtk"
```

Figure 11.2.1-19: Application of VTK in Linux 2

## استخدام برامج لا تحتاج الى رخصة في ميدان ديناميكيات الموائع الحاسوبية

```
Time: 0.1
volScalarFields      : p
volVectorFields      : U

Internal : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_20.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_20.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_20.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_20.vtk"
Time: 0.2
volScalarFields      : p
volVectorFields      : U

Internal : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_40.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_40.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_40.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_40.vtk"
Time: 0.3
volScalarFields      : p
volVectorFields      : U

Internal : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_60.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_60.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_60.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/frontAndBack/frontAndBack_60.vtk"
Time: 0.4
volScalarFields      : p
volVectorFields      : U

Internal : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/cavity_80.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/movingWall/movingWall_80.vtk"
Patch    : "/home/meae/OpenFOAM/OpenFOAM-1.6/tutorials/incompressible/icoFo
am/cavity/VTK/fixedWalls/fixedWalls_80.vtk"
```

Figure 11.2.1-20: Application of VTK in Linux 3

## 12 لمحات عن الحرق الحسابي (Numerical Combustion)

من:

Peter Gerlinger, **Numerische Verbrennungssimulation** - Effiziente numerische Simulation turbulenter Verbrennung, 2008

---

### Teil I Turbulente Strömung und Verbrennung

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Bemerkungen zur Verbrennungssimulation	5
1.1.1	Brutto-Reaktionen und Flame-Sheet-Modell	6
1.1.2	Eddy-Breakup- und Eddy-Dissipation-Modell	6
1.1.3	Chemisches Gleichgewicht	6
1.1.4	Tabellierungstechniken	7

### *12.1 بعض ملاحظات بالنسبة لمحاكاة الحرق*

#### 12.1.1 (brutto reactions) و (Flame Sheet Model)

The flame-sheet model allows a complete decoupling of the modeling of the formation and destruction of species from the modeling of the flow and mixing process.

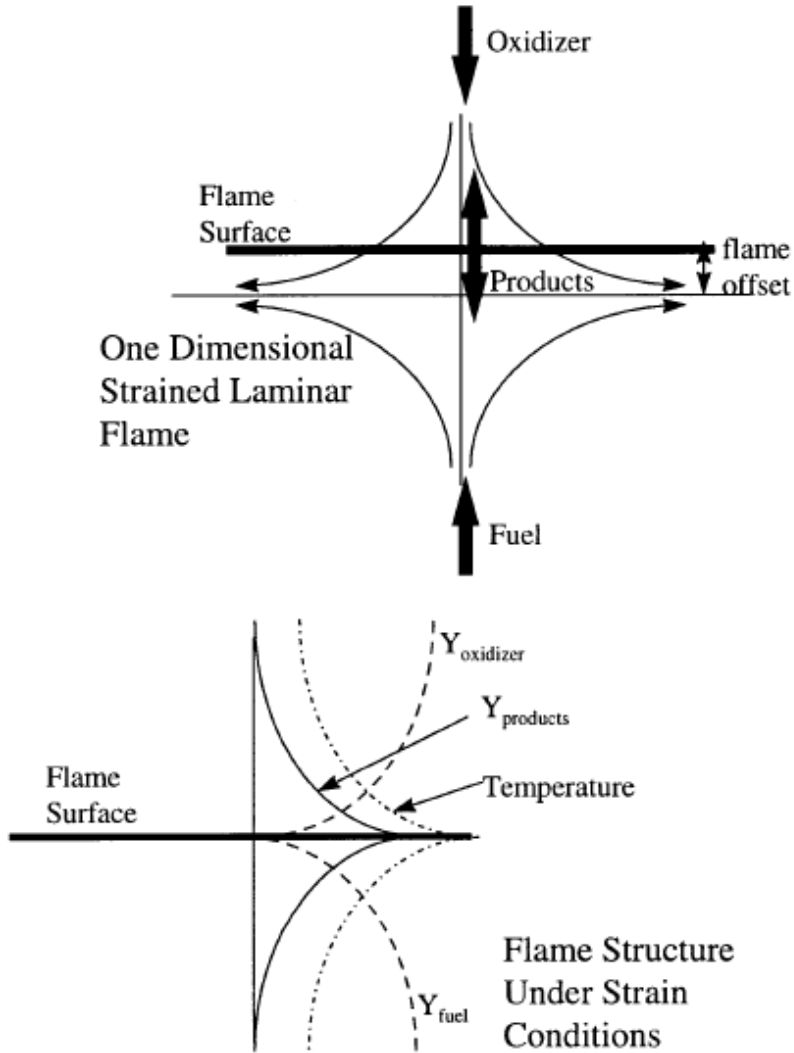


Fig. 11.1: The flame sheet model. From [Akinyemi 1997]

في نمذجة الحرق عن طريق صفحة الالهب (Flame sheet model) يفترض ان الاتفاعلات الكيميائية (chemical reactions) يمكن ان يجرء في صُحف يعمل فيه الافتعال، و يفترض ايضاً ان هذه الصحف لها طخانة ضئيلة مقارنة مع امداد السريان (flow) و عملية الخلط.

Brutto-Reaktionen



## 12.2 اساسيات الحرق (Basics of Combustion)

From [Strauss], 111-112:

Bei der Verbrennung handelt es sich um die Hochtemperatur-Oxidation eines Brennstoffes, bei der im wesentlichen Kohlenstoff und Wasserstoff, die in verschiedener Form im Brennstoff enthalten sind, mit Sauerstoff exotherm reagieren. Eine Verbrennung heißt vollständig oder vollkommen, wenn alle brennbaren Bestandteile in ihre höchste Oxidationsstufe überführt werden.

Jede Verbrennung wird durch eine Zündung eingeleitet. Unter der Zündtemperatur versteht man diejenige Temperatur, bei der mehr Wärme durch die Reaktion freigesetzt als durch Strahlung an die Umgebung abgegeben wird, so daß sich die Verbrennung von selbst erhält. Die Zündtemperatur ist im strengen Sinn kein Stoffparameter, sie wird aber als Erfahrungswert bei der Auslegung von Feuerungen und Sicherheitseinrichtungen immer wieder herangezogen. Die Zündtemperaturen der verschiedenen Brennstoffe weisen erhebliche Unterschiede auf und sind darüber hinaus abhängig von der Brennkammerbeschaffenheit sowie den Reaktionsparametern Druck, Sauerstoffpartialdruck, der katalytischen Wirksamkeit organischer Bestandteile und der spezifischen Oberfläche des Brennstoffes.

من:

Peter Gerlinger, **Numerische Verbrennungssimulation** - Effiziente numerische Simulation turbulenter Verbrennung, 2008

<b>2 Grundlagen der Verbrennung</b>	11
2.1 Bilanzgleichungen reaktiver Strömungen	11
2.1.1 Wahl des Gleichungssystems	14
2.1.2 Vernachlässigung unbedeutender Terme	16
2.1.3 Kompressibilität	17
2.2 Thermodynamische Beziehung	19
2.3 Diffusiver Transport	20
2.4 Stoffwerte	23
2.4.1 Reine Stoffe	24
2.4.2 Gasmische	24
2.5 Chemische Kinetik	25
2.5.1 Chemische Umsatzraten	25
2.5.2 Reaktionsmechanismen	30

From Theroretical and Numerical Combustion (Thierry Poinsot, Denis Veynante)

1	Conservation equations for reacting flows	1
1.1	General forms	1
1.1.1	Choice of primitive variables	1
1.1.2	Conservation of momentum	12
1.1.3	Conservation of mass and species	13
1.1.4	Diffusion velocities and Fick's law	13
1.1.5	Global mass conservation and correction velocity	14
1.1.6	Conservation of energy	16
1.2	Usual simplified forms	21
1.2.1	Constant pressure flames	21
1.2.2	Equal heat capacities for all species	22
1.2.3	Constant heat capacity for the mixture only	23
1.3	Summary of conservation equations	24

و هنالك المسائل التالية:

- mass transfer<sup>11</sup>
- معادلات الاستمرارية لسرايين تفاعلية (Conservation equations for reacting flows)
- Some Important Chemical Mechanisms (e.g. the H<sub>2</sub>-O<sub>2</sub> System)<sup>12</sup>
- Laminar premixed flames and Laminar Diffusion flames
- Droplet Evaporation and Burning
- Introduction to Turbulent Flows
- Turbulent Premixed and Nonpremixed flames
- Burning of solids
- Free Numerical Combustion Codes (e.g. KIVA)

<sup>11</sup> From [Turns], pp. 83-105

<sup>12</sup> From [Turns], 148-152

### Fluid Dynamics

- 1) [Ganzer 1987] Uwe Ganzer, *Gasdynamik*, Springer-Verlag 1987
- 2) [Wendt 2009] John F. Wendt, *Computational Fluid Dynamics – an Introduction (a von Karman Institute Book)*, Third Edition, 2009, Springer Verlag
- 3) [صديق] محمد هاشم الصديق (الإستاذ المشارك بشعبة هندسة الموانع قسم الهندسة الالميكانيكية / كلية الهندسة والعمارة، جامعة الخرطوم، msiddiq@yahoo.com، ميكانيك الموانع، الإصدار الثانية، 2006

### Computational Fluid Dynamics

- 1) [Anderson 1991] Anderson, John D., Jr., *Fundamentals of Aerodynamics*, 2<sup>nd</sup> Edition McGraw-Hill, New York, 1991
- 2) [Ferziger, Peric] J. Ferziger und M. Peric, *Numerische Strömungsmechanik*, 2008, Springer Verlag.
- 3) [Wessling] Pieter Wesseling, *Principles of Computational Fluid Dynamics*, 2000, Springer Verlag.

(4) مجمع اللغة العربية

- 5) [http://en.wikipedia.org/wiki/Computational\\_fluid\\_dynamics](http://en.wikipedia.org/wiki/Computational_fluid_dynamics)

### Numerical Combustion

- 1) [Strauss] K. Strauss, *Kraftwerkstechnik - zur Nutzung fossiler, nuklearer und regenerativer Energiequellen*, Springer-Verlag, 2006
- 2) [Poinot, Veynante] Thierry Poinot, Denis Veynante; *Theoretical and Numerical Combustion*
- 3) [Turns] Stephen R. Turns; *Introduction to Combustion – Concepts and Applications*, 2<sup>nd</sup> edition
- 4) [Akinyemi 1997] O. Akinyemi, *A flame Sheet Model of Combustion an NO Formation in Diesel Engines*, PhD thesis, MIT, June 1997

14 ملحقات (Appendices)

14.1 ملحق أ: مضمون كتاب "ميكانيك الموائع" لمحمد هاشم الصديق

مضمون [صديق] محمد هاشم الصديق (الإستاذ المشارك بشعبة هندسة الموائع قسم الهندسة

الاميكانيكية / كلية الهندسة والعمارة، جامعة الخرطوم، msiddiq@yahoo.com)، ميكانيك

الموائع، الاصدار الثانية، 2006

هو التالي:

الصفحة	العنوان	القسم	الباب
1	تعريفات أساسية		1
9	مسائل		
11	المعادلات الأساسية في ميكانيكا الموائع		2
11	متجه السريان	2.1	
13	حفظ الكتلة	2.2	
16	حفظ الطاقة	2.3	
20	حفظ كمية التحرك	2.4	
24	مسائل		
27	التحليل البعدي والنمذجة		3
27	أسس التحليل البعدي	3.1	
31	بعض المقادير اللابعديّة ذات الأهمية في ميكانيكا الموائع	3.2	
32	النمذجة	3.3	
34	مسائل		
35	السريان اللا إنبساطي في الأنابيب		4
35	أثر الاحتكاك على السريان في الأنابيب	4.1	
41	ألقوا قد الموضوعية في الأنابيب	4.2	
44	الأنابيب المتفرعة	4.3	
47	مسائل		
49	ميكانيكا الموائع عند الاتزان النسبي		5
49	المعادلة الأساسية	5.1	
50	توزيع الضغط في مجال ثنائي الأبعاد لسائل في حاوية تتحرك بتسارع ثابت	5.2	
54	توزيع الضغط في سائل ساكن	5.4	
56	الطفو	5.5	
59	الهايذرومتر	5.6	
61	استقرار الأحسام الطافية	5.8	
64	مسائل		
66	طرق القياس		6
66	مقدمة	6.1	
67	أجهزة قياس الضغط	6.2	
71	أجهزة قياس معدل السريان	6.3	
75	الدفع		7
75	الدفع النفاث	7.1	
78	الدفع الصاروخي	7.2	
79	الدفاع	7.3	
86	طرق الدفع النفاث	7.4	
87	مسائل		

88	<b>حفظ كمية التحرك في الصورة التفاضلية</b>		<b>8</b>
88	الصورة العامة للمعادلات	8.1	
90	حالات خاصة	8.2	
91	حل معادلات نافير - ستوكس	8.3	
101	تحسين حركة الموائع	8.4	
103	مسائل		
105	<b>الاعاقة</b>		<b>9</b>
105	مقدمة	9.1	
105	معادلات الطبقة الجدارية	9.2	
109	حل فون-كارمن عند ممال الضغط صفر	9.3	
120	الطبقة الجدارية بممال ضغط لا صفري	9.4	
122	الفصل و الإعاقه الضعفية في السريان الخارجى	9.5	
128	التحكم فى الطبقة الجدارية	9.6	
132	مسائل		
134	<b>الرفع</b>		<b>10</b>
134	مقدمة	10.1	
142	إختزال معادلات نافير - ستوكس لحالة السريان اللالزجى	10.2	
146	السريان اللادوراني عبر اسطوانة	10.3	
155	الرفع على الجنيح	10.4	
160	مسائل		
162	<b>السريان الانضغاطى للغاز</b>		<b>11</b>
163	مقدمة	11.1	
166	حركة الموجات الصوتية	11.2	
172	السريان اللاتبيدي	11.3	
192	مسائل		
194	الصدمة المتعامدة	11.4	
208	مسائل		
209	السريان الاحتكاكى	11.5	
224	مسائل		
225	السريان اللاكظمى	11.6	
234	مسائل		
235	قياس السرعة فى السريان الانضغاطى	11.7	

239	قوائم خواص الماء و الجو القياسي	الملحق أ
240	بعض العلاقات الرياضية ذات الصلة	الملحق ب
241	معامل الاحتكاك $f$ للأنابيب	الملحق ج
245	قوائم السريان الانضغاطي للهواء	الملحق د
252		الرموز
254		مراجع
256		معجم

## 14.2 ومضمون كتاب [Ferziger, Peric]

مدخل الى التحليل العددي (بالإنجليزية: Numerics)

(بالإنجليزية: Components of a numerical method)

(بالإنجليزية: Mathematical model)

(بالإنجليزية: Discretization method)

(بالإنجليزية: Coordinate and base vector systems)

(بالإنجليزية: Numerical mesh)

(بالإنجليزية: Finite Approximations)

(بالإنجليزية: Solution method)

(بالإنجليزية: Convergence criteria)

اساسيات ديناميك الحرارة (بالإنجليزية: Thermodynamics)

(بالإنجليزية: Finite Difference Methods)

(بالإنجليزية: Finite Volume Methods)

طريقة العناصر المنتهية (FEM)

(بالإنجليزية: Solving linear equation systems)

(بالإنجليزية: Solving the Navier-Stokes Equations)

(بالإنجليزية: Computation Methods for complex flow areas)

(بالإنجليزية: Simulation of turbulence)

(بالإنجليزية: Compressible Fluids)

(بالإنجليزية: Efficiency and accuracy)

(بالإنجليزية: Special Topics)

(بالإنجليزية: Combustion)

### 14.3 مواضيع إضافية

(بالإنجليزية: CFD Applications in Energy Engineering)



( بالإنجليزية: CFD Applications in Aeronautics )

( بالإنجليزية: CFD Applications in Space Technology )

## 15 Dictionary

### 15.1 A

English	Deutsch	عربي
accuracy		دقة
algebraic difference quotients		فُرُق لمقسومات الجبرية

### 15.2 B

English	Deutsch	عربي
boundary		الحدود
Boundary <b>conditions</b>		الشروط الحدودية

### 15.3 C

<b>English</b>	<b>Deutsch</b>	<b>عربي</b>
calculation	Berechnung	حساب
characteristic lines		الخطوط المميزة
Configure		تكوين
Continuity equation	Kontinuitätsgleichung	معادلة الاستمرارية

Conservation form		الشكل المحفظ
conservation form		الشكل التحفظي
control volume		حجم التحكم
Cordinate system		نظام إحداثي
chemical reactions		تفاعلات كيميائية

### 15.4 D

English	Deutsch	عربي
derivate	Ableitung, Differentialquotient	المتفرعة
derivative		المشتق
Descretiztion		تجزئة
differential		تفاضلي
Directory		دليل
distinct	verschieden	

dependent variables		والمتغيرات التابعة
difference		الفرق
discriminant		المتميّز
determinant		المحددة
Difference expressions		تعايير الفروق
difference quotients		مقسومات فرقية

### 15.5 E

English	Deutsch	عربي
Explicit		بتفصيل
Elliptic (partial differential) equations		معادلات القطع الناقص
ellipse		الاهليج

### 15.6 F

finite difference method		
fluid element		عضو مائع
fluid dynamics		حركية الموائع
Flow	Fluss, Stömung	سريان

flow field		مجال السريان
finite-difference methods	Finite-Differenzen Methoden	طرق الفرق المحدود
flux	Strom	سريان
friction	Reibung	احتكاك
forward difference		الفرق إلى الأمام
Formal		شكلي
Function of		دالة ل

### 15.7 G

generate		انشاء
governing equation		معادلة اساسية
grid		شبكة

### 15.8 H

hyperbolic (partial differential) equations		معادلات القطع الزائد
--	--	----------------------

### 15.9 I

--	--	--

integral		تكاملية
incorporate		
Initial conditions		الشروط الاولية
incompressible	inkompressibel	لا انضغاطي
infinitesimal		موحل في الصغر
installation		تثبيت
inviscid	nicht zähflüssig	لا لزجي
irrotational	nicht rotierend	لا دوراني
integral form		

**15.10 J**

--	--	--

**15.11 K**

--	--	--

**15.12 L**

linear algebra	Linerare Algebra	علم الحساب الجبر الخطي
----------------	------------------	------------------------

**15.13 M**

matrix		مصفوفة
momentum		كمية التحرك
manipulation		تلاعب

**15.14 N**

numerical analysis		التحليل العددي
normal		عمودية

**15.15 O**

One-dimensional	eindimensional	أحادية البعد
Order of magnitude	Größenordnung	القيمة الأسية

**15.16 P**

parabolic		
parabolic (partial differential) equations		معادلات القطع المكافئ
Panel	Gruppe, Runde	مؤطرة
property	Eigenschaft	خصوصية
partial differential equations		المعادلات التفاضلية الجزئية
partial derivate	Partielle Ableitung	المشتق الجزئي

plane (e.g. xy plane)		مستو (مثلا مستو xy)
polynomial equation		معادلة متعددة الحدود

### 15.17 Q

### 15.18 R

(chemical) reaction		تفاعل كيميائي
Rectangular		مستطيلي

### 15.19 S

Shear	Scherung	قص
Shear stress	Scherspannung	الإجهاد القصي
Slope	Anstieg (einer Funktion) (math.)	ميل
steady-state		
Source	Quelle	نبع-مصدر
System	System	منظومة-نظام
Stress	Spannung (Druckvektor)	اجهاد
Substantial Derivate		الاشتقاق الكبير



Stability		الاستقرار
Symbol (Mathematical symbol)		رمز رياضي
simulation		محاكاة

### 15.20 T

time-dependend method		طريقة تعتمد الوقت
Transient		عابر
tangential		مماسية
term (mathematical term)		حد رياضي

### 15.21 U

Uniform		موحد

### 15.22 V

Viscous		لزجي
Source	Quelle	نبع
variable x		متغير x
Visualization		تصوير

--	--	--

15.23 W

15.24 X

15.25 Y

15.26 Z

15.27 Still to be ordered

calculation	Berechnung	
incorporate		
time-dependend method		
steady-state		
flow field		
Transient		
hyperbolic		
incompressible	inkompressibel	لا انضغاطي

source	Quelle	نبع
vortex	Wirbel	دوامة مائية
panel	Gruppe, Runde	مؤطرة
numerical analysis		التحليل العددي
inviscid	nicht zähflüssig	لا لزجي
finite-difference methods	Finite-Differenzen Methoden	طرق الفرق المحدود
irrotational	nicht rotierend	لا دوراني
property	Eigenschaft	خصوصية
governing equations		المعادلات الاساسية
integral form		
system		منظومة
control volume		حجم التحكم
normal		عمودية

tangential		مماسية
flux	Strom	سريان
Uniform		
rectangular		
grid		
stress	Spannung (Druckvektor)	اجهاد
shear	Scherung	قص
	Scherspannung	الإجهاد القصي
<b>S</b>		
stress	Spannung $\sigma$ (hat Einheit N/m <sup>2</sup> , d.h. die gleiche Einheit wie ein	الاجهاد

	Druck)	
Substantial Derivate		الاشتقاق الكبير
<b>V</b>		
Viscous		لزجي
Flow	Fluss, Stömung	سريان
calculation	Berechnung	
incorporate		
time-dependend method		
steady-state		
flow field		
Transient		
hyperbolic		
parabolic		

---
